

curso de matemáticas

J. LELONG-FERRAND, J. M. ARNAUDIÈS

TOMO III

**geometría
y cinemática**

editorial reverté, s.a.

Hermann Langguth

Curso de matemáticas

Tomo 3

GEOMETRÍA
Y CINEMÁTICA

Curso de matemáticas

Tomo 3

GEOMETRÍA Y CINEMÁTICA

Jacqueline LELONG-FERRAND

Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie à Paris

Jean-Marie ARNAUDIÈS

Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Kléber à Strasbourg



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México - Rio de Janeiro

Título de la obra original

Cours de Mathématiques — Tome 3
GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE, 2^e édition

Edición original en lengua francesa publicada por
DUNOD, Paris

Copyright © Bordas, Paris

Versión española por el

Dr. Bartolomé Frontera Marqués

Dotor Ingeniero de Montes, Doctor en Ciencias Matemáticas,
Profesor Adjunto de Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidades
en la Universidad de Zaragoza

Revisada por el

Dr. Enrique Linés Escardó

Catedrático de la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Madrid

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A. — Encarnación, 86 — Barcelona(24)

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1982

Impreso en España Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 5068 - 4 tomo 3

ISBN - 84 - 291 - 5065 - X obra completa

Depósito Legal: B. 4.721-1982

Gráficas Badalona, S.A. Ignasi Iglesias, 26 - Badalona

Prólogo

Con un retraso, por el que pedimos se nos disculpe, presentamos a nuestros lectores el tomo 3 de nuestro Tratado de Matemáticas. Con el tomo 4, ya aparecido, queda completa la serie iniciada con los volúmenes de Álgebra y de Análisis.

La presente obra se ha propuesto como objetivo el tratar, con la mayor precisión y claridad posibles, las cuestiones de Geometría y de Cinemática que figuran en el programa de Clases Preparatorias. Para ello hemos seguido escrupulosamente los Comentarios oficiales a estos Programas, y el hecho de que tales Comentarios hayan aparecido en fecha relativamente reciente, unido a la complejidad de las cuestiones tratadas, ha sido en parte la causa de nuestro retraso.

No es cosa fácil hoy día escribir una obra de Geometría destinada a la enseñanza: el rigor exigible a los autores obliga a éstos a recurrir a las teorías matemáticas más recientes, y el nivel de estas teorías muy pronto supera el de las clases cuyo fin no es exclusivamente la formación de futuros matemáticos. Por otra parte, a nivel superior, la Geometría «prolifer» en teorías muy diversas que entre sí no tienen más conexiones que las puramente históricas; por ejemplo, el concepto intuitivo de «curva» se escinde en la actualidad en los de camino, arco geométrico, variedad diferenciable de dimensión 1 y curva algebraica. Además, según la estructura de los espacios a que tales conceptos hagan referencia, se puede uno interesar en las propiedades topológicas, diferenciales, afines, métricas, proyectivas, conformes, etc..., de estas «curvas».

Finalmente —y para nosotros es esto esencial— el estudio axiomático de la Geometría no dispensa de la consideración de los problemas clásicos que se pueden proponer en relación con las curvas y superficies usuales. Estos problemas siguen teniendo importancia para las aplicaciones (en particular a la Mecánica) y es natural que

constituyan el objeto de cuestiones de examen para futuros ingenieros. Consecuentes con ello damos siempre los procedimientos efectivos de cálculo después de los desarrollos teóricos preconizados en los programas, y los métodos propuestos se ilustran con numerosos ejemplos.

En la misma línea hemos tratado las cuestiones de Cinemática que figuran en el programa (Cap. X a XII); y efectivamente es legítimo y necesario fundar ahora la Mecánica sobre axiomas claramente enunciados y poner en evidencia las estructuras utilizadas. Pero aquí, quizá más que en cualquier otra materia, la perfección del modelo matemático no debe hacernos perder de vista las realidades físicas que representa. Por ello no hemos tenido reparo en recurrir a la intuición física para ayudar al lector a la captación de este modelo.

La búsqueda constante del necesario equilibrio entre los puntos de vista teórico y práctico seguramente ha alargado esta obra más de lo que hubiésemos querido, por cuanto nos ha parecido indispensable exponer sobre ciertos puntos algunos complementos con destino a los mejores alumnos y a los futuros profesores. Pero esperamos que la claridad de la presentación, por la cual hemos de dar gracias a Ediciones Bordas-Dunod, permitirá a los estudiantes desenvolverse bien. Tras una lectura más o menos profunda de los desarrollos teóricos será esencial que estudien los métodos prácticos de cálculo y, para asimilar tales métodos, no podemos menos que aconsejarles la resolución de los numerosos ejercicios propuestos al final del libro.

Para terminar, nos es grato dar las gracias a todas aquellas personas que, de un modo u otro han contribuido a la confección de este libro y muy especialmente a los señores Cardona y Riotort.

Indice analítico

CAPÍTULO I. Geometría afín	1
1 Complementos de geometría vectorial	1
2 Proyectores, homotecias, dilataciones y transvecciones (caso vectorial)	5
3 Espacios afines	13
4 Aplicaciones afines. Grupo afín	18
5 Estructuras vectoriales sobre un espacio afín	22
6 Subvariedades afines. Subespacios afines	24
7 Funciones afines; ecuaciones de una variedad afín	32
8 Baricentros	36
9 Coordenadas baricéntricas	42
10 Transformaciones afines particulares	47
11 Convexidad	53
12 Sistemas de referencia, orientación de los espacios afines de dimensión finita	59
13 Rectas de dimensión 2	66
14 Planos de un espacio afín de dimensión 3	70
CAPÍTULO II. Nociones de Geometría euclídea	79
1 Espacios afines ligados a un $E.V.N.$ Caso euclídeo	79
2 Ortogonalidad. Noción elemental del ángulo	83
3 Caso del plano. Ángulos orientados	89
4 Coordenadas polares	96
5 Coordenadas cilíndricas y esféricas	100
6 Rectas del plano euclídeo	105
7 Haz de rectas definido mediante una ecuación homogénea de segundo grado (en el plano)	110
8 Rectas y planos en dimensión 3	115
9 Planos definidos mediante una ecuación homogénea de segundo grado	123
10 Isometrías y desplazamientos. Descomposición canónica	126
11 Estructura de las isometrías; puntos fijos	133
12 Generadores de los grupos $Is(\mathcal{E}_n)$ y $Dep(\mathcal{E}_n)$	141
13 Semejanzas. Inversiones	146

CAPÍTULO III. Estudio elemental de algunos conjuntos	155
1 Circunferencias del plano euclídeo	156
2 Puntos conjugados respecto a una circunferencia	164
3 Ejes radicales. Haces de circunferencias	166
4 Ecuaciones polares y cartesianas de las cónicas	172
5 Cilindros, conos y conoides	180
6 Esferas (en dimensión 3)	188
7 Cuádricas con centro	194
8 Cilindros con centro y conos de segundo grado	206
9 Paraboloides y cilindros parabólicos	210
10 Superficies de revolución	215
11 Noción geométrica de tangente y de plano tangente a un conjunto	224
CAPÍTULO IV. Campos de vectores y tórsos	233
1 Endomorfismos antisimétricos de un espacio vectorial euclídeo	234
2 Caso de un espacio de dimensión 3	237
3 Concepto general de campo de vectores	243
4 Campos de gradientes (en un espacio euclídeo)	247
5 Caso de un espacio euclídeo de dimensión 3: rotacional	254
6 Fórmulas de análisis vectorial	263
7 Campos equiproyectivos	265
8 Tórsos	270
8 Eje central de un tórsor	273
10 Comomento de los tórsos	275
11 Tórsos elementales	278
12 Vectores deslizantes. Vectores ligados	280
13 Descomposición de un tórsor en tórsos elementales	285
14 Sumas de deslizantes	289
Apéndice. Tórsos paralelos a un plano	293
CAPÍTULO V. Estudio afín de los arcos geométricos	295
1 Caminos. Arcos geométricos	296
2 Arcos orientados	302
3 Sub-arcos. Arcos regulares	305
4 Contacto de arcos	313
5 Imágenes de un arco. Invarianza del contacto en un difeomorfismo	319
6 Subespacios fundamentales	320
7 Resultados prácticos. Ejemplos	327
8 Caracterización de los arcos contenidos en una subvariedad afín	331
9 Estudio afín de los arcos planos simples	336
10 Ramas infinitas de los arcos planos	339
11 Curvas planas definidas implícitamente	343
12 Ejemplos de curvas algebraicas	352
CAPÍTULO VI. Propiedades métricas de los arcos	357
1 Concepto general de arco rectificable. Longitud	357
2 Caso euclídeo	363
3 Parámetros normales. Curvatura. Contacto	368
4 Caso de un plano orientado. Fórmulas de Frenet	378
5 Estudio local de un arco plano	384
6 Funciones angulares asociadas a un arco plano	387
7 Ecuaciones intrínsecas de un arco plano	396
8 Arcos de \mathcal{E}_3 curvatura, torsión, sistema de referencia de Serret-Frenet	401
9 Cálculo de la curvatura y de la torsión	405
10 Estudio métrico local de los arcos de \mathcal{E}_3	412
11 Ecuaciones intrínsecas de un arco de \mathcal{E}_3	417
12 Hélices en \mathcal{E}_3	424

CAPÍTULO VII	431
1 Un ejemplo de parametrización cartesiana	431
2 Estudio global de parametrizaciones	439
3 Construcción de las curvas planas definidas en coordenadas polares	447
4 Ejemplos de construcción de curvas definidas en coordenadas polares	445
5 Evolutas, evolventes, curvas paralelas	463
6 Curvas trocoides y cicloides	476
7 Propiedades generales de las curvas cicloides	484
8 Estudio de algunas curvas cicloides particulares	490
CAPÍTULO VIII. Propiedades afines de las superficies	501
1 Hojas geométricas	502
2 Estudio del soporte de una hoja	506
3 Hojas regulares	509
4 Plano tangente	513
5 Posición de una hoja respecto a un plano tangente	524
6 Superficies regladas	532
7 Superficies desarrollables	537
8 Inmersiones. Subvariedades	541
CAPÍTULO IX. Propiedades métricas de las superficies	547
1 Primera forma cuadrática fundamental	548
2 Normal. Sistema de referencia de Darboux	553
3 Segunda forma cuadrática fundamental	562
4 Endomorfismo asociado a la segunda forma fundamental	572
5 Torsión geodésica. Direcciones principales	576
6 Determinación efectiva de las direcciones y curvaturas principales	583
7 Ejemplos	588
8 Curvas notables trazadas sobre una hoja	594
9 Ecuaciones diferenciales de la forma $Adu^2 + 2Bdu dv + Cdv^2 = 0$. Determinación de las asíntoticas y de las líneas de curvatura	600
10 Determinación de las geodésicas	608
CAPÍTULO X. Sistema de referencia móvil	617
1 Preliminares	618
2 Concepto general de sistema de referencia móvil con k parámetros	620
3 Sistemas de referencia móviles con un parámetro	624
4 Sistemas de referencia móviles indeformables en dimensión 2 ó 3	630
5 Sistemas de referencia móviles indeformables con k parámetros de \mathcal{E}_3 . Ejemplos	637
6 Vuelta a los sistemas de referencia móviles con un parámetro de \mathcal{E}_3 . Principio de adición de los vectores rotaciones	640
CAPÍTULO XI. Cinemática del punto	643
1 Introducción	643
2 Determinación de un movimiento puntual	648
3 Componentes de la velocidad y de la aceleración	652
4 Movimiento circular	657
5 Movimiento con aceleración central	659
6 Determinación de un movimiento con aceleración central dando las condiciones iniciales	664
7 Movimiento puntual newtoniano	670
CAPÍTULO XII. Cinemática del sólido	681
1 Concepto general de sistema material en movimiento	681
2 Sólidos en movimiento	685
3 Espacios móviles	688
4 Espacio móvil ligado a un sólido en movimiento	692
5 Campo de velocidades y rotación instantánea de un espacio móvil	695

6	Relaciones con el concepto de sistema de referencia móvil	698
7	Movimiento definido por un sistema de referencia ortonormal móvil	702
8	Ejemplos fundamentales de movimiento	705
9	Movimiento puntual relativo	714
10	Movimiento relativo de un espacio móvil respecto a otro	719
11	Axoides	725
12	Movimiento de plano sobre plano	729
Ejercicios		739
Bibliografía		817
Índice alfabético		819

Capítulo I

Geometría afín

En todo este capítulo, *el cuerpo base es el cuerpo \mathbf{R} de los reales*.

El objeto de este capítulo es un estudio detallado y orientado hacia las aplicaciones prácticas, de los fundamentos de la Geometría afín. Este estudio ha sido iniciado en el § VIII.6 del Tomo 1, dentro de un cuadro más general.

● Señalemos que todas las demostraciones y todos los resultados de los §§ 1 a 8 y del § 11 siguen siendo válidos, sin modificación, cuando se sustituye el cuerpo base \mathbf{R} por un cuerpo K conmutativo cualquiera: Basta con sustituir en todas partes \mathbf{R} por K , \mathbf{R}^* por K^* , $\mathcal{L}(E)$ por $\mathcal{L}_K(E)$ y $GL(E)$ por $GL_K(E)$.

Por el contrario, las teorías de la convexidad y de la orientación utilizan las propiedades particulares de \mathbf{R} .

§ 1.1 COMPLEMENTOS DE GEOMETRÍA VECTORIAL

Vamos a repasar y precisar algunas nociones relativas a espacios vectoriales y a endomorfismos de espacios vectoriales; estas nociones serán utilizadas en todo lo que sigue sin más explicación.

Subespacio vectorial engendrado

Si $(a_i)_{i \in I}$ es una familia de elementos de un espacio vectorial E , la intersección de los subespacios de E que contienen a cada uno de los a_i ($i \in I$) es un subespacio

de E , denominado **subespacio engendrado por la familia** $(a_i)_{i \in I}$. Lo designaremos por $\text{Vect}((a_i)_{i \in I})$: Este subespacio es también igual al conjunto de todas las combinaciones lineales $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$, donde $(\lambda_i)_{i \in I}$ es una familia arbitraria de escalares casi todos nulos (véase tomo 1, p. 130).

Dimensión de un subespacio

Sea E un espacio vectorial: todo subespacio de dimensión 1 de E recibe el nombre de *recta vectorial* (de E), mientras que todo subespacio de dimensión 2 recibe el nombre de *plano vectorial*.

Si F y G son dos subespacios de dimensión finita de E , entonces $F + G$ y $F \cap G$ son también de dimensión finita y se tiene la relación

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$$

(véase tomo 1, p. 286).

Si E es de dimensión finita, todo subespacio F de E es también de dimensión finita, y se tiene: $\dim(F) \leq \dim(E)$, teniendo lugar la igualdad si, y solamente si, $F = E$.

Codimensión, hiperplanos

Sea F un subespacio de un espacio vectorial E ; por definición, la **codimensión** de F (con relación a E) es la dimensión del espacio cociente E/F ; se designa por $\text{codim}(F)$ (siendo fijo el espacio E).

El símbolo $\text{codim}(F)$ representa pues un entero natural n si, y solamente si, E/F es de dimensión finita n ; de lo contrario, se conviene en decir que la codimensión de F es *infinita*.

Si E es de dimensión finita, entonces E/F es de dimensión finita, y se tiene:

$$\dim(F) + \text{codim}(F) = \dim(E)$$

(véase tomo 1, teorema VIII.3.10).

Hiperplanos

Si E es un espacio vectorial cualquiera, recibe el nombre de **hiperplano vectorial de E** todo subespacio vectorial de codimensión 1 de E : Si E es de dimensión finita n , nos encontramos de nuevo con la definición VIII.5.4 del tomo 1; se tiene ⁽¹⁾:

⁽¹⁾ Este teorema ha sido establecido en el tomo 1, p. 304 en el caso en que E es de dimensión finita.

Teorema I.1.1

|| Si E es un espacio vectorial cualquiera, los hiperplanos vectoriales de E son los **núcleos de las formas lineales** de E , no nulos.

Demostración

a) Sea f una forma lineal no nula sobre E ; entonces $H = \text{Ker}(f)$ es un subespacio de E , distinto de E , y se tiene: $\text{Im}(f) = K$, designando por K el cuerpo base. Según el teorema VIII.1.2 del tomo 1 (teorema de la descomposición canónica) existe un isomorfismo \bar{f} de E/H sobre K , de donde $\dim(E/H) = 1$, y H es un hiperplano vectorial de E .

b) Recíprocamente, sea H un hiperplano de E ; por definición existe un isomorfismo j de E/H sobre el cuerpo base K . Designando por $p: E \rightarrow E/H$ la proyección canónica, la aplicación $f = j \circ p: E \rightarrow K$ es una forma lineal no nula sobre E , cuyo núcleo es H , lo cual demuestra el resultado. ||

De aquí se deduce:

I.1.2 Si H es un hiperplano de E , entonces, para cada $a \in E \setminus H$ se tiene:

$$|| \quad E = \text{Vect}(H \cup \{a\}).$$

Demostración. Sea f una forma lineal sobre E tal que $H = \text{Ker}(f)$. Por hipótesis se tiene $f(a) \neq 0$. Para cada $x \in E$, el vector

$$y = x - \frac{f(x)}{f(a)} a$$

verifica $f(y) = 0$, de donde $y \in H$ y la descomposición $x = y + \lambda a$, con $\lambda = f(x)/f(a)$. ||

La proposición I.1.2 lleva consigo que todo subespacio F de E , distinto de E y que verifique $F \supset H$ es igual a H ; dicho de otro modo, los hiperplanos de E son los subespacios propios **maximales** de E .

Finalmente, la proposición que sigue hace ver que las formas lineales que admiten como núcleo a un mismo hiperplano H son todas **proporcionales**.

I.1.3 Si f, g son dos formas lineales sobre E que admiten un mismo núcleo, existe || un escalar no nulo λ tal que $g = \lambda f$.

Demostración. Si f es la forma nula, g es nula y el resultado será evidente. En caso contrario, sea $a \in E$ tal que $f(a) \neq 0$, de donde $g(a) \neq 0$. Pongamos $\lambda = g(a)/f(a)$.

Entonces el núcleo de la forma $g - \lambda f$ es un subespacio F de E que contiene a a y $H = \text{Ker}(f)$. Al aplicar I.1.2 se tiene $F = E$, de donde $g = \lambda f$.]

Subespacios suplementarios

Dos subespacios F y G de un espacio vectorial E se dice que son **suplementarios** cuando cumplen las condiciones siguientes:

$$F + G = E \quad \text{y} \quad F \cap G = \{0\}.$$

A tales subespacios se asocian endomorfismos p_F y p_G , definidos de manera única, tales que,

$$\begin{aligned} p_F^2 &= p_F, & p_G^2 &= p_G, & p_F \circ p_G &= p_G \circ p_F = 0 \\ p_F + p_G &= \text{Id}_E \\ \text{Ker}(p_F) &= G, & \text{Im}(p_F) &= F \\ \text{Ker}(p_G) &= F, & \text{Im}(p_G) &= G. \end{aligned}$$

Los endomorfismos p_F y p_G reciben el nombre de **proyectores** asociados a los espacios suplementarios F y G : p_F (resp. p_G) es la **proyección** sobre F paralelamente a G (resp. sobre G paralelamente a F); finalmente $p_F(x)$ y $p_G(x)$ son las componentes de x sobre F y G (véase tomo 1, p. 286).

Sea F un subespacio de E ; se demuestra que F admite *por lo menos* un subespacio G tal que F y G son suplementarios; de un subespacio como el G se dice que es un *suplementario* de F . Existen en general diversos suplementarios de F . La existencia de suplementarios ha sido demostrada en el tomo 1 para los espacios E de *dimensión finita*, con ayuda del teorema VIII.3.1 (llamado de la *base incompleta*). La demostración general hace uso del axioma de elección (véase [4] o ejercicio I.1).

Si G es un suplementario de F , la restricción a G de la proyección canónica $p: E \rightarrow E/F$, es un *isomorfismo* de espacios vectoriales (véase tomo 1, p. 286). Si G es de dimensión finita, se deduce de ello que

$$\dim(G) = \text{codim}(F);$$

en particular, si E es de dimensión finita n , los *hiperplanos* de E son los subespacios de dimensión $n - 1$.

Definición de una aplicación lineal mediante sus restricciones a dos subespacios suplementarios

Sean F y G dos subespacios suplementarios de un espacio vectorial E_1 . Si $f: E_1 \rightarrow E_2$ es una aplicación lineal de E_1 en un espacio vectorial E_2 , se tiene, para todo $x \in F$ y para todo $y \in G$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Se deduce de esto que f queda determinada si se conocen las *restricciones* respectivas f_F y f_G de f a F y G . Recíprocamente, sea $\varphi: F \rightarrow E_2$ y $\psi: G \rightarrow E_2$ aplicaciones lineales; para todo $z \in E_1$, de componentes x e y sobre F y G , pongamos

$$f(z) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Entonces f es una aplicación lineal de E_1 en E_2 , cuyas restricciones a F y G son respectivamente φ y ψ : se dice que f queda *definida mediante* φ y ψ .

Para precisar más, introduzcamos los conjuntos de aplicaciones lineales $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, $\mathcal{L}(F, E_2)$, $\mathcal{L}(G, E_2)$. Se puede resumir el estudio que antecede diciendo que la *aplicación* $f \mapsto (f_F, f_G)$

$$\mathcal{L}(E_1, E_2) \rightarrow \mathcal{L}(F, E_2) \times \mathcal{L}(G, E_2)$$

es *biyectiva*.

Notación para los isomorfismos

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos provistos de estructuras algebraicas *análogas* (véase tomo 1, cap. II). Si $f: E_1 \rightarrow E_2$ es un morfismo *biyectivo*, entonces $f^{-1}: E_2 \rightarrow E_1$ es también un morfismo. En tal caso se dice que f es un *isomorfismo*. Convendremos en traducir este hecho mediante la notación:

$$f: E_1 \xrightarrow{\cong} E_2$$

Este convenio se aplicará en particular a los *grupos*, a los *anillos*, a los *módulos*, a las *álgebras* y a los *espacios vectoriales*.

§ 1.2 PROYECTORES, HOMOTECIAS, DILATACIONES Y TRANSVECCIONES (CASO VECTORIAL)

En este § vamos a estudiar algunos endomorfismos particulares de un espacio vectorial E .

Proyectores

Definición I.2.1

En un espacio vectorial cualquiera E , se da el nombre de **proyector** a todo endomorfismo p de E tal que $p^2 = p$.

Ejemplos

1. La aplicación idéntica Id_E es evidentemente un proyector; se ve inmediatamente que es el único proyector de E que es al mismo tiempo un automorfismo (ya que si p admite un inverso, la relación $p^2 = p$ implica $p = p^{-1} \circ p = \text{Id}_E$).

2. Sean H y L dos subespacios suplementarios de E y sea $p : E \rightarrow E$ la proyección sobre H paralelamente a L : a cada $x \in E$, p asocia el único elemento y de H tal que $x - y \in L$. Es evidente que p es un proyector (puesto que se tiene $p(E) = H$, y $p(x) = x$ para todo $x \in H$). Este proyector tiene a H por imagen y a L como núcleo.

Recíprocamente, se tiene:

I.2.1 Sea p un proyector de E , distinto de la identidad. Entonces la imagen y el núcleo de p son subespacios suplementarios de E , y p es la **proyección** sobre su imagen, paralelamente a su núcleo.

Demostración. Pongamos $H = \text{Im}(p)$ y $L = \text{Ker}(p)$ y veamos en primer lugar que H y L son suplementarios. En efecto:

a) $H \cap L = \{0\}$: ya que si $x \in H \cap L$, se tiene $p(x) = 0$, y existe un $y \in E$ tal que $x = p(y)$. Se tiene pues $x = p(y) = p^2(y) = p(x) = 0$, o sea $x = 0$.

b) $H + L = E$: si $x \in E$ pongamos $y = x - p(x)$. Se tiene

$$p(y) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0,$$

de donde $y \in L$ y $x = y + p(x)$, con $p(x) \in H$.

Las relaciones $x - p(x) \in L$ y $p(x) \in H$ hacen ver entonces que p coincide con la proyección sobre H paralelamente a L .]

Observación. Si E es de dimensión finita se puede demostrar que para cada $u \in \mathcal{L}(E)$, existen $v \in \text{GL}(E)$ y $w \in \text{GL}(E)$ tales que $u \circ v$ y $w \circ u$ son proyectores (véase ejercicio I.12). Dicho de otro modo: todo endomorfismo de E es (de dos maneras distintas) producto de un proyector y de un automorfismo de E .

El álgebra $\mathcal{L}(E)$ queda pues determinada dando $GL(E)$ y el conjunto de los proyectores de E .

Grupo de las homotecias de un espacio vectorial

Sea E un \mathbf{R} -espacio vectorial no nulo. Para cada $\alpha \in \mathbf{R}$, la aplicación $h_\alpha : E \rightarrow E$, $x \mapsto \alpha x$ es un endomorfismo de E que se denomina **homotecia vectorial de razón α** . La aplicación $\alpha \mapsto h_\alpha$, de \mathbf{R} en $\mathcal{L}(E)$, es un homomorfismo inyectivo de \mathbf{R} -álgebras; la imagen, mediante este homomorfismo, del grupo multiplicativo \mathbf{R}^* , es pues un subgrupo de $GL(E)$, denominado **grupo de las homotecias** de E , al cual designaremos nosotros por $H(E)$: este grupo está constituido por las homotecias de *razón no nula*; es isomorfo a \mathbf{R}^* .

Se tiene $H(E) = GL(E)$ si (y solamente si) $\dim(E) = 1$.

Según la definición de aplicaciones lineales, toda homotecia h de E verifica:

$$(\forall u \in \mathcal{L}(E)) : \quad u \circ h = h \circ u.$$

Resulta de ello que el grupo $H(E)$ está contenido en el *centro* de $GL(E)$ (véase tomo 1, p. 76); se trata pues de un *subgrupo distinguido* de $GL(E)$.

De hecho se tiene el resultado más preciso que sigue:

1.2.2 *El subgrupo $H(E)$ de las homotecias de un espacio vectorial no nulo E es el centro de $GL(E)$.*

Demostración. Se trata de demostrar que todo elemento h de $GL(E)$ que verifique

$$(\forall u \in GL(E)) \quad u \circ h = h \circ u$$

es una homotecia.

a) Demostremos en primer lugar que toda recta vectorial Δ de E es *estable* por h . De lo contrario existiría un elemento a de Δ ($a \neq 0$) tal que $b = h(a)$ no pertenecería a Δ , y por lo tanto tal que los vectores a y b serían independientes. Pongamos $F = \text{Vect}(a, b)$ y designemos por G un suplementario cualquiera de F (véase § 1). Sea u el endomorfismo de E cuya restricción a E es la identidad y cuya restricción a F queda definida mediante $u(a) = a$ y $u(b) = a + b$. Al ser los vectores a y $a + b$ independientes, u sería un *automorfismo* de E que verificaría:

$$h \circ u(a) = h(a) = b \quad \text{y} \quad u \circ h(a) = u(b) = a + b$$

lo cual estaría en contradicción con la hipótesis $u \circ h = h \circ u$.

b) Según a) la restricción de h a toda recta vectorial es una *homotecia*. Se deduce de ello fácilmente que h es una homotecia; ya que si a, b son dos vectores independientes cualesquiera, existen $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}^*$ tales que $u(a) = \lambda a$, $u(b) = \mu b$ y

$$u(a + b) = \nu(a + b) = \lambda a + \mu b,$$

de donde se deduce $\lambda = \nu = \mu$.]

Observación. El grupo cociente $GL(E)/H(E)$ desempeña un papel esencial en Geometría algebraica. Se le da el nombre de *grupo proyectivo* de E y se le designa por $PGL(E)$.

Dilataciones vectoriales

Definición 1.2.2

En un \mathbf{R} -espacio vectorial E sea L un hiperplano, D una recta suplementaria de L (es decir no contenida en L) y λ un real no nulo. La **dilatación** de razón λ , de hiperplano L y de eje D es el automorfismo δ de E que se reduce a la identidad sobre L y a la homotecia de razón λ sobre D .

Con estas notaciones sea p la proyección sobre L paralelamente a D , y sea $q = \text{Id}_E - p$. Si $x \in E$, se tiene:

$$x = p(x) + q(x),$$

donde $p(x) \in L$ y $q(x) \in D$, de donde, por definición de δ :

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta[p(x)] + \delta[q(x)] = p(x) + \lambda q(x) \\ &= \lambda \text{Id}_E(x) + (1 - \lambda) p(x),\end{aligned}$$

o sea

$$\boxed{\delta = p + \lambda q = \lambda \text{Id}_E + (1 - \lambda) p}.$$

Para que $\delta = \text{Id}_E$, es necesario y suficiente que sea $\lambda = 1$.

Si $\lambda = -1$, se dice que δ es la **simetría vectorial** de dirección D con relación a L . Supongamos ahora que E es de *dimensión finita* n , y elijamos una base (e_1, \dots, e_n)

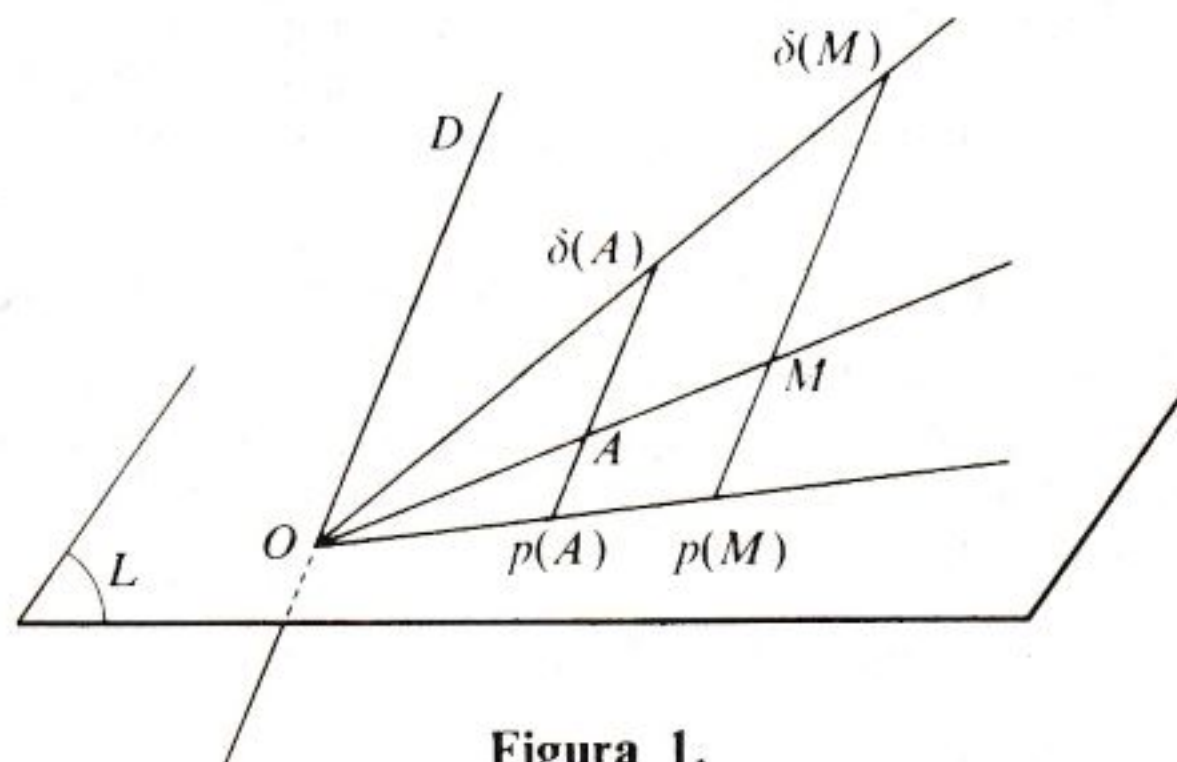


Figura 1.

de E tal que (e_1, \dots, e_{n-1}) sea una base de L y e_n un vector director de D . Con esta base, la matriz δ es evidentemente:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Observaremos que se tiene entonces $\det(\delta) = \lambda$.

Transvecciones vectoriales

Nos situamos aquí en el espacio vectorial E de dimensión (finita o infinita) igual por lo menos a 2.

Definición I.2.3

Sea L un hiperplano de E . Se da el nombre de **transvección de hiperplano L** a todo automorfismo de E de la forma

$$(1) \quad \tau : x \mapsto x + \varphi(x) a$$

donde φ es una forma lineal de núcleo L y donde a es un elemento dado no nulo de L .

Con estas notaciones se ve que todo $x \in L$ es un punto fijo de τ .

Según (1), se tiene, para todo $x \in E$: $\tau(x) - x \in L$. Vamos a ver que esta propiedad permite caracterizar las transvecciones de hiperplano L entre los automorfismos de E que dejan fijo a todo elemento de L .

I.2.3 Sea L un hiperplano de E y τ un automorfismo de E distinto de la identidad que verifique:

$$\begin{array}{l} (\forall x \in L) \quad \tau(x) = x \\ y \quad (\forall x \in E) \quad \tau(x) - x \in L. \end{array}$$

Entonces τ es una **transvección de hiperplano L** .

Demostración. Al ser $\tau \neq \text{Id}_E$, existe un $v \in E \setminus L$ tal que $\tau(v) \neq v$. Entonces $a = \tau(v) - v$ es un elemento no nulo de L .

Sea q la proyección paralelamente a L sobre la recta $D = \text{Vect}(v)$. Definiremos una forma lineal φ sobre E poniendo:

$$(\forall x \in E) \quad q(x) = \varphi(x) v.$$

Esta forma φ admite a L como núcleo y verifica $\varphi(v) = 1$. Todo $x \in E$ se descompone de manera única en $x = y + \varphi(x) v$ con $y \in L$. De esto se deduce:

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \tau(y) + \varphi(x) \tau(v) = y + \varphi(x) (v + a) \\ &= y + \varphi(x) v + \varphi(x) a, \end{aligned}$$

o sea:

$$\tau(x) = x + \varphi(x) a,$$

lo cual hace ver claramente que τ es una transvección de hiperplano L .]

El estudio geométrico completo de las transvecciones sólo tiene interés en relación con la *estructura afín* de E (véase § 10).

Supongamos ahora que E es de dimensión finita n ($n \geq 2$) (con las notaciones anteriores), elijamos una base (e_1, \dots, e_n) de E tal que $e_1 \notin L$, $e_2 = a$, $e_3 \in L, \dots, e_n \in L$. Si se pone $\lambda = \varphi(e_1)$, la matriz T de τ en esta base es

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

De donde se deduce: $\det(\tau) = 1$.

De un modo general, fijemos dos índices k, l tales que $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq n$, y $k \neq l$; sea $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ una matriz que verifique $a_{ij} = 0$, para $(i, j) \neq (k, l)$ con $i \neq j$ y $a_{ii} = 1$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), siendo el término a_{kl} cualquiera no nulo. A representa entonces, en una base cualquiera, una transvección (la cual depende de la base elegida).

Grupo especial lineal

- Supondremos a partir de este punto que el espacio vectorial considerado E es de dimensión finita $n \geq 1$.

Los elementos u de $GL(E)$ están *caracterizados* por las relaciones: $u \in \mathcal{L}(E)$ y $\det(u) \neq 0$ (véase tomo 1, cap. X).

Puesto que se tiene: $\det(v \circ u) = \det(v) \cdot \det(u)$ para todos los $u, v \in \mathcal{L}(E)$, se ve que la aplicación

$$\det : GL(E) \rightarrow \mathbf{R}^*, \quad u \mapsto \det(u)$$

es un homomorfismo de grupos.

A este homomorfismo lo llamaremos *homomorfismo determinante*.

Definición I.2.4

*Se da el nombre de grupo **especial lineal** de E y se le designa por $SL(E)$, al **núcleo** del homomorfismo determinante. Dicho de otro modo, $SL(E)$ es el conjunto de los automorfismos de E cuyo determinante es igual a 1.*

Por ser $SL(E)$ un núcleo de homomorfismo, es un subgrupo distinguido de $GL(E)$. La naturaleza del grupo cociente $GL(E)/SL(E)$ queda determinada por el resultado siguiente:

I.2.4 *El homomorfismo determinante es **suprayectivo**, y en consecuencia, induce un **isomorfismo natural** de grupos:*

$$GL(E)/SL(E) \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^*.$$

Demostración. Sea D una recta vectorial de E y L un hiperplano suplementario de E . Sea δ la dilatación de hiperplano L , de eje D y de razón $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Según el estudio hecho en la página 9 se tiene: $\det(\delta) = \lambda$. Por lo tanto todo $\lambda \in \mathbf{R}^*$ es el determinante de un automorfismo, por lo menos. \square

Si $n \geq 2$, observemos que *toda transvección de E es elemento de $SL(E)$* . Se puede demostrar incluso que *el conjunto de las transvecciones es una parte generatriz de $SL(E)$* (véase el ejercicio I.14). Este resultado es fundamental en el estudio de los grupos clásicos.

Con vistas a los ejercicios del tomo 4, vamos a dar ahora algunos complementos de Geometría lineal, no indispensables para lo que va a seguir.

Grupo de los automorfismos que dejan fijos todos los puntos de un hiperplano.

En lo que sigue designamos por E un espacio vectorial de dimensión finita ≥ 2 .

Fijemos un hiperplano L de E y designemos por G_L al subgrupo de $GL(E)$ formado por los automorfismos que dejan fijos todos los puntos de L .

La restricción a G_L del homomorfismo determinante, o sea $G_L \rightarrow \mathbf{R}^*$, $u \mapsto \det(u)$, es un homomorfismo de grupos *suprayectivo* (ya que toda dilatación de hiperplano L y de razón λ pertenece a G_L y su determinante es igual a λ). El teorema que sigue, que clasifica a los elementos de G_L , caracteriza al núcleo de este isomorfismo.

I.2.5 Con las notaciones anteriores, sea L un hiperplano de E y sea u un elemento del grupo G_L distinto de Id_E . Entonces:

- || a) Si $\det(u) \neq 1$, u es una **dilatación** de hiperplano L .
 || b) Si $\det(u) = 1$, u es una **transvección** de hiperplano L .

Demostración. Sea $v \in E \setminus L$ fijo: Para todo $x \in E$, existe un $y \in L$ y un $\varphi(x) \in \mathbf{R}$ definidos de manera única, y tales que

$$(2) \quad x = y + \varphi(x) v;$$

φ es una forma lineal de núcleo L , tal que $\varphi(v) = 1$. Se tiene en particular $u(v) = w + \lambda v$, con $\lambda = \varphi[u(v)]$ y $w \in L$. Se deduce de (2):

$$u(x) = y + \varphi(x) (w + \lambda v),$$

o sea:

$$(3) \quad u(x) = x + \varphi(x) [(\lambda - 1) v + w].$$

En una base (e_1, \dots, e_n) tal que $e_1 = v$ y $e_i \in L$ para $i \geq 2$, la matriz U de u es de la forma:

$$U = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \times & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \times & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

se tiene pues: $\det(u) = \lambda$.

● Si $\lambda = 1$, (3) se reduce a $u(x) = x + \varphi(x) w$; w es no nulo, ya que $u \neq \text{Id}_E$. Al ser $w \in L$ se ve que u es una transvección de hiperplano L .

● Si $\lambda \neq 1$, el vector $h = (\lambda - 1) v + w$ no pertenece a L , y al hacer $x = h$ en (3) se ve que h verifica $u(h) = \lambda h$. Por lo tanto u es la dilatación de razón λ , de hiperplano L y de eje $D = \text{Vect}(h)$.]

De I.2.5, se deduce que el núcleo \mathcal{T}_L del homomorfismo

$$\det : G_L \rightarrow \mathbf{R}^*$$

está formado por Id_E y por el conjunto de las transvecciones de hiperplano L . Por lo tanto, \mathcal{T}_L es un subgrupo distinguido de G_L y se tiene un isomorfismo natural:

$$G_L / \mathcal{T}_L \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^*,$$

inducido por la aplicación \det .

Aplicación

Sea $\tau \in \mathcal{F}_L$ y sea $\delta_1 \in GL \setminus \mathcal{F}_L$ una dilatación de razón λ_1 . Según I.1.5, el automorfismo $\delta_2 = \tau \circ (\delta_1)^{-1}$ es una dilatación de razón $(\lambda_1)^{-1} \neq 1$ (ya que $\lambda_1 \neq 1$, de donde también $(\lambda_1)^{-1} \neq 1$). La relación $\tau = \delta_2 \delta_1$ hace ver que toda transvección es, por lo menos de una manera, producto de dos dilataciones. Ahora bien, hemos señalado antes que $SL(E)$ está engendrado por el conjunto de las transvecciones. Sea entonces un $u \in GL(E)$, de determinante λ . Designando por δ una dilatación arbitraria de razón λ , se ve que $v = u\delta^{-1} \in SL(E)$. Así pues v es un producto de transvecciones τ_i y $u = v\delta$. Ahora bien, según lo que acabamos de ver, todo τ_i es un producto de dos dilataciones. Resulta pues que u es, en definitiva, un producto de dilataciones, de donde:

I.2.6 El grupo $GL(E)$ es engendrado por el conjunto de dilataciones.

De este resultado se hará uso en el tomo 4, para el estudio del cambio de variables en las integrales múltiples ⁽¹⁾.

§ I.3 ESPACIOS AFINES

Definición I.3.1 (Repaso)

Sea E un \mathbf{R} -espacio vectorial cualquiera, de dimensión finita o infinita. Se da el nombre de **espacio afín ligado a E** (o: **sobre E**) a todo conjunto no vacío \mathcal{E} provisto de una ley externa de dominio E (designada por $(t, x) \mapsto t + x$ ó $(t, x) \mapsto x + t$, $t \in E$, $x \in \mathcal{E}$) que verifique los axiomas siguientes:

$$(A_1) \begin{cases} (\forall t, t' \in E), (\forall x \in \mathcal{E}) & (t + t') + x = t + (t' + x) \\ (\forall x \in \mathcal{E}) & 0 + x = x. \end{cases}$$

(A₂) para todos los $x, y \in \mathcal{E}$, existe $t \in E$ tal que $y = t + x$.

(A₃) Si $t \in E$ verifica $(\forall x \in \mathcal{E}) t + x = x$, se tiene $t = 0$.

Si \mathcal{E} es un espacio afín sobre E , se dice que E es el espacio vectorial **asociado** a \mathcal{E} (o, el espacio vectorial **director** de \mathcal{E}). Si E es de dimensión finita n , se dice que \mathcal{E} es de *dimensión finita n* (en caso contrario, se dice que \mathcal{E} es de *dimensión infinita*). Para $n = 1$, se dice que E es una *recta afín*; para $n = 2$ es un *plano afín*.

Para todo $t \in E$ designemos por τ_t la aplicación de \mathcal{E} en \mathcal{E} definida por $\tau_t(x) = t + x$ ($x \in \mathcal{E}$); esta aplicación recibe el nombre de **traslación de vector t** . Por el axioma (A₁) se tiene:

⁽¹⁾ Si en vez de \mathbf{R} se considera un cuerpo conmutativo cualquiera K , el resultado I.1.6 y los razonamientos que anteceden siguen siendo válidos siempre que K tenga por lo menos 3 elementos, es decir, siempre que $K \neq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

$$(1) \quad (\forall t \in E), (\forall u \in E) \quad \tau_t \circ \tau_u = \tau_u \circ \tau_t = \tau_{t+u} \quad \text{y} \quad \tau_0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}.$$

De aquí se deduce:

$$(\forall t \in E), \quad \tau_t \circ \tau_{-t} = \tau_{-t} \circ \tau_t = \text{Id}_{\mathcal{E}}.$$

Así pues toda traslación τ_t es una *biyección* de \mathcal{E} sobre \mathcal{E} , cuya recíproca es la traslación τ_{-t} .

Sea $\mathfrak{S}_{\mathcal{E}}$ el grupo de las biyecciones de \mathcal{E} sobre \mathcal{E} . La relación (1) hace ver que la aplicación

$$(2) \quad E \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{E}}, \quad t \mapsto \tau_t$$

es un *homomorfismo de grupo aditivo* E en el grupo $\mathfrak{S}_{\mathcal{E}}$.

Por el axioma (A_3) se ve entonces que *este homomorfismo es inyectivo*: su imagen es por lo tanto un subgrupo $T(\mathcal{E})$ de $\mathfrak{S}_{\mathcal{E}}$, isomorfo al grupo aditivo E ; este grupo $T(\mathcal{E})$ recibe el nombre de **grupo de las traslaciones del espacio afín \mathcal{E}** . El homomorfismo (2) permite identificar el grupo $T(\mathcal{E})$ con el grupo aditivo E , salvo que exista peligro de confusión.

Observación. El lector podrá comprobar fácilmente que los axiomas (A_1) , (A_2) y (A_3) tomados conjuntamente equivalen al axioma único que sigue:

El grupo aditivo de E opera fiel y transitivamente sobre el conjunto \mathcal{E} (véase tomo 1, p. 84).

Veamos la consecuencia esencial de (A_2) :

I.3.1 Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre E ; para todo $x \in \mathcal{E}$, la aplicación $\zeta_x : E \rightarrow \mathcal{E}$,
 $\parallel t \mapsto t + x$ es una biyección.

Demostración. Según (A_2) , la aplicación ζ_x es suprayectiva. Vamos a demostrar que es también inyectiva; suponiendo $\zeta_x(t') = \zeta_x(t'')$, se tiene:

$$t' + x = t'' + x, \quad \text{de donde} \quad (t' - t'') + x = x.$$

Poniendo $t = t' - t''$, se tiene: $t + x = x$ y queda por demostrar que es $t = 0$. Ahora bien, sea $y \in \mathcal{E}$: según (A_2) , existe un elemento $u \in E$ tal que $y = u + x$. De donde se deduce

$$\begin{aligned} t + y &= t + (u + x) = (t + u) + x = (u + t) + x \\ &= u + (t + x) = u + x = y. \end{aligned}$$

Queda así demostrado que se tiene: $t + y = y$ para todo $y \in \mathcal{E}$. Según (A_3) , esto implica $t = 0$.]

Producto de espacios afines

Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ dos espacios afines ligados respectivamente a los espacios vectoriales E_1, E_2 . Para todo elemento $t = (t_1, t_2)$ de $E_1 \times E_2$ y para todo elemento $x = (x_1, x_2)$ de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, pongamos:

$$(4) \quad t + x = (t_1 + x_1, t_2 + x_2).$$

Se comprueba fácilmente que la operación $(t, x) \mapsto t + x$ define sobre el conjunto $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, una estructura de espacio afín ligada al espacio vectorial producto $E_1 \times E_2$.

Definición I.3.3

*Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ dos espacios afines respectivamente ligados a los espacios vectoriales E_1, E_2 . Se da el nombre de **espacio afín producto** de \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , y se le designa por $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, al espacio afín que se obtiene al dotar al conjunto $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ de la ley externa definida por (4) (esta ley tiene por dominio el grupo aditivo que subyace al espacio vectorial producto $E = E_1 \times E_2$).*

Es evidente que esta definición se puede extender al caso de un número finito de espacios afines $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_p$ ligados respectivamente a los espacios vectoriales E_1, E_2, \dots, E_p . El espacio afín producto $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_p$ está ligado al espacio vectorial producto $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$.

Se observará que la estructura afín natural de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ coincide con el producto de las estructuras afines naturales de los espacios vectoriales E_i .

Sistemas de referencia, coordenadas

Sea \mathcal{E} un espacio afín de dimensión finita n sobre el espacio vectorial E . Se da el nombre de **sistema de referencia** (ordenado) de \mathcal{E} a todo elemento $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de $\mathcal{E} \times E^n$ tal que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sea una **base** de E . El punto O (que pertenece a \mathcal{E}) recibe el nombre de **origen** del sistema de referencia \mathcal{R} ; los vectores $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ se dice que son los **vectores de base** del sistema de referencia.

Las **coordenadas** de un punto M de \mathcal{E} en el sistema de referencia \mathcal{R} son los números x_1, \dots, x_n definidos por $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ (componentes del vector \overrightarrow{OM} en la base (\vec{e}_i) de E).

Se observará que la introducción de un sistema tal de referencia de \mathcal{E} permite identificar \mathcal{E} a \mathbf{R}^n ; en efecto, la aplicación:

$$\mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{E}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto O + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

es una biyección.
Estableceremos:

Definición I.3.4

Sea \mathcal{R} un sistema de referencia del espacio afín \mathcal{E} (donde $\dim(\mathcal{E}) = n$) y sea f una función numérica definida sobre una parte A de \mathbf{R}^n . El conjunto de los puntos M de \mathcal{E} cuyas coordenadas en \mathcal{R} verifican $(x_1, \dots, x_n) \in A$ y $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ recibe el nombre de **conjunto de ecuación cartesiana** $f = 0$.

I.4 APLICACIONES AFINES. GRUPO AFÍN

Definición I.4.1

Sean \mathcal{E} y \mathcal{F} dos espacios afines, de espacios directores respectivos E y F . Una aplicación $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ se dice que es **afín** si existen $f \in \mathcal{L}(E, F)$ y $a \in \mathcal{E}$ tales que

$$(1) \quad (\forall t \in E) \quad \varphi(t + a) = f(t) + \varphi(a).$$

En particular, toda aplicación *lineal* de E en F es una aplicación afín del espacio afín E en el espacio afín F . Mantengamos las notaciones de esta definición y sea x otro elemento de \mathcal{E} . Poniendo $u = \overrightarrow{ax}$, se tiene entonces, para todo $t \in E$:

$$\begin{aligned} \varphi(t + x) &= \varphi[t + (u + a)] = \varphi[(t + u) + a] \\ &= f(t + u) + \varphi(a) = f(t) + f(u) + \varphi(a). \end{aligned}$$

En particular:

$$\varphi(x) = \varphi(u + a) = f(u) + \varphi(a).$$

De donde se deduce

$$(2) \quad \varphi(t + x) = f(t) + \varphi(x).$$

Por lo tanto, si se cumple la relación (1) para un punto a de \mathcal{E} , se cumple para todo punto x de \mathcal{E} .

Por otra parte, si $a \in \mathcal{E}$ es fijo, y se ha dado la aplicación afín φ , la relación (1) define f de manera única (ya que la aplicación $t \mapsto t + a$ es una biyección de E sobre \mathcal{E}). En resumen:

I.4.1 Sean \mathcal{E}, \mathcal{F} dos espacios afines respectivamente ligados a los espacios vectoriales E, F . Para toda aplicación afín $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, existe una **aplicación lineal única** $f : E \rightarrow F$ tal que se tiene

$$(3) \quad (\forall t \in E) (\forall x \in \mathcal{E}) \quad \varphi(t + x) = f(t) + \varphi(x).$$

Este resultado permite establecer:

Definición I.4.2

§ La aplicación f definida en I.4.1 recibe el nombre de **aplicación lineal asociada** a φ , o también la **parte lineal** de φ . La designaremos por $L(\varphi)$.

Ejemplo

Las *traslaciones* de \mathcal{E} son aplicaciones afines de \mathcal{E} en \mathcal{E} cuya parte lineal es la aplicación idéntica de E . Veremos más adelante que estas son las únicas aplicaciones afines φ que verifican $L(\varphi) = \text{Id}_E$.

Veamos algunas propiedades fáciles de las aplicaciones afines:

I.4.2 Sean $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ tres espacios afines respectivamente ligados a los espacios vectoriales E, F, G . Si $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ y $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ son aplicaciones afines, entonces su **compuesta** $\psi \circ \varphi$ es una aplicación afín.

Demostración. Sean f y g las partes lineales respectivas de φ y ψ . Para todo $x \in \mathcal{E}$ y todo $t \in E$, se tiene por una doble aplicación de (3):

$$(\psi \circ \varphi)(t + x) = \psi[f(t) + \varphi(x)] = (g \circ f)(t) + (\psi \circ \varphi)(x).$$

Se ve por lo tanto que $\psi \circ \varphi$ es una aplicación afín y que su parte lineal es $g \circ f$.

I.4.3 Sea $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación afín, estando los espacios afines \mathcal{E}, \mathcal{F} ligados respectivamente a los espacios vectoriales E, F . Sea $f : E \rightarrow F$ la parte lineal de φ .

Para que φ sea **inyectiva** (resp. **suprayectiva**), es necesario y suficiente que f sea **inyectiva** (resp. **suprayectiva**).
 En particular, para que φ sea **biyectiva**, es necesario y suficiente que f sea **biyectiva**.

Demostración. Fijemos un punto a de \mathcal{E} y pongamos $b = \varphi(a)$. Para todo $t \in \mathcal{E}$, se tiene:

$$\varphi(t + a) = f(t) + b.$$

La proposición resulta entonces del hecho de que la aplicación $t \mapsto t + a$ es una biyección de E sobre \mathcal{E} y de que la aplicación $u \mapsto u + b$ es una biyección de F sobre \mathcal{F} .]

Observemos que el conjunto de las aplicaciones afines de \mathcal{E} en \mathcal{F} puede ser fácilmente dotado de una estructura afín natural (véase ejercicio I.24).

Una aplicación afín biyectiva es por definición un **isomorfismo de espacios afines**; su inversa es evidentemente afín.

Si $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ es un isomorfismo, los espacios afines \mathcal{E} , \mathcal{F} son o bien los dos de dimensión infinita, o bien de dimensiones *finitas e iguales*.

En particular, si \mathcal{E} es un espacio afín de dimensión $n \geq 1$ y si $(\Omega; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ es un sistema de referencia de \mathcal{E} , la biyección:

$$\mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{E}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \Omega + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

es un *isomorfismo* de espacios afines (estando provisto el espacio vectorial \mathbf{R}^n de la estructura afín natural).

Si \mathcal{E} es de dimensión finita y si $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ es una aplicación afín cualquiera, el rango de la parte lineal de φ recibe el nombre de **rango** de φ .

Grupo afín

Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre E . Según lo que antecede, el conjunto de las *aplicaciones afines biyectivas* de \mathcal{E} sobre \mathcal{E} constituye un subgrupo del grupo de las biyecciones de \mathcal{E} sobre \mathcal{E} . Este grupo recibe el nombre de **grupo afín** de \mathcal{E} . Lo designaremos por $\text{GA}(\mathcal{E})$.

En la demostración de I.4.2, hemos visto que, si f y g son respectivamente las partes lineales de las biyecciones afines φ y ψ , entonces la parte lineal de $\psi \circ \varphi$ es $g \circ f$. Además, f y g son elementos de $\text{GL}(E)$, ya que φ y ψ son biyectivas. Esto significa que la aplicación

$$L : \text{GA}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{GL}(E)$$

que, a toda $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$, asocia su *parte lineal*, es un *homomorfismo de grupos*.

Busquemos la imagen y el núcleo de L :

a) Veamos en primer lugar que L es *suprayectiva*. Para ello basta construir una aplicación afín $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ cuya parte lineal sea un elemento dado f de $\text{GL}(E)$. Se obtiene una tal aplicación φ fijando de manera arbitraria dos puntos a, b de \mathcal{E} y poniendo:

$$(\forall t \in E) \quad \varphi(t + a) = f(t) + b$$

(ya que la aplicación $t + a$ es una biyección de E sobre \mathcal{E}).

b) El *núcleo* de L es el conjunto de las aplicaciones afines φ cuya parte lineal es $I = \text{Id}_E$ (aplicación idéntica de E). Ahora bien, una tal aplicación φ verifica:

$$(4) \quad (\forall t \in E), \quad (\forall x \in \mathcal{E}) \quad \varphi(t + x) = I(t) + \varphi(x) = t + \varphi(x).$$

Fijemos x y pongamos: $u = \overrightarrow{x\varphi(x)}$, $y = t + x$; la relación (3) se escribe:

$$\varphi(y) = t + \varphi(x) = t + (u + x) = u + (t + x) = u + y.$$

Dicho de otro modo, φ es la *traslación* τ_u de vector u . Recíprocamente, toda traslación de \mathcal{E} es una biyección afín de parte lineal I . En resumen, se puede dar el siguiente enunciado:

I.4.4 || Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre E ; a todo elemento φ del grupo afín $\text{GA}(\mathcal{E})$, asociemos su **parte lineal** $L(\varphi)$ (que pertenece a $\text{GL}(E)$). Entonces $L : \text{GA}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{GL}(E)$ es un **homomorfismo suprayectivo de grupos**, cuyo **núcleo** es el grupo $T(\mathcal{E})$ de las traslaciones de \mathcal{E} .

En consecuencia se ve que $T(\mathcal{E})$ es un *subgrupo distinguido* de $\text{GA}(\mathcal{E})$ (ya que es un núcleo de homomorfismo) y que se tiene un isomorfismo canónico, deducido de L :

$$\text{GA}(\mathcal{E})/T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} \text{GL}(E).$$

Con más generalidad, la imagen recíproca, por L , de todo subgrupo H de $\text{GL}(E)$, es un subgrupo \mathcal{H} de $\text{GA}(\mathcal{E})$ que contiene a $T(\mathcal{E})$. Si H es distinguido en $\text{GL}(E)$, \mathcal{H} es distinguido en $\text{GA}(\mathcal{E})$. Este resultado se utiliza con frecuencia para demostrar que un subgrupo de $\text{GA}(\mathcal{E})$ es distinguido. De estas consideraciones vamos a dar dos aplicaciones importantes:

1. Grupo de las homotecias y traslaciones.

Supongamos $\dim(E) \geq 1$, y sea H el grupo de las homotecias vectoriales biyectivas de E (véase § 1). Hemos visto antes que H es un subgrupo distinguido de

$GL(E)$. Por lo tanto el grupo $\mathcal{H} = L^{-1}(H)$ es un subgrupo distinguido de $GA(\mathcal{E})$. El grupo \mathcal{H} recibe el nombre de grupo de las *homotecias y traslaciones de \mathcal{E}* , o también, grupo de las *dilataciones homogéneas de \mathcal{E}* . Veremos más adelante que \mathcal{H} es la *reunión* del grupo $T(\mathcal{E})$ y del conjunto ⁽¹⁾ de las homotecias de \mathcal{E} (véase § I.10).

2. Determinante. Grupo especial afín.

Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre E , siendo el espacio E de dimensión finita $n \geq 1$.

Se da el nombre de *determinante* de una aplicación afín $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, al determinante de su parte lineal.

Según I.4.2, para que se tenga: $\varphi \in GA(\mathcal{E})$, es necesario y suficiente que el determinante de φ sea $\neq 0$.

Designemos por $Det : GA(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{R}^*$ a la aplicación que, a toda biyección afín de \mathcal{E} asocia su determinante; se tiene:

$$Det = (det) \circ L, \text{ por lo que } det : GL(E) \rightarrow \mathbf{R}^*$$

es el *homomorfismo determinante* (véase § 1).

Así pues, (Det) es un *homomorfismo suprayectivo de grupos* (puesto que ocurre lo mismo con (det) y con L).

El *núcleo* de (Det) recibe el nombre de **grupo especial afín**; lo designaremos por $SA(\mathcal{E})$.

$SA(\mathcal{E})$ es un subgrupo distinguido de $GA(\mathcal{E})$ y se tiene un isomorfismo canónico, inducido por el homomorfismo Det :

$$GA(\mathcal{E})/SA(\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^*.$$

Es claro que $SA(\mathcal{E})$ es la imagen recíproca por L del grupo especial lineal $SL(E)$ (véase § 1).

§ I.5 ESTRUCTURAS VECTORIALES SOBRE UN ESPACIO AFÍN

Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre el espacio vectorial E ; recordemos que para todo punto $a \in \mathcal{E}$, la aplicación

$$\zeta_a : E \rightarrow \mathcal{E}, \quad t \mapsto t + a$$

⁽¹⁾ Téngase en cuenta que el conjunto de las homotecias de \mathcal{E} no es subgrupo de $GA(\mathcal{E})$.

es una *biyección*. Por definición, la estructura de espacio vectorial obtenida sobre \mathcal{E} al *transportar* la de E por medio de ζ_a recibe el nombre de **estructura vectorial de origen a** : la designaremos por \mathcal{E}_a .

El elemento neutro de \mathcal{E}_a es evidentemente a . El resultado que sigue hace ver que todas las estructuras \mathcal{E}_a son isomorfas.

I.5.1 || Sean a, b dos puntos del espacio afín \mathcal{E} y sea τ la traslación de vector \overrightarrow{ab} .
Entonces τ es un **isomorfismo** de \mathcal{E}_a sobre \mathcal{E}_b .

Demostración. Sabemos que τ es biyectiva. Demostremos que es un isomorfismo de grupos aditivos. Sean $x, y \in \mathcal{E}$, pongamos $u = \overrightarrow{ax}$, $v = \overrightarrow{ay}$; la suma de x e y en \mathcal{E}_a es $z = u + v + a$; de donde

$$\tau(z) = (\overrightarrow{ab} + u + v) + a = (u + v) + (\overrightarrow{ab} + a) = u + v + b;$$

o

$$\tau(x) = \overrightarrow{ab} + x = (\overrightarrow{ab} + u) + a = u + b,$$

e, igualmente, $\tau(y) = v + b$; así pues $\tau(z)$ es la suma de $\tau(x)$ y $\tau(y)$ en \mathcal{E}_b .]

Se demuestra igualmente que τ respeta las leyes externas de \mathcal{E}_a y \mathcal{E}_b .

- El interés de las estructuras \mathcal{E}_a reside en demostrar que *toda estructura afín se reduce a la estructura afín de un espacio vectorial*.

En efecto, con las notaciones que anteceden, ζ_a es un isomorfismo de espacios vectoriales de E sobre \mathcal{E}_a y, por lo tanto un isomorfismo para las estructuras afines respectivamente asociadas. Sea $I : E_a \rightarrow \mathcal{E}$ la aplicación idéntica; poniendo $\theta_a = (\zeta_a)^{-1}$, se tiene, para todo $x \in \zeta_a$:

$$I(x) = I(a) + \overrightarrow{ax} = I(a) + \theta_a(x);$$

como θ_a es lineal, e I biyectiva, se ve que I es un *isomorfismo de espacios afines*.

En definitiva, **todo espacio afín \mathcal{E} ligado al espacio vectorial E es isomorfo al espacio afín E** . Pero no existe ningún isomorfismo privilegiado de \mathcal{E} sobre E .

Las estructuras vectoriales \mathcal{E}_a permiten también reducir las aplicaciones afines a aplicaciones lineales; ya que la proposición I.4.1 permite establecer el siguiente enunciado:

I.5.2 || Sea $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación del espacio afín \mathcal{E} en el espacio afín \mathcal{F} ; sea $a \in \mathcal{E}$ y $b = \varphi(a)$. Entonces, para que la aplicación φ sea **afín**, es necesario y suficiente que sea **lineal** de \mathcal{E}_a en \mathcal{F}_b .

En particular, para que una aplicación $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ que admite un *punto fijo* a , sea afín, es necesario y suficiente que sea una aplicación *lineal* de \mathcal{E}_a en sí mismo.

En la práctica, cuando se considera la estructura vectorial de \mathcal{E}_a , se dice simplemente, para abreviar, que **se toma a como origen**. Es lo que se **hace** corrientemente en Análisis: siempre que se pueda interesa limitarse a una estructura vectorial.

§ 1.6 SUBVARIETADES AFINES SUBESPACIOS AFINES

Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre \mathcal{E} y \mathcal{V} una parte no vacía de \mathcal{E} . Conservemos las notaciones del § 5 y supongamos que existe un $a \in \mathcal{V}$ tal que \mathcal{V} sea un subespacio vectorial de \mathcal{E}_a . Entonces para todo $b \in \mathcal{V}$, el conjunto \mathcal{V} es también subespacio vectorial de \mathcal{E}_b (y \mathcal{V} , considerado como subespacio de \mathcal{E}_b , es un espacio vectorial isomorfo a \mathcal{V} , considerado como subespacio de \mathcal{E}_a). Esto es una consecuencia de I.5.1 y del hecho de que la traslación de vector \overrightarrow{ab} es una biyección de \mathcal{V} sobre \mathcal{V} ; establecemos:

Definición I.6.1

*Sea \mathcal{V} una parte no vacía de un espacio afín \mathcal{E} sobre E . Se dice que \mathcal{V} es una **subvariedad lineal afín** de \mathcal{E} si existe un $a \in \mathcal{V}$ tal que \mathcal{V} es un subespacio vectorial de \mathcal{E}_a (esto se cumple entonces para todo $a \in \mathcal{V}$). La dimensión de este subespacio vectorial (que es independiente de a) recibe el nombre de **dimensión** de \mathcal{V} .*

Se completa esta definición conviniendo en que el *conjunto vacío* es una *subvariedad lineal afín*, a la cual se atribuye la dimensión -1 .

Observemos que las *subvariedades lineales afines* de dimensión 0 de \mathcal{E} son las *partes de \mathcal{E} reducidas a un punto*.

En lo que sigue, utilizaremos la expresión «(sub)-variedad afín» en lugar de «subvariedad lineal afín»⁽¹⁾.

Sea \mathcal{V} una variedad afín **no vacía** de \mathcal{E} ; si $a \in \mathcal{V}$ es fijo, la aplicación $\zeta_a^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow E$ (recíproca de $t \mapsto t + a$) transforma \mathcal{V} en un subespacio vectorial V de E ; se ve fácilmente, con ayuda de I.5.1, que V *no depende de la elección de a* . Por definición, V recibe el nombre de **dirección** de \mathcal{V} .

⁽¹⁾ Solamente podría haber peligro de confusión si se definieran en \mathcal{E} otras subvariedades algebraicas distintas de las variedades lineales afines. Tales conceptos quedan fuera del nivel de este libro.

Esta claro que la restricción a $V \times \mathcal{V}$ de la aplicación $(t, x) \mapsto t + x$ define sobre \mathcal{V} una *estructura de espacio afín* de espacio director V . Por esta razón, se dice también que \mathcal{V} es un **subespacio afín** de \mathcal{E} . Para todo $a \in \mathcal{V}$, $t \mapsto t + a$ es un isomorfismo de V sobre el subespacio vectorial \mathcal{V} de \mathcal{E}_a . La subvariedad lineal afín vacía no es un subespacio afín y no tiene dirección.

Si \mathcal{V} es un subespacio afín no vacío de \mathcal{E} , la *inyección canónica* de \mathcal{V} en \mathcal{E} es evidentemente una *aplicación afín*.

Una variedad afín no vacía \mathcal{V} es de *dimensión finita* si y solamente si su dirección V es de dimensión finita; el entero $p = \dim(V)$ simplemente es la *dimensión* de \mathcal{V} y se designará por $p = \dim(\mathcal{V})$.

La variedad \mathcal{V} se dice que es una **recta afín** si $\dim(\mathcal{V}) = 1$ y que es un **plano afín** si $\dim(\mathcal{V}) = 2$.

Si V es un *hiperplano vectorial* (es decir si $\text{codim}(V) = 1$), se dice que \mathcal{V} es un **hiperplano afín**. Para que una subvariedad afín \mathcal{V} de un espacio afín de dimensión finita $n \geq 1$ sea un hiperplano afín, es necesario y suficiente que se tenga: $\dim(\mathcal{V}) = n - 1$.

Veamos la proposición inmediata siguiente, que más adelante nos servirá para definir *representaciones paramétricas* de variedades afines:

I.6.1 Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre E , sea $a \in \mathcal{E}$ y sea V un subespacio vectorial de E ; entonces el conjunto $\zeta_a(V)$ es la única subvariedad afín de \mathcal{E} de dirección V que pasa por a .

En particular, tomemos $\mathcal{E} = E$: los subespacios vectoriales de \mathcal{E} son variedades afines. Con más generalidad, las variedades afines de dirección dada V son entonces los conjuntos de la forma $a + V (a \in E)$; es decir, las **trasladadas** de los subespacios vectoriales de E , y para que se tenga $a + V = b + V$, es necesario y suficiente que se tenga $b - a \in V$.

I.6.2 Sea $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$ una familia de subespacios afines del espacio afín \mathcal{E} . Si la intersección $\mathcal{V} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_i$ es **no vacía**, es una **variedad afín de dirección**

$V = \bigcap_{i \in I} V_i$ en donde V_i designa la **dirección** de \mathcal{V}_i para cada $i \in I$

Demostración. Tomando por origen un punto cualquiera a de \mathcal{V} se reduce a la intersección de subespacios vectoriales de \mathcal{E}_a .]

En el caso de dos subespacios afines, se tiene además:

I.6.3 Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ dos subespacios afines de \mathcal{E} de direcciones respectivas V_1 y V_2 . Para que su intersección sea **no vacía**, es necesario y suficiente que existan un punto a_1 de \mathcal{V}_1 y un punto a_2 de \mathcal{V}_2 tales que $\overrightarrow{a_1 a_2} \in V_1 + V_2$.

Demostración. Si $a_1 \in \mathcal{V}_1, a_2 \in \mathcal{V}_2$ y $x \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$, se tiene:

$$\overrightarrow{a_1 a_2} = \overrightarrow{xa_2} - \overrightarrow{xa_1} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{xa_1} \in V_1, \quad \overrightarrow{xa_2} \in V_2,$$

luego $\overrightarrow{a_1 a_2} \in V_1 + V_2$, lo que prueba que la condición es necesaria.

Recíprocamente, si $\overrightarrow{a_1 a_2} \in V_1 + V_2$, existe un $\vec{u}_1 \in V_1$ y un $\vec{u}_2 \in V_2$ tales que $\overrightarrow{a_1 a_2} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Entonces el punto $x = a_1 + \vec{u}_1 = a_2 - \vec{u}_2$, pertenece a \mathcal{V}_1 y a \mathcal{V}_2 a la vez. La condición es, pues, suficiente.]

(Adviértase que si esta condición se verifica para un par $(a_1, a_2) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$, también se verifica para cualquier otro par.)

Corolario.

|| Si \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 son dos subespacios afines de \mathcal{E} cuyas direcciones V_1 y V_2 son suplementarias en E , entonces \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 tienen un punto común único.

Esto resulta inmediatamente de I.6.2 e I.6.3 (puesto que es $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$).

Es sabido que en todo espacio vectorial, dos subespacios de la misma dimensión finita de los cuales uno está incluido en el otro, son necesariamente iguales. De ello se deduce fácilmente:

Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} dos variedades lineales afines no vacías de la misma dimensión finita en un espacio afín \mathcal{E} . Entonces la relación $(\mathcal{V} \subset \mathcal{W})$ implica: $(\mathcal{V} = \mathcal{W})$.

En efecto, si $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, estamos en el caso de la propiedad antes recordada de los espacios vectoriales, considerando un punto $a \in \mathcal{V}$ y la aplicación $E \rightarrow \mathcal{E}_a$, $t \mapsto t + a$, donde E designa el espacio director de \mathcal{E} .

Subvariedades afines y aplicaciones afines

Designemos por \mathcal{E} , \mathcal{F} dos espacios afines ligados respectivamente a los espacios vectoriales E , F . Si $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ es una aplicación afín, la restricción de φ a toda subvariedad afín no vacía de \mathcal{E} es una aplicación afín (esto se desprende fácilmente de las definiciones). Además:

I.6.4 || Sea $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación afín del espacio afín \mathcal{E} en el espacio afín \mathcal{F} . Entonces:
 — La imagen por φ de toda subvariedad afín de \mathcal{E} es una subvariedad afín de \mathcal{F} ;
 — La imagen recíproca por φ de toda subvariedad afín de \mathcal{F} es una subvariedad afín de \mathcal{E} .

Demostración (abreviada). Limitémonos a la imagen recíproca, que es el caso más complicado. Sea \mathcal{W} una variedad afín de \mathcal{F} : si $\varphi^{-1}(\mathcal{W})$ es vacío, no hay nada que demostrar. En otro caso, sea $a \in \varphi^{-1}(\mathcal{W})$ y $b = \varphi(a)$; entonces φ es lineal de \mathcal{E}_a en \mathcal{F}_b y \mathcal{W} es un subespacio vectorial de \mathcal{F}_b ; de donde el resultado.]

Manteniendo las notaciones I.6.3, designemos por \mathcal{V} una subvariedad afín no vacía de \mathcal{E} , de dirección V , y por f la parte lineal de φ . Se ve fácilmente que la dirección de la variedad afín $\mathcal{W} = \varphi(\mathcal{V})$ no es otra que el espacio vectorial $f(V)$.

Si \mathcal{V} es de dimensión finita, lo mismo ocurre entonces con su imagen \mathcal{W} , y la dimensión de \mathcal{W} es igual al rango de la restricción de f a V (en particular, $\dim(\mathcal{W}) \leq \dim(\mathcal{V})$).

Según lo que antecede si φ es inyectiva, la dimensión de \mathcal{W} es igual a la de \mathcal{V} ; en particular, la dimensión de una variedad afín de dimensión finita es *invariante para toda biyección afín*.

Puntos fijos de una aplicación afín

Designando siempre por \mathcal{E} un espacio afín sobre E , sea $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una aplicación afín y f su parte lineal. Designemos por \mathcal{V} al conjunto de los *puntos fijos* de φ , es decir $\mathcal{V} = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) = M\}$. Si \mathcal{V} es no vacío y si $A \in \mathcal{V}$, las relaciones $\varphi(M) = M (M \in \mathcal{E})$ y $f(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$ son equivalentes. Ahora bien, el conjunto $V = \{\vec{v} \in E \mid f(\vec{v}) = \vec{v}\}$ (conjunto de los puntos fijos de f) es el subespacio vectorial $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ de E . Podemos pues establecer:

I.6.5 *El conjunto \mathcal{V} de los puntos fijos de una aplicación afín $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es una subvariedad afín de \mathcal{E} ; si no es vacía, su dirección es el subespacio vectorial*

$$V = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$$

formado por los elementos fijos de $f = L(\varphi)$.

Si $V = \{0\}$, φ admite por lo tanto a lo sumo un punto fijo.

● Se puede ver que la relación $V \neq \{0\}$ equivale al hecho de que 1 es valor propio de f ; si es así, V es el subespacio propio asociado. Pero se observará que, incluso en este caso, \mathcal{V} puede ser vacío.

Caso en que \mathcal{E} es de dimensión finita

En este caso se pueden completar los resultados que anteceden viendo lo que pasa cuando $V = \{0\}$.

I.6.6 *Sea \mathcal{E} un espacio afín de dimensión finita. Para que una aplicación afín $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ admita un punto fijo único, es necesario y suficiente que su parte lineal f tenga como único punto fijo el origen; o dicho de otro modo: es necesario y suficiente que 1 no sea valor propio de f .*

Demostración. La condición enunciada es siempre necesaria (incluso cuando \mathcal{E} es de dimensión infinita). Inversamente, si se cumple y si \mathcal{E} es de dimensión finita, la aplicación lineal $g = f - \text{Id}_E$ es inyectiva y por lo tanto biyectiva.

La aplicación afín $\psi : \mathcal{E} \rightarrow E, M \mapsto \overrightarrow{M\varphi(M)}$ admite a g como parte lineal y es por lo tanto biyectiva (véase I.4.3); existe un punto único M de \mathcal{E} tal que $\psi(M) = 0$, es decir, tal que $\varphi(M) = M$, lo cual nos da el resultado.]

Observación. Si f es diagonalizable, la dimensión de $V = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ es igual al orden de multiplicidad del valor propio 1 para f (conviniendo en que tal orden es nulo si 1 no es valor propio de f).

● Se observará que este resultado sigue siendo válido cuando la matriz M de f en una base de E es *diagonalizable en el cuerpo \mathbf{C}* , sin que lo sea necesariamente en el cuerpo \mathbf{R} .

Designemos en efecto por λ un valor propio *real* cualquiera de M , por α su orden de multiplicidad, e identifiquemos E con \mathbf{R}^n (donde $n = \dim(E)$) por medio de la base elegida. Puesto que M es diagonalizable sobre el cuerpo \mathbf{C} , la matriz $M - \lambda I_n$ (donde I_n designa la matriz unidad de orden n) es de rango $n - \alpha$ (véase tomo 1, teoremas XI.2.3; XI.2.4 y corolario).

Ahora bien, la matriz $M - \lambda I_n$ es *real*. Al ser su rango $n - \alpha$, el subespacio de los vectores columna $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^n$ tales que $(M - \lambda I_n)\mathcal{X} = 0$ es exactamente de dimensión α . De modo equivalente, el subespacio propio F de f correspondiente al valor propio λ es de dimensión α .

(Se ve igualmente que la matriz $(M - \lambda I_n)^\alpha$ es de rango $n - \alpha$, lo cual demuestra que F es también *igual* al subespacio característico de f correspondiente al valor propio λ .)

El resultado antes enunciado corresponde al caso en que $\lambda = 1$ es un valor propio, y es fundamental para el estudio de las isometrías de un espacio euclídeo (§ II.1).

Variedad afín engendrada

Definición I.6.2

Sea $(a_i)_{i \in I}$ una familia de puntos de un espacio afín \mathcal{E} . La **variedad afín engendrada por los a_i** es la intersección de la familia de las variedades afines que contienen a todos los a_i . La designaremos por

$$\text{Aff}((a_i)_{i \in I}).$$

Esta definición queda justificada por el hecho de que existen siempre variedades afines que contienen a todos los a_i (por ejemplo el mismo \mathcal{E}). Se observará que $\text{Aff}((a_i)_{i \in I})$ es la *variedad afín más pequeña* que contiene a todos los a_i , y que (al ser I no vacío), $\text{Aff}((a_i)_{i \in I})$ es no vacío.

Poniendo $\mathcal{V} = \text{Aff}((a_i)_{i \in I})$, se ve fácilmente que, para todo $i \in I$, el subespacio vectorial

$$V = \text{Vect}((\overrightarrow{a_i a_j})_{j \in I})$$

es igual a la *dirección* de \mathcal{V} . Se tiene por lo tanto: $(\forall i \in I), \mathcal{V} = a_i + V$ (puesto que $a_i \in \mathcal{V}$).

Parametrizaciones de una variedad afín

En el espacio afín \mathcal{E} , sea \mathcal{V} una variedad afín no vacía de dimensión finita $p \geq 1$ y sea V su dirección. Designemos por $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ una *base* de V .

Para todo $a \in \mathcal{V}$, la aplicación $t \mapsto a + t$ define una *biyección* de V sobre \mathcal{V} . Se deduce de ello que la aplicación

$$(1) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \mapsto a + \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{e}_i$$

es una *biyección* de \mathbf{R}^p sobre \mathcal{V} .

Se expresa este hecho diciendo que (1) es una **parametrización** de \mathcal{V} y se dice que los (e_i) constituyen un **sistema de vectores directores** de \mathcal{V} .

En particular, toda *recta afín* \mathcal{D} de \mathcal{E} puede ser parametrizada bajo la forma:

$$(2) \quad \boxed{\lambda \mapsto a + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbf{R}}$$

donde $a \in \mathcal{D}$ y donde \vec{v} es un vector *no nulo*: \vec{v} recibe entonces el nombre de **vector director** de \mathcal{D} . Se dice que λ es el *parámetro* del punto $x = a + \lambda \vec{v}$ sobre \mathcal{D} (para la parametrización considerada).

El conjunto de los puntos $a + \lambda \vec{v}$, donde $\lambda \in \mathbf{R}_+$, recibe el nombre de **semirrecta** de origen a y de vector director \vec{v} .

Observemos que la introducción de un vector director \vec{v} de una recta afín \mathcal{D} , determina sobre esta recta, una *relación de orden*: Por definición, el orden de los puntos es el de sus parámetros en una parametrización de la forma (2). La recta afín \mathcal{D} , provista de esta relación de orden, se dice que es un **eje** ⁽¹⁾ de vector director \vec{v} .

Señalemos finalmente que el par (\mathcal{D}, \vec{v}) constituido por una recta afín \mathcal{D} y uno de sus vectores directores \vec{v} recibe el nombre de **vector deslizante** (véase cap. IV).

Del mismo modo, todo *plano afín* \mathcal{P} de \mathcal{E} admite parametrizaciones de la forma

$$\boxed{(\lambda, \mu) \mapsto a + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \quad (\lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R})}$$

donde $a \in \mathcal{P}$ y donde los vectores \vec{v}, \vec{w} son independientes. Se dice entonces que \mathcal{P} queda definido por el punto a y por los vectores directores \vec{v}, \vec{w} ; se dice también, abreviadamente, que \mathcal{P} es el plano (a, \vec{v}, \vec{w}) .

Los números λ y μ reciben el nombre de *parámetros* del punto $x = a + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ sobre \mathcal{P} , para la parametrización considerada.

⁽¹⁾ Hagamos notar sin embargo que la palabra «eje» designa tradicionalmente, en ciertos casos, una recta no orientada (eje de rotación de \mathcal{E}_3 , eje de simetría de una figura, eje central de un sistema de vectores, etc.). Incluso a veces designa una variedad afín de dimensión > 1 (eje de un retroceso, véase § II.11) o simplemente una dirección (eje de una hélice).

Parametrizaciones de rectas y de planos afines en dimensión finita

Supongamos \mathcal{E} de dimensión finita n y elijamos un sistema de referencia cualquiera $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \mathcal{E} . Designemos por (a_1, \dots, a_n) las coordenadas de un punto fijo a de \mathcal{E} en este sistema de referencia y sean $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ las componentes respectivas en la base (\vec{e}_i) de E , de los dos vectores independientes dados \vec{v}, \vec{w} .

Sobre la recta que pasa por a y de vector director \vec{v} , las coordenadas del punto x de parámetro λ son:

$$x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1, \quad x_2 = a_2 + \lambda\alpha_2, \dots, x_n = a_n + \lambda\alpha_n.$$

Sobre el plano que pasa por a y de vectores directores (\vec{v}, \vec{w}) , las coordenadas del punto x de parámetros (λ, μ) son:

$$x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \quad x_2 = a_2 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, \dots, \\ x_n = a_n + \lambda\alpha_n + \mu\beta_n.$$

Se dice a veces que estas relaciones constituyen un *sistema de ecuaciones paramétricas* (de la recta o del plano).

Si \mathcal{E} es de dimensión 3 y si $(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es un sistema de referencia de \mathcal{E} , se observará que toda recta *no paralela al plano* $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ (véase más adelante) admite una parametrización de la forma

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \quad z = z$$

donde a, b, p, q , representan constantes. Estas parametrizaciones son muchas veces útiles en las aplicaciones.

Paralelismo

Definición I.6.3

Sean \mathcal{V}, \mathcal{W} dos variedades afines no vacías de un espacio afín \mathcal{E} sobre E , de direcciones respectivas V y W . Se dice que \mathcal{V} y \mathcal{W} son **paralelas** si $V = W$. Se dice que \mathcal{V} es **débilmente paralela** a \mathcal{W} si $V \subset W$.

Las propiedades siguientes son elementales:

1) Sobre el conjunto de las subvariedades afines no vacías de \mathcal{E} la relación « \mathcal{V} y \mathcal{W} son paralelas» es una *relación de equivalencia*.

2) Sobre el conjunto de las subvariedades afines no vacías de \mathcal{E} de la misma dimensión finita dada p , la relación « \mathcal{V} y \mathcal{W} son paralelas» es una relación de equivalencia.

3) Si \mathcal{V} y \mathcal{W} son paralelas (resp. si \mathcal{V} es débilmente paralela a \mathcal{W}) y de dimensión finita, se tiene: $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W})$ (resp. $\dim(\mathcal{V}) \leq \dim(\mathcal{W})$), teniendo lugar la igualdad si, y solamente si, \mathcal{V} y \mathcal{W} son paralelas).

4) Si \mathcal{V} y \mathcal{W} son paralelas, entonces $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \emptyset$ o bien $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

5) Si \mathcal{V} es débilmente paralela a \mathcal{W} , entonces $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \emptyset$, o bien $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$.

6) Sobre el conjunto de las subvariedades afines no vacías de \mathcal{E} , la relación « \mathcal{V} es débilmente paralela a \mathcal{W} » es reflexiva y transitiva.

Observación. Dos subvariedades afines de intersección vacía no son necesariamente paralelas.

Por abuso de lenguaje: un subespacio vectorial W de E se dirá que es *paralelo a una variedad afín* \mathcal{V} , si está contenido en la dirección de \mathcal{V} . Por ejemplo se podrá decir que un vector es paralelo a una recta afín, o a un plano afín.

Se podrá decir, para aligerar el lenguaje que « \mathcal{V} y \mathcal{W} son paralelas» en lugar de: « \mathcal{V} es débilmente paralela a \mathcal{W} ». Este abuso de lenguaje no incomoda, ya que en la práctica, por el contexto se ve siempre claro de qué paralelismo se trata. Se dice incluso a veces que un plano es «paralelo a un vector».

Paralelismo y aplicaciones afines

Sean \mathcal{E} , \mathcal{F} dos espacios afines, y $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación afín.

— Si \mathcal{V} , \mathcal{W} son dos subvariedades afines no vacías de \mathcal{E} , entonces: (\mathcal{V} y \mathcal{W} paralelas) \Rightarrow ($\varphi(\mathcal{V})$ y $\varphi(\mathcal{W})$ paralelas) y: (\mathcal{V} débilmente paralela a \mathcal{W}) \Rightarrow ($\varphi(\mathcal{V})$ es débilmente paralela a $\varphi(\mathcal{W})$).

— Si \mathcal{V}' , \mathcal{W}' son dos subvariedades afines no vacías de \mathcal{F} y si las variedades $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\mathcal{V}')$, $\mathcal{W} = \varphi^{-1}(\mathcal{W}')$ son ambas no vacías, entonces

$$(\mathcal{V}' \text{ y } \mathcal{W}' \text{ paralelas}) \Rightarrow (\mathcal{V} \text{ y } \mathcal{W} \text{ paralelas})$$

y:

$$(\mathcal{V}' \text{ débilmente paralela a } \mathcal{W}') \Rightarrow (\mathcal{V} \text{ débilmente paralela a } \mathcal{W}).$$

§ 1.7 FUNCIONES AFINES; ECUACIONES DE UNA VARIEDAD AFÍN

Definición 1.7.1

ζ Sobre un espacio afín \mathcal{E} , se da el nombre de **función afín** a toda aplicación afín de \mathcal{E} en \mathbf{R} .

La imagen de \mathcal{E} por una función afín es un subespacio afín no vacío de \mathbf{R} , o sea el mismo \mathbf{R} , o un conjunto reducido a un punto. De esto se deduce que *toda función afín es o bien constante o suprayectiva*.

La parte *lineal* de una función afín φ es una *forma lineal* f sobre el espacio vectorial E asociado a \mathcal{E} ; para que φ sea *constante*, es necesario y suficiente que f , sea *nula*.

Por definición, para todo $a \in \mathcal{E}$, se tiene:

$$(1) \quad (\forall x \in \mathcal{E}) \quad \varphi(x) = \varphi(a) + f(\overrightarrow{ax}).$$

En consecuencia *el conjunto de las funciones afines sobre \mathcal{E} es un subespacio vectorial del espacio de las aplicaciones de \mathcal{E} en \mathbf{R}* .

Suponiendo \mathcal{E} de *dimensión finita* n , sea $(a; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un sistema de referencia de origen a ; designemos por (u_1, u_2, \dots, u_n) las coordenadas de f en la base dual (\vec{e}_i^*) de (\vec{e}_i) , y por (x_1, \dots, x_n) las coordenadas de x en el sistema de referencia; la relación (1) equivale entonces a

$$(2) \quad (\forall x \in \mathcal{E}) \quad \varphi(x) = \varphi(a) + \sum_{i=1}^n u_i x_i.$$

Hiperplanos afines de un espacio afín

Vamos a precisar las relaciones entre la noción de hiperplano afín de un espacio afín \mathcal{E} y la de imagen inversa de un real fijo α por una aplicación afín φ sobre \mathcal{E} . Simplificaremos el problema teniendo en cuenta que $\varphi^{-1}(\alpha)$ es la imagen inversa de 0 por la función afín $\varphi - \alpha$: estamos pues en el caso en que $\alpha = 0$.

Teorema 1.7.1

\parallel Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre el espacio vectorial de E .

- a) Si φ es una función afín **no constante** sobre \mathcal{E} , el conjunto $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(0)$ es un **hiperplano afín** de \mathcal{E} .
- b) Si \mathcal{H} es un hiperplano afín de \mathcal{E} , existe una **función afín** φ sobre \mathcal{E} tal que $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(0)$, y toda función afín ψ sobre \mathcal{E} tal que $\mathcal{H} = \psi^{-1}(0)$ es de la forma $\psi = \lambda\varphi$, con $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

Demostración

a) φ es suprayectiva (puesto que no es constante). Sea $A \in \mathcal{E}$ tal que $\varphi(A) = 0$, y sea f la parte lineal de φ . Para todo $M \in \mathcal{E}$ se tiene:

$$\varphi(M) = \varphi(A) + f(\overrightarrow{AM}) = f(\overrightarrow{AM}).$$

De donde

$$(3) \quad (M \in \mathcal{H}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \in \text{Ker}(f)).$$

Ahora bien, f es una forma lineal no nula; luego $\text{Ker}(f)$ es un hiperplano vectorial de E ; la equivalencia (3) demuestra, por lo tanto, que \mathcal{H} es un hiperplano afín de dirección $H = \text{Ker}(f)$.

b) Sea $A \in \mathcal{H}$ y sea H el hiperplano vectorial de E dirección de \mathcal{H} . Según el teorema I.1.1, existe una forma lineal no nula f sobre E tal que $H = \text{Ker}(f)$. La función afín $\varphi: M \rightarrow f(\overrightarrow{AM})$ satisface las condiciones requeridas. Sea entonces ψ una función afín sobre \mathcal{E} tal que $\mathcal{H} = \psi^{-1}(0)$. El núcleo de la parte lineal g de ψ es por lo tanto H ; según I.1.2, existe pues un real $\lambda \neq 0$ tal que $g = \lambda f$, de donde también: $\psi = \lambda\varphi$.]

Toda función afín φ tal que $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(0)$, se dice que es una **ecuación cartesiana** de \mathcal{H} . Cuando \mathcal{H} es fijo, estas ecuaciones son todas *proporcionales*. Admitiremos el abuso de lenguaje: «el hiperplano \mathcal{H} de ecuación $\varphi = 0$ » para expresar que la función afín φ es una ecuación cartesiana de \mathcal{H} .

Supongamos \mathcal{E} de dimensión finita $n \geq 1$. En un sistema de referencia $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, toda ecuación cartesiana de un hiperplano es, según (2), de la forma siguiente:

$$(4) \quad \boxed{\sum_{i=1}^n u_i x_i + C = 0}$$

donde las constantes (u_i) son *no todas nulas* y donde C es una constante.

Si \mathcal{H} y el sistema de referencia son fijos, la $(n+1)$ -upla (u_1, \dots, u_n, C) que figura en (4) queda definida salvo un factor multiplicativo no nulo. Recíprocamente, toda ecuación de la forma (4), donde (u_1, \dots, u_n) son no todos nulos define un hiperplano afín.

Según I.6.1, las partes lineales de las ecuaciones de un mismo hiperplano afín \mathcal{H} son formas lineales no nulas todas proporcionales.

De estas formas se dirá que son *asociadas* a \mathcal{H} ; es claro que si f es una de tales formas, el hiperplano vectorial $H = f^{-1}(0)$ de E es igual a la *dirección* de \mathcal{H} . Volviendo a la demostración de I.6.1, se deduce:

I.7.2 En un espacio afín \mathcal{E} sean dos hiperplanos afines de ecuaciones respectivas

$$f_1(\overrightarrow{AM}) + C_1 = 0 \quad f_2(\overrightarrow{AM}) + C_2 = 0,$$

donde las f_i son formas lineales no nulas sobre E y las C_i son constantes; para que estos hiperplanos sean **paralelos**, es necesario y suficiente que f_1 y f_2 sean **proporcionales**.

Ecuaciones de una variedad afín (dimensión finita)

● Supondremos en adelante que el espacio afín \mathcal{E} es de dimensión finita $n \geq 1$ y aplicaremos los resultados del tomo 1, § VIII.5.

El teorema fundamental que sigue cubre todas las teorías particulares de haces de rectas o de planos, etc., ya estudiadas en las clases anteriores y sobre las cuales hemos de volver en el § I.13.

Teorema I.7.3

Sea p un entero $\leq n$ y sean $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ funciones afines sobre \mathcal{E} , cuyas partes lineales respectivas f_1, \dots, f_p son linealmente independientes. Entonces:

a) La intersección \mathcal{V} de los hiperplanos $\mathcal{H}_i = \varphi_i^{-1}(0)$ es una **variedad afín de dimensión $n - p$** , de dirección $V = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \text{Ker}(f_i)$.

b) Si \mathcal{H} es un hiperplano de ecuación $\varphi = 0$, que contiene a \mathcal{V} , existen reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tales que $\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$.

De la variedad \mathcal{V} se dirá que está *definida por las ecuaciones cartesianas* $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_p = 0$.

Demostración

a) Sea $(A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un sistema de referencia de \mathcal{E} . Designando por (x_1, \dots, x_n) las coordenadas de un punto $x \in \mathcal{E}$, el sistema

$$(\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \dots, \varphi_p(x) = 0)$$

se escribe en la forma:

$$(5) \quad u_{i1} x_1 + u_{i2} x_2 + \dots + u_{in} x_n + C_i = 0, \quad 1 \leq i \leq p,$$

donde los u_{ij} y los C_i son constantes. Por hipótesis, la matriz $[u_{ij}]$ es de rango p . El aserto resulta entonces del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (véase tomo 1, § X.5).

b) El sistema lineal (5) es *compatible* (sistema de rango p , de p ecuaciones), lo que implica que \mathcal{V} es *no vacío*. Sea $A \in \mathcal{V}$; para todo i , se tiene:

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad f_i(\overrightarrow{AM}) = \varphi_i(M).$$

Igualmente, si f es la parte lineal de φ , se tiene (por ser $A \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}$):

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad f(\overrightarrow{AM}) = \varphi(M).$$

Por lo tanto, puesto que \mathcal{H} contiene a \mathcal{V} , la dirección H de \mathcal{H} contiene a V . Según el teorema VIII.5.7 del tomo 1, existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ tales que

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad f(\overrightarrow{AM}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\overrightarrow{AM}).$$

De donde:

$$\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i.$$

Observaciones.

1. Recíprocamente, resulta evidente que todo hiperplano \mathcal{H} de ecuación

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_p \varphi_p = 0,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son reales no todos nulos, contiene a \mathcal{V} .

2. Sean $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ funciones afines sobre \mathcal{E} cuyas partes lineales respectivas son f_1, f_2, \dots, f_p . Según I.6.3, a), la variedad afín definida por las ecuaciones $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0, \dots, \psi_p = 0$ tiene la *misma dirección* que \mathcal{V} (es por lo tanto paralela a \mathcal{V}).

Además, sea $A \in \mathcal{E}$ un punto cualquiera. Según I.6.1, por A pasa una variedad afín y una sola de la misma dirección que \mathcal{V} .

Según lo que antecede, esta variedad puede ser definida mediante las ecuaciones cartesianas:

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \dots, \psi_p = 0,$$

donde se ha puesto

$$\psi_i(M) = \varphi_i(M) - \varphi_i(A) (= f_i(\overrightarrow{AM}))$$

para todo $M \in \mathcal{E}$ y todo $i = 1, 2, \dots, p$.

Los ejemplos y las aplicaciones relativas al caso $n = 2$ y $n = 3$ se darán en los § 13 y 14.

§ 1.8 BARICENTROS

Recordemos que todas las familias que consideramos se suponen con índices pertenecientes a un conjunto no vacío. Por otra parte se dice que una familia de reales $(\lambda_i)_{i \in I}$ es una familia de reales **casi todos nulos** si los λ_i son nulos salvo un número finito de ellos a lo sumo.

Sea entonces \mathcal{E} un espacio afín. Para abreviar llamaremos **punto ponderado** de \mathcal{E} a todo elemento (A, λ) de $\mathcal{E} \times \mathbf{R}$: El número λ recibe el nombre de **coeficiente**, **masa**, o también a veces **peso**, del punto A .

Teorema I.8.1

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Sea } (A_i, \lambda_i)_{i \in I} \text{ una familia de puntos ponderados del espacio afín } \mathcal{E}, \text{ tal que} \\ \text{i) Los coeficientes } \lambda_i \text{ son casi todos nulos,} \\ \text{ii) } \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0. \\ \text{Existe entonces un punto único } G \text{ de } \mathcal{E} \text{ que verifica} \\ (1) \quad \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0. \end{array} \right.$$

Demostración

a) Unicidad: Sean G y G' dos puntos que verifican (1). Restando miembro a miembro, de las relaciones

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{G'A_i} = 0$$

se desprende:

$$\sum \lambda_i (\overrightarrow{GA_i} - \overrightarrow{G'A_i}) = 0, \text{ o sea } \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \right) \overrightarrow{GG'} = 0.$$

Por ser $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, se deduce: $\overrightarrow{GG'} = 0$, es decir $G = G'$.

b) Existencia: Sea Ω un punto de \mathcal{E} ; pongamos $S = \sum_{i \in I} \lambda_i$ y definamos el punto G mediante

$$\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{S} \overrightarrow{\Omega A_i}.$$

Inmediatamente se verifica que este punto G satisface (1).]

Para abreviar, una familia $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de puntos ponderados tal que los λ_i sean casi todos nulos recibirá el nombre de **sistema ponderado**; al número $\sum_{i \in I} \lambda_i$ se le dará el nombre de **masa** de este sistema.

Establecemos entonces:

Definición I.8.1

Sea $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ un sistema ponderado del espacio afín \mathcal{E} , de masa no nula. Se da el nombre de **baricentro** de este sistema al punto G de \mathcal{E} tal que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

Se dice también que G es el baricentro de los puntos A_i , afectados por los coeficientes λ_i .

Propiedades

1. Según la demostración de I.7.1, b), si ponemos $S = \sum_{i \in I} \lambda_i$, el baricentro queda definido a partir de cualquier punto Ω de \mathcal{E} mediante:

$$(2) \quad \overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{S} \overrightarrow{\Omega A_i}, \text{ o sea: } \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \right) \overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}.$$

2. Sea k un real no nulo; pongamos $\mu_i = k\lambda_i$, para $i \in I$. La relación (2) hace ver inmediatamente que el baricentro del sistema $(A_i, \mu_i)_{i \in I}$ es igual al baricentro del sistema $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$: *No varía el baricentro de un sistema cuando se multiplican todos los coeficientes λ_i por un mismo escalar no nulo.*

La propiedad 2 permite, dividiendo cada coeficiente λ_i por $S = \sum_{i \in I} \lambda_i$, reducir todo al caso en el que $S = 1$.

Al hacer esto, la relación (2) se escribe de manera más sencilla:

$$\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}.$$

● Por esta razón, cuando $S = \sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ se puede escribir simbólicamente (2) en la forma

$$(3) \quad \boxed{G = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot A_i}.$$

pero no se ha de perder de vista que (3) sólo tiene sentido cuando $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 1$. Cuando S es no nulo cualquiera, se puede escribir solamente:

$$G = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{S} \cdot A_i.$$

I.8.2 (Asociatividad). Sea $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ un sistema de puntos ponderados de \mathcal{E} , de masa no nula. Sea $(I_\alpha)_{\alpha \in L}$ una **partición finita** de I , tal que para todo $\alpha \in L$, la suma $S_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha} \lambda_i$ sea **no nula**. Pongamos

$$G = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{S} \cdot A_i \quad y \quad G_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha} \frac{\lambda_i}{S_\alpha} \cdot A_i \quad \text{donde } S = \sum_{i \in I} \lambda_i$$

Entonces G es el baricentro del sistema $(G_\alpha, S_\alpha)_{\alpha \in L}$. Dicho de otro modo, se tiene:

$$G = \sum_{\alpha \in L} \frac{S_\alpha}{S} \cdot G_\alpha.$$

Demostración. Sea Ω un punto de \mathcal{E} . Por definición se tiene:

$$\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{S} \overrightarrow{\Omega A_i}, \quad \overrightarrow{\Omega G_\alpha} = \sum_{i \in I_\alpha} \frac{\lambda_i}{S_\alpha} \overrightarrow{\Omega A_i},$$

de donde:

$$\sum_{\alpha \in L} \frac{S_\alpha}{S} \overrightarrow{\Omega G_\alpha} = \sum_{\alpha \in L} \frac{1}{S} \left(\sum_{i \in I_\alpha} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i} \right) = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{S} \overrightarrow{\Omega A_i}. \quad]$$

Caracterización de los subespacios afines de \mathcal{E}

I.8.3 Sean A y B dos puntos distintos de un espacio afín \mathcal{E} sobre E . Por A y B , pasa una recta afín única, y esta recta es el conjunto de los puntos de la forma $\lambda.A + (1 - \lambda).B$ ($\lambda \in \mathbf{R}$).

Demostración

a) Para que una recta afín D pase por A y B , es necesario y suficiente que pase por A y que esté dirigida por el vector \overrightarrow{AB} : de ahí la existencia y la unicidad de tal recta D .

b) Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, pongamos $G_\lambda = \lambda.A + (1 - \lambda).B$. Por definición se tiene:

$$\overrightarrow{AG_\lambda} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AB},$$

lo cual hace ver que la aplicación $\lambda \mapsto G_\lambda$ es una biyección de \mathbf{R} sobre D .]

La proposición I.8.3 admite la generalización siguiente:

I.8.4 Para que una parte no vacía \mathcal{V} de un espacio afín \mathcal{E} sea subespacio afín de \mathcal{E} , es necesario y suficiente que se tenga:

$$(4) \quad (\forall A, B \in \mathcal{V}) \quad (\forall \lambda \in \mathbf{R}) \quad \lambda.A + (1 - \lambda).B \in \mathcal{V}.$$

Demostración. Es evidente, que si \mathcal{V} es una variedad afín, la relación (4) queda verificada (ya que expresa el hecho de que el punto $B + \lambda \overrightarrow{BA}$ pertenece a \mathcal{V}). Recíprocamente, supongamos realizada la condición (4) y sea $\Omega \in \mathcal{V}$. Sean $M, N \in \mathcal{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Al tomar, en (4), $A = M$, $B = \Omega$ y $\lambda = \alpha$, se ve que el punto $P = \Omega + \alpha \overrightarrow{\Omega M}$, pertenece a \mathcal{V} ; del mismo modo, el punto $Q = \Omega + \beta \overrightarrow{\Omega N}$ pertenece a \mathcal{V} ; si ahora hacemos $A = P$, $B = Q$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, se ve que el punto $R = \Omega + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\Omega P} + \overrightarrow{\Omega Q})$ pertenece a \mathcal{V} . Tomando finalmente $B = \Omega$ y $\lambda = 2$, se ve que el punto $\Omega + (\alpha \overrightarrow{\Omega M} + \beta \overrightarrow{\Omega N}) = \Omega + (\overrightarrow{\Omega P} + \overrightarrow{\Omega Q})$ pertenece a \mathcal{V} . Queda así demostrado que el conjunto de los vectores $(\overrightarrow{\Omega M})$, cuando M recorre \mathcal{V} , es un subespacio vectorial de E . Esto demuestra que \mathcal{V} es una subvariedad afín ⁽¹⁾.]

El enunciado I.8.4 se puede expresar como sigue:

Para que una parte no vacía \mathcal{V} de un espacio afín sea una variedad afín, es necesario y suficiente que toda recta afín que una dos puntos distintos de \mathcal{V} esté contenida en \mathcal{V} ⁽¹⁾.

Otra generalización de I.8.3 es:

⁽¹⁾ Según se comprueba, este razonamiento sólo puede extenderse si \mathbf{R} se sustituye por un cuerpo conmutativo K de característica $\neq 2$. Se puede demostrar por otra parte que si K es de característica 2, el teorema I.8.4 es falso.

Teorema I.8.5

|| Sea \mathcal{S} una parte no vacía del espacio afín \mathcal{E} . La **variedad afín** \mathcal{V} **engendrada** por \mathcal{S} es igual al **conjunto** \mathcal{B} de los **baricentros** de los **sistemas ponderados** $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de masa no nula tales que $A_i \in \mathcal{S}$ para todo $i \in I$ ⁽¹⁾.

Demostración. Sea Ω un punto de \mathcal{S} . Se puede suponer $\mathcal{S} \neq \{\Omega\}$ (de lo contrario el resultado sería evidente).

a) Establezcamos la inclusión $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$; sea $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ un sistema ponderado de masa no nula tal que $A_i \in \mathcal{S}$ para todo $i \in I$. Su baricentro G está definido por

$$\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{S} \overrightarrow{\Omega A_i}, \quad \text{con } S = \sum_{i \in I} \lambda_i.$$

Para todo $i \in I$, $\overrightarrow{\Omega A_i}$ es elemento de la dirección V de \mathcal{V} . La relación anterior hace ver pues que $\overrightarrow{\Omega G} \in V$, de donde: $G \in \mathcal{V}$.

b) Establezcamos la inclusión $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$. Sea $M \in \mathcal{V}$: Puesto que V es engendrado por las $(\overrightarrow{\Omega A})_{A \in \mathcal{S}, A \neq \Omega}$, existen reales $(\lambda_A)_{A \in \mathcal{S}, A \neq \Omega}$, casi todos nulos, tales que

$$(5) \quad \overrightarrow{\Omega M} = \sum_{A \in \mathcal{S}, A \neq \Omega} \lambda_A \overrightarrow{\Omega A};$$

pongamos

$$\lambda_\Omega = 1 - \sum_{A \in \mathcal{S}, A \neq \Omega} \lambda_A.$$

La relación (5) se escribe entonces

$$\overrightarrow{\Omega M} = \sum_{A \in \mathcal{S}} \lambda_A \overrightarrow{\Omega A}, \quad \text{con } \sum_{A \in \mathcal{S}} \lambda_A = 1,$$

lo cual demuestra que M es el baricentro del sistema $(A, \lambda_A)_{A \in \mathcal{S}}$.

El concepto de baricentro permite también caracterizar las aplicaciones afines:

Teorema I.8.6

|| Sean \mathcal{E} y \mathcal{F} dos espacios afines respectivamente sobre E y F y sea $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación. Para que φ sea **afín**, es necesario y suficiente que se tenga, para todos los $A, B \in \mathcal{E}$ y todos los $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tales que $\lambda + \mu = 1$,

⁽¹⁾ Contrariamente a I.8.4, este teorema —y su demostración— siguen siendo válidos cuando se sustituye \mathbf{R} por un cuerpo conmutativo cualquiera. Recordemos por otra parte que el espacio \mathcal{E} no se supone de dimensión finita.

$$\parallel \quad (6) \quad \varphi(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot \varphi(A) + \mu \cdot \varphi(B) . \quad (1)$$

Demostración. Fijemos un punto cualquiera Ω de \mathcal{E} .

a) Supongamos que φ sea afín, de parte lineal f . Con las notaciones del enunciado, se tiene:

$$\lambda \cdot A + \mu \cdot B = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega A} + \mu \overrightarrow{\Omega B} ,$$

de donde:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) &= \varphi(\Omega) + f(\lambda \overrightarrow{\Omega A} + \mu \overrightarrow{\Omega B}) \\ &= \varphi(\Omega) + \lambda f(\overrightarrow{\Omega A}) + \mu f(\overrightarrow{\Omega B}) \\ &= \varphi(\Omega) + \lambda \overrightarrow{\varphi(\Omega) \varphi(A)} + \mu \overrightarrow{\varphi(\Omega) \varphi(B)} \\ &= \lambda \cdot \varphi(A) + \mu \cdot \varphi(B) , \end{aligned}$$

es decir (6).

b) Supongamos que se cumple la condición enunciada: Se trata de demostrar que la aplicación $f: E \rightarrow F$ definida por

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad f(\overrightarrow{\Omega M}) = \overrightarrow{\Omega' M'} ,$$

con $\Omega' = \varphi(\Omega)$, $M' = \varphi(M)$, es lineal.

En primer lugar, sean $\lambda \in \mathbf{R}$ y $M, N \in \mathcal{E}$ tales que $\overrightarrow{\Omega N} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$; esta relación puede escribirse en la forma:

$$N = \lambda \cdot M + (1 - \lambda) \cdot \Omega ,$$

de donde

$$\varphi(N) = \lambda \cdot \varphi(M) + (1 - \lambda) \cdot \varphi(\Omega) ,$$

o sea:

$$(7) \quad f(\overrightarrow{\Omega N}) = \lambda f(\overrightarrow{\Omega M}) .$$

De igual modo, sean $M, N \in \mathcal{E}$ y sea P el punto de \mathcal{E} tal que $2 \overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{\Omega N}$; esta relación puede escribirse en la forma:

$$P = \frac{1}{2} \cdot M + \frac{1}{2} \cdot N ,$$

de donde:

$$\varphi(P) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(M) + \frac{1}{2} \cdot \varphi(N) ,$$

o sea:

$$f(\overrightarrow{\Omega P}) = \frac{1}{2} [f(\overrightarrow{\Omega M}) + f(\overrightarrow{\Omega N})] .$$

(1) Si se sustituye \mathbf{R} por un cuerpo conmutativo K de característica $\neq 2$, el teorema I.8.6 sigue siendo válido, lo mismo que su demostración. Por el contrario, si K es de característica 2, I.8.6 es falso (véase ejercicio I.22).

Al utilizar (7) se obtiene:

$$(8) \quad f(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{\Omega N}) = 2f(\overrightarrow{\Omega P}) = f(\overrightarrow{\Omega M}) + f(\overrightarrow{\Omega N}).$$

Las relaciones (7) y (8), válidas para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ y todos los $M, N \in \mathcal{E}$, hacen ver que f es lineal.]

Mediante una extensión fácil de la parte a) de la demostración I.8.6 se obtiene:

I.8.7 Sean \mathcal{E} y \mathcal{F} dos espacios afines y sea $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación. Para que φ sea **afín**, es necesario y suficiente que, para todo sistema ponderado $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de puntos de \mathcal{E} tales que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, se tenga:

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot A_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \varphi(A_i) \quad (1).$$

§ I.9 COORDENADAS BARICÉNTRICAS

En un espacio afín \mathcal{E} , sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de puntos. Supongamos que, para un valor $i \in I$, la familia $(\overrightarrow{A_i A_k})_{k \in I, k \neq i}$ sea libre. Esto se cumplirá entonces para todo $i \in I$.

Supongamos en efecto que exista una relación de la forma

$$\sum_{k \in I, k \neq j} \lambda_k \overrightarrow{A_j A_k} = 0,$$

donde el índice $j \in I$ es fijo ($j \neq i$) y donde los reales λ_k son casi todos nulos. Se deduce de ello:

$$\sum_{k \neq j} \lambda_k \overrightarrow{A_j A_i} + \sum_{k \neq j} \lambda_k \overrightarrow{A_i A_k} = 0,$$

o sea

$$(1) \quad \sum_{k \neq i} \mu_k \overrightarrow{A_i A_k} = 0$$

poniendo

$$\mu_k = \lambda_k \quad \text{si } k \neq j \quad \text{y} \quad \mu_j = - \sum_{k \neq j} \lambda_k.$$

(1) Contrariamente a I.8.6, este resultado sigue siendo válido cuando se sustituye \mathbf{R} por un cuerpo conmutativo K cualquiera.

Al ser libre la familia $(\overrightarrow{A_i A_k})_{k \neq i}$ la relación (1) implica $\mu_k = 0$ para $k \neq i$, de donde $\lambda_k = 0$ si $k \neq i$ y $k \neq j$. Luego resulta $\mu_j = -\lambda_i$, y la relación $\mu_j = 0$ implica $\lambda_i = 0$, y finalmente, todos los coeficientes λ_k son nulos, que era lo que hacía falta establecer. Podemos decir:

Definición I.9.1

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Una familia } (A_i)_{i \in I} \text{ de puntos de un espacio afín } \mathcal{E} \text{ se dice que es afínmente} \\ \text{libre, si, para un índice } i, \text{ la familia } (A_i A_j)_{j \neq i, j \in I} \text{ es libre (lo cual se cum-} \\ \text{plirá entonces para todo } i \in I). \end{array} \right.$

De modo paralelo, se dice que la familia $(A_i)_{i \in I}$ **engendra** \mathcal{E} si la variedad afín $\mathcal{V} = \text{Aff}((A_i)_{i \in I})$ es igual a \mathcal{E} . Decir que la familia $(A_i)_{i \in I}$ es afínmente libre significa que la familia $(A_i A_j)_{j \in I, j \neq i}$ es una **base del subespacio vectorial V dirección de \mathcal{V}** .

Definición I.9.2

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se da el nombre de } \mathbf{base\ afín} \text{ de un espacio afín } \mathcal{E}, \text{ a toda familia afín-} \\ \text{mente libre de puntos de } \mathcal{E} \text{ que engendre a } \mathcal{E}. \end{array} \right.$

Toda familia afínmente libre de puntos de \mathcal{E} es por lo tanto una *base afín* de la variedad afín que engendra.

Supongamos al conjunto I finito, de cardinal $m \geq 1$; según la observación que precede a la definición I.9.2, la variedad afín engendada por una familia afínmente libre $(A_i)_{i \in I}$ es de *dimensión* $m - 1$.

Ejemplos

Las bases afines de una *recta afín* \mathcal{D} son los distintos pares de puntos de \mathcal{D} . Las bases afines de un *plano afín* \mathcal{P} son las ternas de puntos no alineados de \mathcal{P} .

Caso de las variedades de dimensión finita

I.9.1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sea } (A_1, A_2, \dots, A_{p+1}) \text{ una sucesión de } (p + 1) \text{ puntos de un espacio afín } \mathcal{E} \\ \text{y sea } \mathcal{H} \text{ el hiperplano afín de } \mathbf{R}^{p+1} \text{ de ecuación} \end{array} \right.$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+1} = 1.$$

Entonces la aplicación $\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}$, que hace corresponder al punto $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1})$ de \mathcal{H} el punto $\lambda_1 \cdot A_1 + \dots + \lambda_{p+1} \cdot A_{p+1}$ de \mathcal{E} , es **afín**. Su imagen es la **variedad afín** engendrada por los puntos A_i , y para que γ sea **inyectiva**, es necesario y suficiente que la familia $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ sea **afínmente libre**.

Demostración. Nos limitaremos a demostrar el último aserto (puesto que los demás son evidentes, si se tiene en cuenta I.8.5 y I.8.6).

Para que γ sea inyectiva, es necesario y suficiente que su *parte lineal* g lo sea. Ahora bien, si $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ designa la base canónica del espacio vectorial \mathbf{R}^{p+1} , se tiene:

$$g(\vec{e}_i - \vec{e}_1) = \overrightarrow{A_1 A_i} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, p+1;$$

y los vectores $(\vec{e}_i - \vec{e}_1)_{2 \leq i \leq p+1}$ constituyen una *base* del espacio vectorial H dirección de \mathcal{H} . Para que g sea inyectiva, es pues necesario y suficiente que los vectores $\overrightarrow{A_1 A_i}$ ($2 \leq i \leq p+1$) sean independientes; dicho de otro modo, es necesario y suficiente que la familia $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ sea libre, lo cual demuestra el resultado.]]

Este resultado nos permite dar la siguiente

Definición I.9.3

Sea $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ una familia **afínmente libre** del espacio afín \mathcal{E} y sea $\mathcal{V} = \text{Aff}((A_i))$ la variedad afín que engendra. Las **coordenadas baricéntricas homogéneas** de un punto M de \mathcal{V} son los números λ_i ($1 \leq i \leq p+1$) definidos de manera única mediante:

$$M = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \cdot A_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1.$$

Con las notaciones de I.9.1 los números λ_i son las coordenadas en \mathbf{R}^{p+1} del punto $\lambda = \gamma^{-1}(M)$.

Observación. Las únicas sucesiones $(\mu_1, \dots, \mu_{p+1}) \in \mathbf{R}^{p+1}$ tales que el baricentro del sistema (A_i, μ_i) está definido y es igual a M , son las sucesiones $(k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_{p+1})$ donde $k \in \mathbf{R}^*$. Se dice a veces que una tal sucesión $(\mu_1, \dots, \mu_{p+1})$ es un sistema de *coordenadas baricéntricas homogéneas* de M . Estos sistemas son por lo tanto todos proporcionales.

Señalemos el resultado que sigue, el cual establecerá el lector, a título de ejercicio, utilizando I.9.1, y conservando las mismas notaciones:

I.9.2 Sean \mathcal{E} , \mathcal{F} dos espacios afines, siendo \mathcal{E} de dimensión finita n y $(A_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ una **base afín** de \mathcal{E} . Para todo sistema $(B_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de $n+1$ puntos de \mathcal{F} , existe una **aplicación afín única** $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\varphi(A_i) = B_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n+1$. Esta aplicación está definida por

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot B_i \quad \text{para } (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}.$$

Es **inyectiva**, si, y solamente si, la sucesión (B_i) es **afínmente libre**; es **suprayectiva** si, y solamente si, la sucesión (B_i) **engendra** \mathcal{F} .

Parametrización baricéntrica de las variedades afines

Sigamos con las notaciones del teorema I.9.1, en el caso en que la familia (A_1, \dots, A_{n+1}) sea *afínmente libre*; pongamos $\mathcal{V} = \text{Aff}((A_i))$ y sea V la dirección de \mathcal{V} . Finalmente, sea $\Omega \in \mathcal{E}$ un punto fijo. Según I.9.1, se obtiene una *biyección* de \mathcal{H} sobre \mathcal{V} asociando, a cada punto $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ de \mathcal{H} , el punto G_λ de \mathcal{E} definido por:

$$(9) \quad \boxed{\overrightarrow{\Omega G_\lambda} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \overrightarrow{\Omega A_i}}.$$

Esta biyección recibe el nombre de *parametrización baricéntrica* de \mathcal{V} . Sea entonces U el conjunto de los puntos $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n+1})$ de \mathbf{R}^{n+1} tales que

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} \neq 0.$$

Según la observación anterior, se obtiene una *aplicación suprayectiva* de U sobre \mathcal{V} asociando a cada punto $\mu = (\mu_i)$ de U el punto G_μ definido por

$$(9\text{bis}) \quad \boxed{\overrightarrow{\Omega G_\mu} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+1}} \cdot \overrightarrow{\Omega A_i}};$$

además, los sistemas $\mu = (\mu_i)$ para los que el punto G_μ es un punto fijo G de \mathcal{V} son *dos a dos proporcionales*. La fórmula (9 bis) se reduce a (9) si $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1$.

Por extensión de (9), se sigue diciendo que la suprayección definida por (9 bis) es una *parametrización baricéntrica* de \mathcal{V} . Resulta a veces más cómodo parametrizar \mathcal{V} con ayuda de (9 bis) en vez de hacerlo mediante (9): todo punto $G \in \mathcal{V}$

queda entonces definido mediante un sistema de *coordenadas baricéntricas homogéneas* $(\mu_1, \dots, \mu_{n+1})$.

Vamos a explicitar (9 bis) en un sistema de referencia afín de origen Ω de \mathcal{E} , en el caso en que \mathcal{E} es de *dimensión finita* $n \geq 2$, para $p = 1$ y $p = 2$.

Caso $p = 1$: (*parametrización baricéntrica de una recta afín \mathcal{D}*). Se pone $A_1 = A$, $A_2 = B$ ($A \neq B$) y $\mathcal{V} = \mathcal{D}$. En el sistema de referencia considerado, sean (a_1, \dots, a_n) , (b_1, \dots, b_n) y (x_1, \dots, x_n) las coordenadas respectivas de A , B y G_μ . Se obtiene la parametrización baricéntrica homogénea de \mathcal{D} :

$$x_1 = \frac{\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2}{\mu_1 + \mu_2}, \dots, x_n = \frac{\mu_1 a_n + \mu_2 b_n}{\mu_1 + \mu_2} \quad (\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}, \mu_1 + \mu_2 \neq 0)$$

Para que dos pares (μ_1, μ_2) y (μ'_1, μ'_2) definan el mismo punto de \mathcal{D} , es necesario y suficiente que exista un $k \in \mathbf{R}^*$ tal que $\mu'_1 = k\mu_1$, $\mu'_2 = k\mu_2$. Si M_t designa el punto de \mathcal{D} de coordenadas

$$x_i = \frac{a_i + tb_i}{1 + t} \quad 1 \leq i \leq n,$$

se deduce que la aplicación $t \rightarrow M_t$ es una biyección de $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ sobre $\mathcal{D} \setminus \{B\}$.

Si se designa por $\tilde{\mathbf{R}}$ la recta proyectiva (obtenida adjuntando a \mathbf{R} un único punto en el infinito, designado por ∞), se puede prolongar esta aplicación en una biyección de $\tilde{\mathbf{R}} \setminus \{-1\}$ sobre \mathcal{D} poniendo $M_\infty = B$.

Caso $p = 2$: (*parametrización baricéntrica de un plano afín*). Se pone $A_1 = A$, $B_1 = B$, $C_1 = C$, $\mathcal{V} = \mathcal{P}$ (los puntos A , B , C del plano \mathcal{P} son no alineados). En el sistema de referencia considerado, sean (a_1, \dots, a_n) , (b_1, \dots, b_n) , (c_1, \dots, c_n) y (x_1, \dots, x_n) las coordenadas de A , B , C y G_μ . Se obtiene la parametrización baricéntrica homogénea del plano \mathcal{P} :

$$x_1 = \frac{\mu_1 a_1 + \mu_2 b_1 + \mu_3 c_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \dots, x_n = \frac{\mu_1 a_n + \mu_2 b_n + \mu_3 c_n}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{R}, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \neq 0).$$

Para que dos ternas (μ_1, μ_2, μ_3) y (μ'_1, μ'_2, μ'_3) definan el mismo punto de \mathcal{P} , es necesario y suficiente que exista un $k \in \mathbf{R}^*$ tal que $\mu'_1 = k\mu_1$, $\mu'_2 = k\mu_2$, $\mu'_3 = k\mu_3$.

§ I.10 TRANSFORMACIONES AFINES PARTICULARES

En este apartado, vamos a estudiar algunas biyecciones afines particulares de un espacio afín \mathcal{E} , ligado al espacio vectorial E . En todo lo que sigue, se supone $E \neq \{0\}$. Recordemos las notaciones:

$GA(\mathcal{E})$: Grupo afín de \mathcal{E} .

$T(\mathcal{E})$: Grupo de las traslaciones (que es un subgrupo distinguido de $GA(\mathcal{E})$).

Sea a un punto de \mathcal{E} , designaremos por $GA_a(\mathcal{E})$ al subgrupo de los $\varphi \in GA(\mathcal{E})$ tales que $\varphi(a) = a$. Esta condición equivale a decir que φ es un *automorfismo* del espacio vectorial \mathcal{E}_a ; cada grupo $GA_a(\mathcal{E})$ es pues isomorfo a $GL(E)$. Además, si $a, b \in \mathcal{E}$, los grupos $GA_a(\mathcal{E})$ y $GA_b(\mathcal{E})$ son *conjugados* en $GA(\mathcal{E})$, pues designando por τ la traslación de vector \overrightarrow{ab} , se tiene:

$$GA_b(\mathcal{E}) = \tau \cdot GA_a(\mathcal{E}) \cdot \tau^{-1}.$$

El resultado elemental que sigue resulta muchas veces útil:

I.10.1 Sea a un punto dado de \mathcal{E} ; cada elemento φ de $GA(\mathcal{E})$ admite:

- | |
|--|
| $\left\ \begin{array}{l} \text{a) } \text{Una descomposición única de la forma } \varphi = \psi \circ \tau, \text{ tal que} \\ \psi(a) = a \quad \text{y} \quad \tau \in T(\mathcal{E}) \\ \text{b) } \text{Una descomposición única de la forma } \varphi = \tau' \circ \psi', \text{ tal que} \\ \psi'(a) = a \quad \text{y} \quad \tau' \in T(\mathcal{E}). \end{array} \right.$ |
|--|

Demostración (abreviada). Para establecer a) designemos por A al punto $\varphi^{-1}(a)$. Si φ admite una descomposición que verifique a), se tiene necesariamente $\tau(A) = a$: el vector de la traslación τ no puede ser otro que $\overrightarrow{VA} = \overrightarrow{Aa}$, lo cual demuestra la unicidad de esta descomposición. Recíprocamente, la traslación τ de vector \overrightarrow{Aa} y la biyección afín $\psi = \varphi \circ \tau^{-1}$ verifican $\psi(a) = a$ y $\varphi = \psi \circ \tau$.

De manera análoga se establecería b).]

Grupo de las homotecias y traslaciones

Definición I.10.1

Sea $\alpha \in \mathbf{R}$ y $\Omega \in \mathcal{E}$. La **homotecia** (se sobreentiende: afín) de centro Ω y de razón α es la aplicación $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ definida por:

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \overrightarrow{\Omega M'} = \alpha \overrightarrow{\Omega M}, \quad \text{con} \quad M' = \varphi(M).$$

Si $\alpha = 0$, φ es constante; de lo contrario $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$, y φ^{-1} es la homotecia del mismo centro y de razón $1/\alpha$. Convendremos en llamar «homotecias» sin más a las homotecias biyectivas (es decir de razón $\neq 0$). Las homotecias de razón 0 (o sea las aplicaciones constantes de \mathcal{E} en \mathcal{E}) se evidenciarán siempre claramente por el contexto.

Si $\alpha = 1$, φ es la aplicación idéntica $\text{Id}_{\mathcal{E}}$. Si $\alpha \neq 1$, Ω es el *único punto doble* de φ . Para $\alpha = -1$, φ toma el nombre de **simetría central** de centro Ω . En todos los casos, es inmediato que φ coincide con la *homotecia vectorial de razón α* en el espacio vectorial \mathcal{E}_{Ω} . Esto demuestra que *la parte lineal de φ es la homotecia vectorial de razón α en E* .

Teorema I.10.2

|| Sea φ un elemento de $\text{GA}(\mathcal{E})$ cuya parte lineal f es una homotecia vectorial de razón α en E . Entonces φ es una **traslación** si $\alpha = 1$, y una **homotecia** si $\alpha \neq 1$.

Demostración. Para que φ sea una traslación, es necesario y suficiente que $f = \text{Id}_E$ (véase § 4) lo cual se cumple si, y solamente si, $\alpha = 1$ (ya que $E \neq \{0\}$).

Suponiendo ahora $\alpha \neq 1$, todo se reduce a demostrar que φ admite un punto doble. Elijamos un punto A en \mathcal{E} y sea $A' = \varphi(A)$. Se tiene por hipótesis:

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \overrightarrow{A'M'} = \alpha \overrightarrow{AM}, \quad \text{con } M' = \varphi(M).$$

La relación $M' = M$ equivale a $\alpha \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = 0$, y se cumple por lo tanto si, y solamente si, M es el *baricentro* del sistema ponderado $((A, \alpha), (A', -1))$; de donde resulta la existencia de un punto doble único Ω de φ , definido por

$$\overrightarrow{A\Omega} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{1-\alpha} . \quad \text{.} \quad \text{.}$$

Corolario 1

|| Sea $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una **aplicación** tal que existe un punto A de \mathcal{E} y un real α que verifican:

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \overrightarrow{A'M'} = \alpha \overrightarrow{AM}, \quad \text{con } A' = \varphi(A) \text{ y } M' = \varphi(M).$$

|| Si $\alpha \neq 1$, φ es una **homotecia de razón α** , y si $\alpha = 1$, φ es una **traslación** (eventualmente igual a $\text{Id}_{\mathcal{E}}$).

En efecto, una tal aplicación φ es necesariamente afín, y su parte lineal f verifica $f(\vec{u}) = \vec{\alpha u}$ para todo $u \in E$.]

Corolario 2

|| Sea $L : \text{GA}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{GL}(E)$ el homomorfismo que, a toda biyección de \mathcal{E} , asocia su parte lineal, y sea H el grupo de las homotecias de E . Entonces el grupo $L^{-1}(H)$ es la reunión del **grupo** $T(\mathcal{E})$ de las traslaciones de E y del **conjunto** de las homotecias de \mathcal{E} .

El grupo $L^{-1}(H)$ recibe el nombre de **grupo de las homotecias y traslaciones** de \mathcal{E} . Lo designaremos por ello en adelante por $\text{HT}(\mathcal{E})$.

Por ser H un subgrupo distinguido de $\text{GL}(E)$ (véanse páginas 7 y 21), $\text{HT}(\mathcal{E})$ es un subgrupo distinguido de $\text{GA}(\mathcal{E})$ y se deduce de L un *isomorfismo canónico*:

$$\text{GA}(\mathcal{E})/\text{HT}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} \text{GL}(E)/H$$

Por ser el núcleo $T(\mathcal{E})$ de L un subgrupo de $\text{HT}(\mathcal{E})$, se tiene también un isomorfismo canónico

$$\text{HT}(\mathcal{E})/T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} H$$

(recordemos que H es isomorfo a \mathbf{R}^*).

Observación. Algunos autores llaman *dilataciones* a los elementos de $\text{HT}(\mathcal{E})$. En este libro, la palabra *dilatación* tendrá un sentido totalmente distinto, de acuerdo con la terminología de Nicolas Bourbaki (véase más adelante). Alguna vez utilizaremos sin embargo la expresión «dilataciones homogéneas» para designar a los elementos de $\text{HT}(\mathcal{E})$.

Proyecciones

Sea \mathcal{V} un hiperplano afín de \mathcal{E} , de dirección V .

Entonces *toda recta afín \mathcal{D} no paralela a \mathcal{V} corta a \mathcal{V} en un punto y sólo uno.*

En efecto, sea $A \in \mathcal{D}$, sea \vec{v} un vector director de \mathcal{D} y $\varphi = 0$ una ecuación de \mathcal{V} .

El punto $M_\lambda = A + \lambda \vec{v}$ pertenece a \mathcal{V} si, y solamente si, se tiene:

$$\varphi(A + \lambda \vec{v}) = 0,$$

es decir (designando por f la parte lineal de φ):

$$\varphi(A) + \lambda f(\vec{v}) = 0.$$

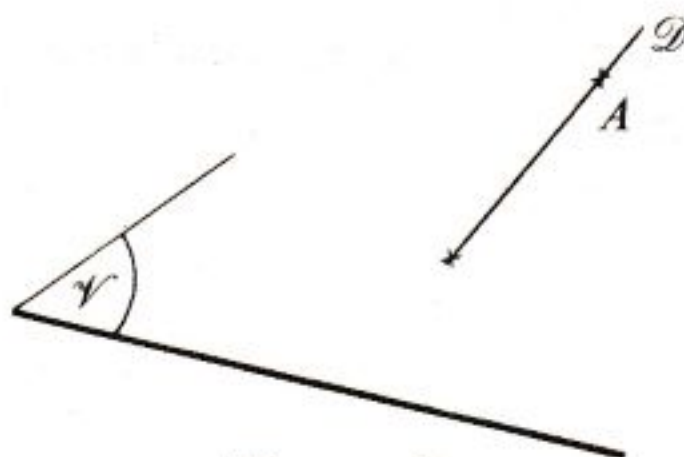


Figura 2.

Por hipótesis, $f(\vec{v}) \neq 0$; por lo tanto la relación anterior define un valor único de λ , con lo que queda demostrado nuestro aserto. Esta propiedad permite dar la siguiente

Definición I.10.2

Sea \mathcal{V} un hiperplano de \mathcal{E} de dirección V y sea D una recta vectorial suplementaria de V . Se da el nombre de **proyección sobre \mathcal{V} paralelamente a D** , a la aplicación $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ que, a cada punto M de \mathcal{E} , asocia el punto de intersección de \mathcal{V} con la recta afín de dirección D que pasa por M .

Con estas notaciones se comprueba inmediatamente que φ es una *aplicación afín*, cuya parte lineal es la *proyección sobre V paralelamente a D* (para establecerlo, basta con tomar un origen Ω en \mathcal{V} con lo que se pasa al espacio vectorial \mathcal{E}_Ω). Se tiene además: $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Todos los puntos de \mathcal{V} , son fijos para φ .

Dilataciones afines

Definición I.10.3

Sea \mathcal{V} un hiperplano de \mathcal{E} , D una recta vectorial de E no paralela a \mathcal{V} . Para todo $M \in \mathcal{E}$, designemos por m la proyección de M sobre \mathcal{V} para-

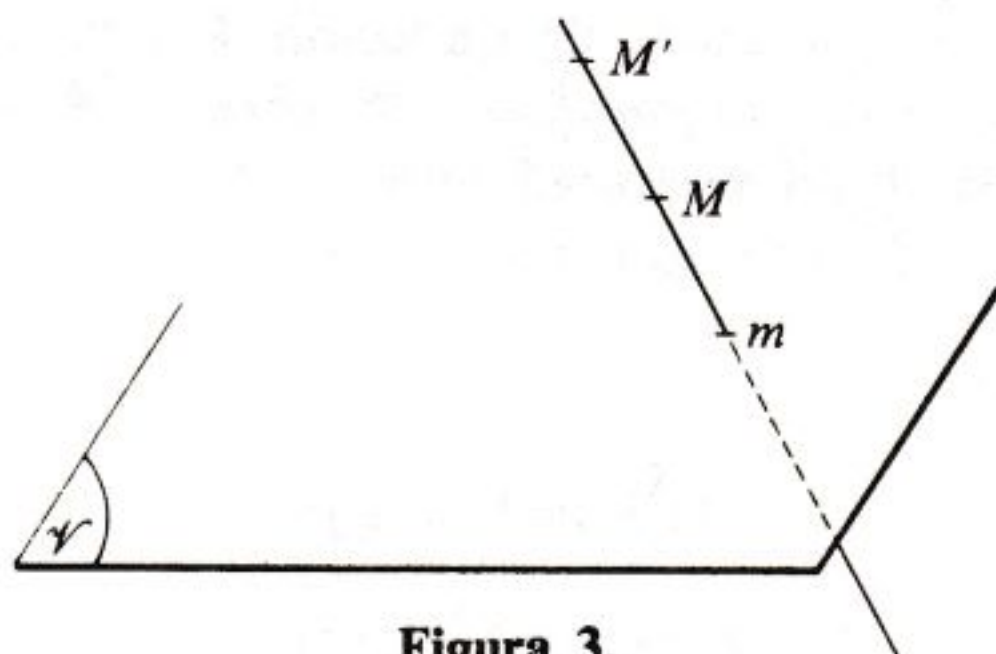


Figura 3.

lamente a D . Finalmente, sea α un real $\neq 0$. Se da el nombre de **dilatación de hiperplano \mathcal{V} de dirección D y de razón α** a la aplicación $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ que, a cada punto M de \mathcal{E} asocia el punto M' tal que $\overrightarrow{mM'} = \alpha, \overrightarrow{mM}$.

Conservemos estas notaciones y sea V la dirección de \mathcal{V} . Fácilmente se ve que para todo $\Omega \in \mathcal{V}$, φ coincide con la *dilatación vectorial* de hiperplano \mathcal{V} , de razón α y de eje \mathcal{D} en el espacio vectorial \mathcal{E}_Ω , designando por \mathcal{D} la recta afín de dirección D que pasa por Ω . De esto se deduce que φ es una *biyección afín* de \mathcal{E} , cuya parte lineal es la *dilatación vectorial de E de hiperplano V , de eje D y de razón α* (véase § 2).

Para que φ se reduzca a la aplicación idéntica $\text{Id}_{\mathcal{E}}$, es necesario y suficiente que sea $\alpha = 1$.

● Si $\alpha = -1$, se dice que φ es la **simetría afín** de dirección D con relación a \mathcal{V} . Es este el único caso en que φ es involutiva.

Si $\alpha \neq 1$, los únicos puntos fijos de φ son los puntos de \mathcal{V} . Elijamos entonces un punto A de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{V}$ y sea $A' = \varphi(A)$ su transformado.

Vamos a determinar geoméricamente la imagen $M' = \varphi(M)$ de un punto M que no pertenezca a la recta (AA') . Para ello utilizaremos el hecho de que *la imagen por φ de una recta afín es una recta afín*.

Si la recta (MA) es paralela a \mathcal{V} , el punto M' queda determinado por la relación $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ (véase la figura 4). De lo contrario, la recta (MA) corta a \mathcal{V} en un punto único I ; la imagen de la recta (IA) por φ es la recta (IA') , y por ser el vector $\overrightarrow{MM'}$ colineal con $\overrightarrow{AA'}$, el punto M' es la intersección de la recta (IA') con la paralela a D que pasa por M (véase la figura 5).

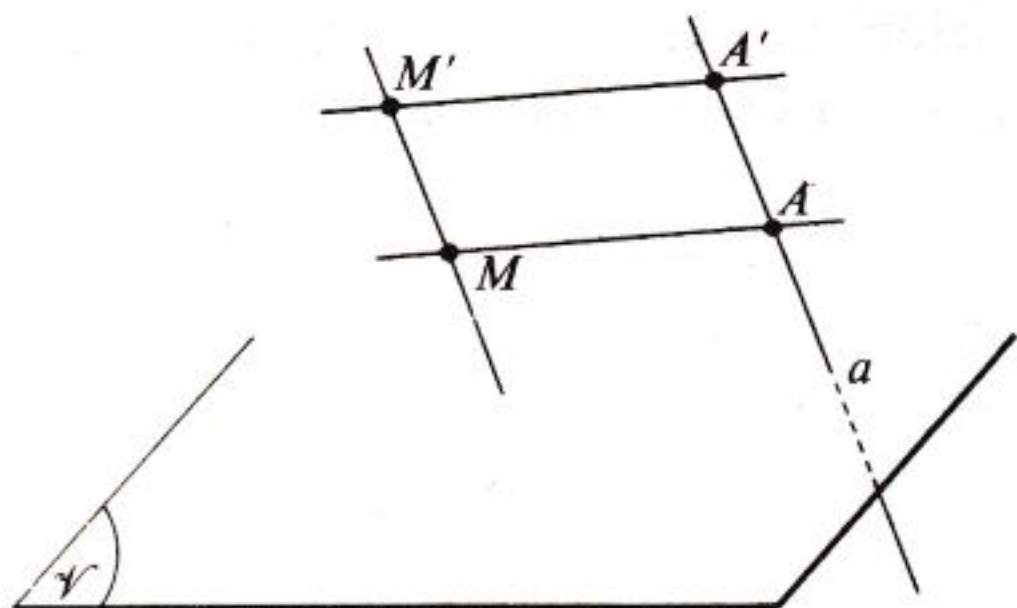


Figura 4.

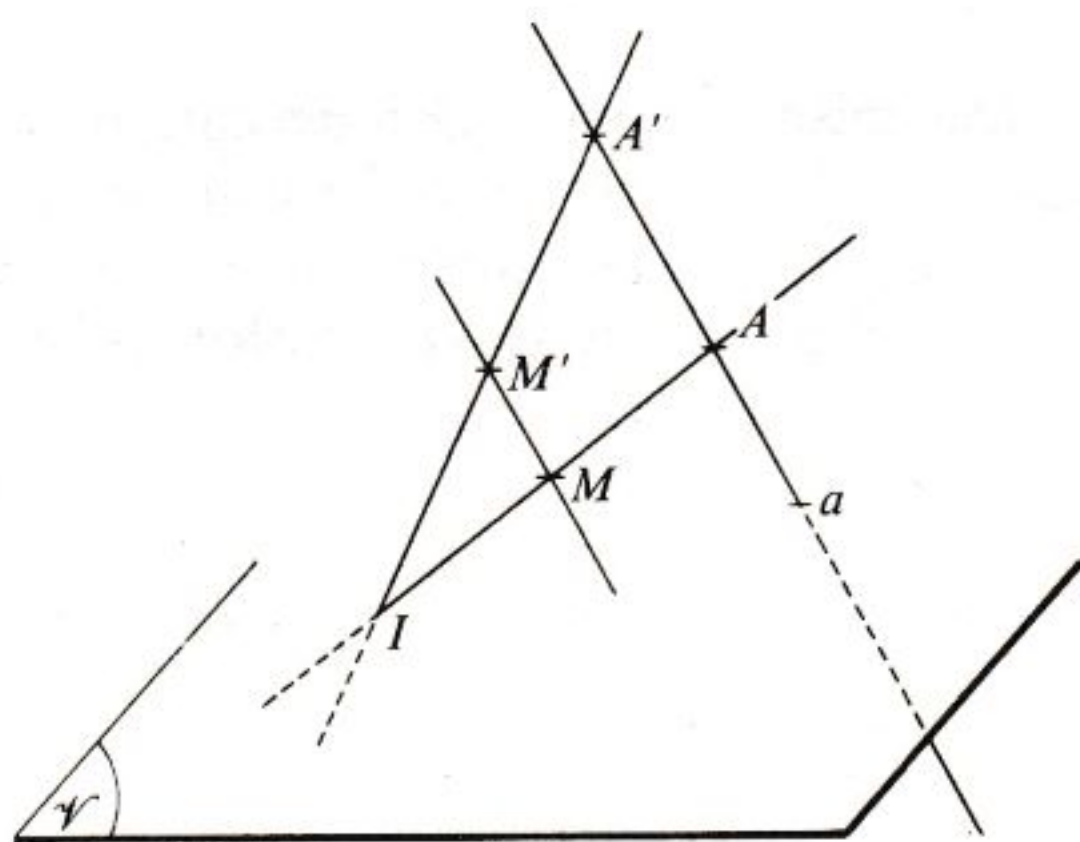


Figura 5.

Transvecciones afines (en lo que sigue se supone que \mathcal{E} es de dimensión ≥ 2).

Definición I.10.4

Sea \mathcal{V} un hiperplano de \mathcal{E} , de dirección V . Se da el nombre de **transvección (afín) de hiperplano \mathcal{V}** a toda aplicación $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de la forma:

$$M \mapsto \theta(M) = M + \varphi(M) \vec{v},$$

donde $\varphi = 0$ es una ecuación de \mathcal{V} y donde \vec{v} es un elemento **no nulo** de V .

Colocándonos en un espacio vectorial \mathcal{E}_Ω , con $\Omega \in \mathcal{V}$ se ve en seguida que θ es una transvección vectorial de hiperplano \mathcal{V} en \mathcal{E}_Ω . Se deduce de esto que θ es una *biyección afín*, cuya *parte lineal* τ es una transvección vectorial de hiperplano V en E .

Toda aplicación afín que tenga por lo menos un punto fijo O queda reducida, al pasar a \mathcal{E}_O , a una aplicación lineal.

Esta observación nos permite deducir de I.2.3 el resultado que sigue:

I.10.3 Sea θ una biyección afín de \mathcal{E} , distinta de $\text{Id}_{\mathcal{E}}$, y sea \mathcal{V} un hiperplano afín de \mathcal{E} , de dirección V .

Para que θ sea una **transvección afín de hiperplano \mathcal{V}** , es necesario y suficiente que se tenga:

$$(\forall M \in \mathcal{V}) \quad \theta(M) = M,$$

y

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \overrightarrow{MM'} \in V, \text{ (donde } M' = \theta(M)).$$

Del mismo modo, I.2.5 permite estudiar las biyecciones afines que dejan fijos todos los puntos de un hiperplano afín.

Sigamos con las notaciones de la definición I.10.4. Elijamos un punto A de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{V}$ y sea $A' = \theta(A)$ su transformado. Vamos a determinar geoméricamente el

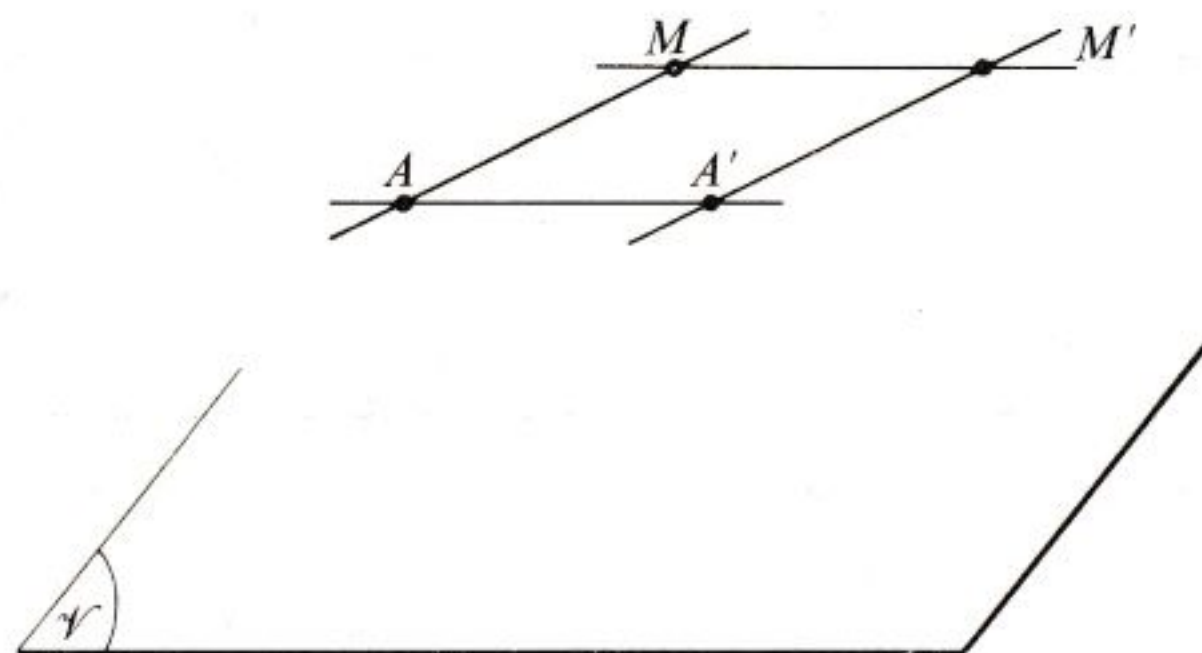


Figura 6.

transformado $M' = \theta(M)$ de un punto cualquiera M de \mathcal{E} , y para ello, vamos a utilizar otra vez aquí el hecho de que la imagen de una recta afín es una recta afín.

Si la recta (MA) es paralela a \mathcal{V} , el punto M' queda determinado por la relación $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ (véase figura 6). De lo contrario, la recta (MA) corta a \mathcal{V} en un punto único I ; la imagen de la recta (MA) es la recta (IA') , y puesto que el vector $\overrightarrow{MM'}$ es colineal con $\overrightarrow{AA'}$, M' es el punto de intersección de la recta (IA') con la paralela a la recta (AA') que pasa por M (véase la figura 7).

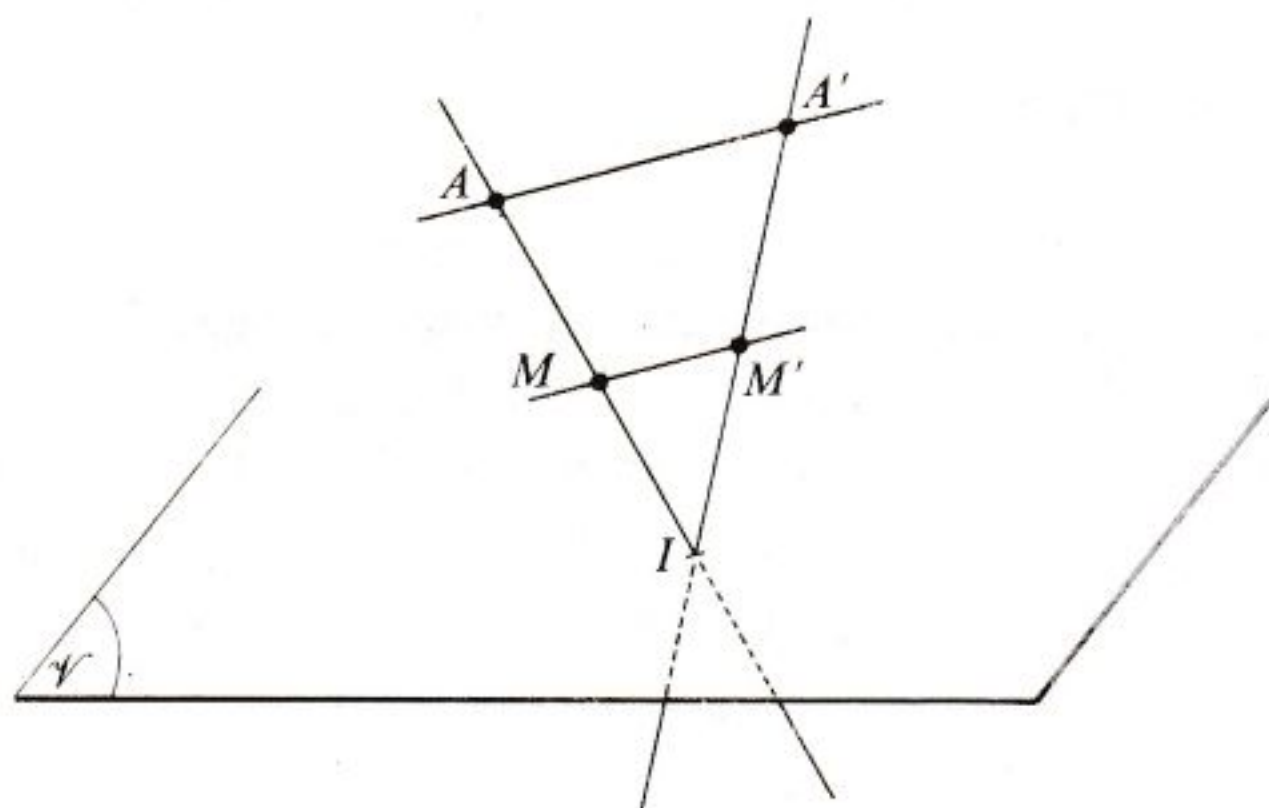


Figura 7.

§ I.11 CONVEXIDAD

Sean A, B dos puntos distintos de un espacio afín \mathcal{E} sobre E . Sabemos que la aplicación $\lambda \mapsto \lambda.A + (1 - \lambda).B = M_\lambda$ es una *biyección* de \mathbb{R} sobre la recta (afín) que pasa por A y B .

El conjunto de los puntos $(\lambda.A + (1 - \lambda).B)_{\lambda \in [0, 1]}$ recibe el nombre de *segmento cerrado* de extremos A y B , y será designado por $[A, B]$.

De igual modo se definen los *segmentos semiabiertos* $[A, B[$ y $]A, B]$ y el *segmento abierto* $]A, B[$, imágenes respectivas por $\lambda \mapsto M_\lambda$ de los intervalos $[0, 1[$, $]0, 1]$ y $]0, 1[$ de \mathbb{R} .

Definición I.11.1

Una parte Γ de un espacio afín \mathcal{E} sobre E se dice es que **convexa**, si cualesquiera que sean los puntos A y B de Γ , el segmento $[A, B]$ está contenido en Γ .

Todas estas definiciones se aplican en particular a los espacios vectoriales provistos de su estructura afín natural.

El teorema que sigue muestra la relación que existe entre el concepto de conjunto convexo y el de baricentro:

Teorema I.11.1

Sea Γ una parte no vacía del espacio afín \mathcal{E} sobre E . Para que Γ sea **convexa** es necesario y suficiente que **para toda familia** $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ **de puntos ponderados de Γ** , tal que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo i , el baricentro $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot A_i$ pertenezca a Γ .

Demostración. La condición es suficiente según la definición I.11.1. Para demostrar que es necesaria, basta considerar el caso en que el conjunto I es finito, de la forma $I = \mathbf{N}_p^* = \{1, 2, \dots, p\}$, con $p \geq 2$. Razonemos por inducción sobre el entero p . Para $p = 2$, el resultado se desprende de la definición I.11.1. Suponiendo que el resultado sea cierto para $p - 1$, con $p \geq 3$, designemos por (A_1, A_2, \dots, A_p) los puntos del conjunto convexo Γ y por $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ reales positivos tales que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

Si uno de los λ_i es nulo, de la hipótesis de recurrencia se desprende que el punto $\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot A_i$ pertenece a Γ . De lo contrario, la asociatividad permite poner:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot A_i = S \cdot G + \lambda_p \cdot A_p = S \cdot G + (1 - S) \cdot A_p,$$

con

$$S = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \quad \text{y} \quad G = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{S} \cdot A_i.$$

Según la hipótesis de recurrencia, se tiene $G \in \Gamma$. Y según la definición I.11.1, el punto $S \cdot G + (1 - S) \cdot A_p$ pertenece a Γ (ya que $S > 0$ y $1 - S > 0$).]

Ejemplos de conjuntos convexos

1. Las partes convexas de \mathbf{R} son los *intervalos*.

2. Sea \mathcal{V} una *variedad afín* del espacio afín \mathcal{E} .

Para todos los $A, B \in \mathcal{V}$, la recta (AB) está contenida en \mathcal{V} y con mayor razón, el segmento $[A, B]$ está contenido en \mathcal{V} , por lo tanto \mathcal{V} es *convexo*.

3. En un espacio vectorial normado E (véase tomo 2, §III.2) toda bola B es *convexa*.

Basta evidentemente probarlo cuando B es una bola de radio $r > 0$ con centro en el origen. Demostremoslo, por ejemplo, cuando B es una bola abierta: Si $x \in B$ e $y \in B$ se tiene, para todo real $\lambda \in [0, 1]$:

$$\| \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \| = \| \lambda x + (1 - \lambda)y \|$$

de donde, por la desigualdad triangular:

$$\| \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \| \leq \| \lambda x \| + \| (1 - \lambda) y \| = \lambda \| x \| + (1 - \lambda) \| y \| .$$

De $\|x\| < r$ y $\|y\| < r$, se deduce por lo tanto:

$$\| \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \| < (\lambda + (1 - \lambda)) r = r ,$$

lo cual prueba que: $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in B$. Este ejemplo es muy importante para el estudio de los espacios vectoriales normados (véase los ejercicios I.38 a I.44).

Se observará que la *adherencia* de una parte convexa de E (véase tomo 2, p. 56) es convexa (véase ejercicio I.38).

4. Sea E el espacio vectorial de las funciones numéricas cualesquiera definidas sobre un conjunto no vacío X . Una función $f \in E$ se dice que es *positiva* cuando se tiene:

$$(\forall x \in X) \quad f(x) \geq 0 \quad (\text{notación: } f \geq 0).$$

Entonces, el conjunto E_+ de las funciones positivas sobre X es *convexo*.

5. Sea E un espacio vectorial, Γ una parte convexa no vacía de E y $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ una función numérica.

Entonces, para que la *función* f sea convexa (véase tomo 2, def. VI.2.4), es necesario y suficiente que el conjunto de los puntos $(x, t) \in E \times \mathbf{R}$ tales que $x \in \Gamma$ y $t \geq f(x)$ sea una parte *convexa* de $E \times \mathbf{R}$ (véase tomo 2, teorema VI.2.3).

I.11.2 || Sea $(\Gamma_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos convexos de un espacio afín \mathcal{E} . Entonces la intersección $\Gamma = \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ es un conjunto convexo.

(Esta proposición se desprende inmediatamente de la definición I.11.1).

Teorema I.11.3

|| Sea $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación **afín** del espacio afín \mathcal{E} en el espacio afín \mathcal{F} . Entonces:

- a) Para toda parte convexa Γ de \mathcal{E} , el conjunto $\Delta = \varphi(\Gamma)$ es convexo.
- b) Para toda parte convexa Δ de \mathcal{F} , el conjunto $\Gamma = \varphi^{-1}(\Delta)$ es convexo.

Demostración

a) Sean $A', B' \in \varphi(\Gamma)$ y sean $A, B \in \Gamma$ tales que $A' = \varphi(A)$ y $B' = \varphi(B)$. Por ser φ afín, se tiene para todo real λ :

$$(1) \quad \varphi(\lambda.A + (1 - \lambda).B) = \lambda.\varphi(A) + (1 - \lambda).\varphi(B).$$

Por hipótesis, para todo $\lambda \in [0, 1]$, el punto $\lambda.A + (1 - \lambda).B$ pertenece a Γ . Se tiene por lo tanto, según (1)

$$(\forall \lambda \in [0, 1]) \quad \lambda.A' + (1 - \lambda).B' \in \varphi(\Gamma),$$

lo cual demuestra que $\varphi(\Gamma)$ es convexo.

b) Sean $A, B \in \mathcal{E}$ tales que $\varphi(A) \in \Delta$ y $\varphi(B) \in \Delta$.

Para todo real λ , se tiene:

$$\varphi[\lambda.A + (1 - \lambda).B] = \lambda.\varphi(A) + (1 - \lambda).\varphi(B).$$

Ahora bien, para todo $\lambda \in [0, 1]$, el punto $\lambda.\varphi(A) + (1 - \lambda).\varphi(B)$ pertenece a Δ ; por lo tanto $\lambda.A + (1 - \lambda).B$ pertenece a $\varphi^{-1}(\Delta) = \Gamma$, lo cual demuestra que Γ es convexa.]]

Semiespacios definidos por un hiperplano afín

En el espacio afín \mathcal{E} , sea \mathcal{H} un hiperplano afín de ecuación $\varphi = 0$, donde $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ designa una función afín no constante.

Según I.11.3, los cuatro conjuntos $\varphi^{-1}(\mathbf{R}_+)$, $\varphi^{-1}(\mathbf{R}_-)$, $\varphi^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$ y $\varphi^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$ son convexos. Se les da el nombre de *semiespacios* definidos por (\mathcal{H}, φ) .

Precisando más, los conjuntos $\mathcal{E}_+ = \varphi^{-1}(\mathbf{R}_+)$ y $\mathcal{E}_- = \varphi^{-1}(\mathbf{R}_-)$ reciben el nombre de *semiespacios amplios* definidos por (\mathcal{H}, φ) , y los conjuntos $\mathcal{E}_+^* = \varphi^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$ y $\mathcal{E}_-^* = \varphi^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$ reciben el nombre de *semiespacios estrictos* definidos por (\mathcal{H}, φ) .

Sea $\psi = 0$ otra ecuación de \mathcal{H} . Sabemos que existe un $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tal que $\psi = \lambda\varphi$ (véase T.I.7.1).

— Si $\lambda > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\mathbf{R}_+) &= \mathcal{E}_+, & \psi^{-1}(\mathbf{R}_-) &= \mathcal{E}_- \\ \psi^{-1}(\mathbf{R}_+^*) &= \mathcal{E}_+^*, & \psi^{-1}(\mathbf{R}_-^*) &= \mathcal{E}_-^*. \end{aligned}$$

— Si $\lambda < 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\mathbf{R}_+) &= \mathcal{E}_-, & \psi^{-1}(\mathbf{R}_-) &= \mathcal{E}_+ \\ \psi^{-1}(\mathbf{R}_+^*) &= \mathcal{E}_-^*, & \psi^{-1}(\mathbf{R}_-^*) &= \mathcal{E}_+^*. \end{aligned}$$

Se ve por lo tanto que el conjunto de los dos semiespacios amplios (respectivamente estrictos) no depende de la ecuación considerada $\varphi = 0$ de \mathcal{H} . Se puede por lo tanto hablar de *semiespacios amplios definidos por \mathcal{H}* y de *semiespacios estrictos definidos por \mathcal{H}* .

Observemos que se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_-^* &= \mathcal{E}_- \cap \mathcal{E}_+^* = \emptyset \\ \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{E}_- &= \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Estando definido el hiperplano \mathcal{H} por $\varphi = 0$, sean $A \in \mathcal{E}_-^*$ y $B \in \mathcal{E}_+$. La aplicación $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto \varphi(\lambda.A + (1 - \lambda).B)$ es afín, verifica $g(0) \geq 0$, $g(1) < 0$, y se anula por lo tanto para un valor de λ único, que pertenece a $[0, 1[$. Dicho de otro modo, el conjunto $]A, B] \cap \mathcal{H}$ está constituido por un solo punto.

En consecuencia, todo segmento que une un punto de \mathcal{E}_-^* con un punto de \mathcal{E}_+^* corta a \mathcal{H} en un solo punto. De esto se deduce que \mathcal{E}_+^* y \mathcal{E}_-^* son las *clases de equivalencia* determinadas sobre $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ por la relación de equivalencia « A es equivalente a B si el segmento $[AB]$ no corta a \mathcal{H} ». Esta relación de equivalencia se suele traducir diciendo que «los puntos A y B quedan a un mismo lado de \mathcal{H} ».

Observación. Cuando \mathcal{E} es de dimensión finita, los adjetivos «amplio» y «estricto» pueden sustituirse respectivamente por «cerrado» y «abierto». En efecto, \mathcal{E} está provisto entonces de una topología natural isomorfa a la de \mathbf{R}^n (véase tomo 2, III.12); y, para esta topología, toda función afín $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ es continua. Un semiespacio amplio [resp. estricto] es por lo tanto cerrado [resp. abierto], como imagen recíproca de un cerrado [resp. abierto] de \mathbf{R} por una tal aplicación φ .

Envoltura convexa

Sea Γ una parte de un espacio afín \mathcal{E} sobre E . Existen partes convexas de \mathcal{E} que contienen a Γ , por ejemplo el mismo \mathcal{E} . La intersección de todas estas partes es, según I.II.2, una parte convexa. Se establece:

Definición I.11.2

Sea Γ una parte de un espacio afín \mathcal{E} . Se da el nombre de **envoltura convexa** de Γ a la intersección de todos los conjuntos convexas de \mathcal{E} que contienen a Γ .

La envoltura convexa de Γ es por lo tanto una parte convexa. En lo que sigue la vamos a designar por $\hat{\Gamma}$. Se tiene siempre: $\Gamma \subset \hat{\Gamma}$. Para que sea $\Gamma = \hat{\Gamma}$,

es necesario y suficiente que Γ sea *convexa*. Por lo tanto, para toda parte Γ de se tiene:

$$\hat{\Gamma} = (\hat{\Gamma}) .$$

Observemos que $\hat{\Gamma}$ es el *conjunto convexo más pequeño que contiene a Γ* . Si Γ es vacío, ocurriría lo mismo con $\hat{\Gamma}$.

Ejemplo

Sea Γ una parte no vacía de \mathbf{R} . Pongamos $\alpha = \inf(\Gamma)$ y $\beta = \sup(\Gamma)$ en $\overline{\mathbf{R}}$. Se tiene:

si	$\alpha \in \Gamma$ y $\beta \in \Gamma$,	$\hat{\Gamma} = [\alpha, \beta]$
si	$\alpha \in \Gamma$ y $\beta \notin \Gamma$,	$\hat{\Gamma} = [\alpha, \beta[$
si	$\alpha \notin \Gamma$ y $\beta \in \Gamma$,	$\hat{\Gamma} =]\alpha, \beta]$
si	$\alpha \notin \Gamma$ y $\beta \notin \Gamma$,	$\hat{\Gamma} =]\alpha, \beta[$

El concepto de *baricentro* permite una generación de la envoltura convexa:

Teorema I.11.4

Sea Γ una parte no vacía de un espacio afín \mathcal{E} . Entonces la envoltura convexa $\hat{\Gamma}$ de Γ es el **conjunto de los báricentros**

$$(1) \quad \sum_{i \in I} m_i \cdot A_i ,$$

donde $(A_i)_{i \in I}$ es una familia cualquiera de puntos de Γ , y $(m_i)_{i \in I}$ una familia arbitraria de reales positivos casi todos nulos tal que $\sum_{i \in I} m_i = 1$.

Demostración. Sea B el conjunto de los puntos de la forma (1). Según I.11.1 se tiene $B \subset \hat{\Gamma}$, ya que $\hat{\Gamma}$ es convexa, y tomando para I , en (1), un conjunto reducido a un elemento, se ve que $\Gamma \subset B$. Basta por lo tanto establecer que B es convexo. Para ello, observemos en primer lugar que todo punto de la forma (1) puede ponerse bajo la forma

$$(2) \quad \sum_{A \in \Gamma} \lambda_A \cdot A , \quad \text{donde} \quad (\lambda_A)_{A \in \Gamma}$$

es una familia de reales casi todos nulos tal que $\lambda_A \geq 0$ para todo $A \in \Gamma$ y $\sum_{A \in \Gamma} \lambda_A = 1$ ⁽¹⁾.

Sea por lo tanto $U = \sum_{A \in \Gamma} \lambda_A \cdot A$ y $V = \sum_{A \in \Gamma} \mu_A \cdot A$ dos puntos de B puestos en la forma (2) y sea α un real tal que $0 < \alpha < 1$. Pongamos $v_A = \alpha \lambda_A + (1 - \alpha) \mu_A$: los v_A son ≥ 0 , casi todos nulos, y verifican $\sum_{A \in \Gamma} v_A = 1$. Por otra parte, tomando un origen cualquiera en \mathcal{E} , se verifica que:

$$\alpha \cdot U + (1 - \alpha) \cdot V = \sum_{A \in \Gamma} v_A \cdot A.$$

Esta relación hace ver que el punto $\alpha \cdot U + (1 - \alpha) \cdot V$ pertenece a B , por lo tanto B es convexo.]]

Observación. Es claro que en I.11.4, se puede uno limitar a las familias $(A_i, m_i)_{i \in I}$ para las cuales I es finito y donde $m_i > 0$ para todo i .

§ 1.12 SISTEMAS DE REFERENCIA. ORIENTACIÓN DE LOS ESPACIOS AFINES DE DIMENSIÓN FINITA

- En este § consideramos exclusivamente espacios vectoriales o afines de dimensión finita $n \geq 1$.

Si E es un espacio vectorial de dimensión n , una base ordenada de E es una sucesión $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de n vectores independientes de E . Si \mathcal{E} es un espacio afín de dimensión n , un sistema de referencia ordenado $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de \mathcal{E} queda definido cuando se da un punto Ω de \mathcal{E} y una base ordenada del espacio vectorial asociado (véase § 3).

El adjetivo «ordenado» sólo se utilizará cuando sea necesario, para dejar bien sentado que se trata de una base de \mathcal{E} con índices de \mathbf{N}_n^* .

⁽¹⁾ Para escribir en la forma (2) el punto definido mediante (1), se pone:

$$\lambda_A = 0 \quad \text{si } A \in \Gamma \text{ y } A \neq A_i \text{ para todo } i \in I,$$

$$\lambda_A = \sum_{A_i = A, i \in I} m_i \quad \text{si existe } i \in I \text{ tal que } A = A_i$$

Se comprueba en seguida que se tiene:

$$\sum_{A \in \Gamma} \lambda_A = 1, \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} m_i \cdot A_i = \sum_{A \in \Gamma} \lambda_A \cdot A$$

Cambios de sistema de referencia

Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre E , de dimensión n . Dejando fijo el sistema de referencia $\mathcal{R} = (\Omega; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \mathcal{E} , la aplicación

$$\mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{E}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \Omega + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

es una *biyección*.

Dado un segundo sistema de referencia $\mathcal{R}' = (\Omega'; \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ de \mathcal{E} , vamos a determinar las relaciones entre las coordenadas de un mismo punto en \mathcal{R} y en \mathcal{R}' .

Designemos por:

— P la matriz de paso de la base (\vec{e}_i) a la base (\vec{e}'_i) ;

— b la matriz columna $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, donde (b_1, \dots, b_n) es la sucesión de las coordenadas de Ω' en \mathcal{R} .

\mathcal{X} y \mathcal{X}' las matrices columna $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ donde $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $(x'_i)_{1 \leq i \leq n}$ son res-

pectivamente las coordenadas del punto $M \in \mathcal{E}$ en \mathcal{R} y en \mathcal{R}' .

La relación $\vec{\Omega M} = \vec{\Omega \Omega'} + \vec{\Omega' M}$ muestra que la matriz columna \mathcal{X}_1 de las coordenadas de $\vec{\Omega' M}$ en la base (\vec{e}_i) es:

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} - b;$$

por otra parte, la fórmula del cambio de base en un espacio vectorial permite escribir:

$$\mathcal{X}_1 = P\mathcal{X}'.$$

De lo cual se deduce:

(1)

$$\mathcal{X} = b + P\mathcal{X}'$$

o sea escribiéndolo explícitamente:

(1bis)

$$x_i = b_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x'_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

estando la matriz $P = [a_{ij}]$ definida por

$$\vec{e}'_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} \vec{e}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

se vuelve a encontrar fácilmente (1 bis) a partir de (1) mediante las relaciones:

$$\overrightarrow{\Omega M} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \overrightarrow{\Omega \Omega'} + \overrightarrow{\Omega' M} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n x'_i \vec{e}'_i.$$

Se observará que al dar P y ℓ queda definida la posición del «nuevo sistema de referencia» \mathcal{R}' con relación al «antiguo» \mathcal{R} , y que estos datos permiten expresar de manera inmediata las «antiguas coordenadas» x_i en función de «las nuevas» x'_i .

Expresión de una aplicación afín mediante sistemas de referencia

Designemos por \mathcal{E} , \mathcal{F} dos espacios afines de dimensiones respectivas n , p ; por $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación afín y por f su parte lineal. Sea $\mathcal{R} = (\Omega; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un sistema de referencia de \mathcal{E} , $\mathcal{R}' = (\Omega'; \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_p)$ un sistema de referencia de \mathcal{F} , y designemos por:

- \mathcal{Q} la matriz de f en las bases $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_p)$;
- \mathcal{X} la matriz columna de las coordenadas de un punto de M de \mathcal{E} en el sistema de referencia \mathcal{R} ;
- \mathcal{Y} la matriz columna de las coordenadas en \mathcal{R}' del punto $M' = \varphi(M)$;
- \mathcal{T} la matriz columna de las coordenadas en \mathcal{R}' del punto $A' = \varphi(A)$.

Se tiene: $\overrightarrow{\Omega' M'} = \overrightarrow{\Omega' A'} + \overrightarrow{A' M'}$ y $\overrightarrow{A' M'} = f(\overrightarrow{AM})$. La matriz columna de las coordenadas de $\Omega' M'$ en \mathcal{R}' es por lo tanto \mathcal{QX} . Se deduce:

(2)

$$\mathcal{Y} = \mathcal{T} + \mathcal{QX}.$$

Para explicitar (2) pongamos $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_p \end{bmatrix}$ y $\mathcal{Q} = [q_{ij}]_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$. Se obtiene

(2bis)

$$y_i = \tau_i + \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

Recíprocamente, toda aplicación de \mathcal{E} en \mathcal{F} definida mediante fórmulas del tipo (2)-(2 bis) es afín. Observemos que las matrices \mathcal{U} y \mathcal{Q} quedan determinadas de manera única cuando se dan φ , \mathcal{R} , \mathcal{R}' .

Por ejemplo, sea $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ una función afín, de parte lineal f . Designando por (u_1, u_2, \dots, u_n) las componentes de f en la base dual (\vec{e}_i^*) de (\vec{e}_i) , se tiene (véase comienzo del § I.6)

(3)

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \varphi(M) = C + \sum_{i=1}^n u_i x_i, \quad \text{con} \quad C = \varphi(\Omega);$$

recíprocamente, toda aplicación $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ definida mediante una fórmula del tipo (3) es afín; los coeficientes (C, u_1, \dots, u_n) quedan definidos de manera única cuando se dan φ y \mathcal{R} .

Volvamos a las notaciones anteriores. Si $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ y si $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es una biyección, se puede (habiendo dado \mathcal{R}) tomar como \mathcal{R}' el sistema de referencia definido por $\Omega' = \varphi(\Omega)$ y $\vec{e}'_i = f(\vec{e}_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ (por abuso de lenguaje, a este sistema \mathcal{R}' se le podrá dar el nombre de «imagen» de \mathcal{R} por φ). Elegido de esta manera \mathcal{R}' , las ecuaciones (2 bis) se reducen a $y_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Observación. Todo lo que llevamos dicho desde el comienzo de este § sigue siendo válido sin modificación alguna cuando se sustituye el cuerpo de base \mathbf{R} por un cuerpo conmutativo cualquiera. No ocurre lo mismo con lo que va a seguir.

Orientación de un espacio vectorial real

Sea E un espacio vectorial de dimensión n ; para toda base ordenada $\alpha = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ de E y para todo sistema de vectores $X = (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n)$, designaremos por $\Delta_\alpha(X)$, o por $\Delta_\alpha(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n)$, al *determinante de los n vectores $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ en la base α* (véase tomo 1, ver def. X.1.4).

Recordemos que $\Delta_\alpha(X)$ es el valor, para la n -upla $(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n)$, de la única forma n -lineal alternada φ sobre E tal que $\varphi(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 1$; $\Delta_\alpha(X)$ es también el determinante del endomorfismo único u de E tal que $u(\vec{a}_i) = \vec{X}_i$ para todo i (véase tomo 1, cap. X); es por lo tanto el escalar $\det(M)$, donde M designa la *matriz* del sistema de los (\vec{X}_i) sobre la base (\vec{a}_i) . Se tiene evidentemente $\Delta_\alpha(\alpha) = 1$.

Designemos por $\beta = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ otra base de E y denotemos por:

- P la matriz de paso de los (\vec{a}_i) a los (\vec{b}_i) ,
- M la matriz del sistema de vectores (\vec{X}_i) en la base (\vec{a}_i) ,
- N la matriz de este mismo sistema en la base (\vec{b}_i) .

Se tiene:

$$M = PN, \text{ de donde } \det(M) = \det(P) \det(N),$$

es decir:

$$(4) \quad \boxed{\Delta_\alpha(X) = \Delta_\alpha(\beta) \times \Delta_\beta(X)}.$$

La relación (4) recibe a veces el nombre de *fórmula de Chasles* para los determinantes de n vectores.

Sobre el conjunto \mathcal{B} de las bases ordenadas de E , la relación binaria definida por

$$(5) \quad \Delta_\alpha(\beta) \in \mathbf{R}_+^* \quad (\alpha \in \mathcal{B}, \beta \in \mathcal{B})$$

es una *relación de equivalencia*, como se desprende de (4) y del hecho de ser $\Delta_\alpha(\alpha) = 1$ para toda base α .

Las clases de esta relación reciben el nombre de *clases de orientación* de E .

I.12.1 \parallel *Sobre todo espacio vectorial de dimensión finita, existen exactamente dos clases de orientación.*

Demostración

a) Existen por lo menos dos clases, ya que si $\alpha = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ es una base de E , la base $\beta = (-\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ verifica $\Delta_\alpha(\beta) = -1$ y no es equivalente a α .

b) Existen a lo sumo dos clases: en efecto, sean α, β, γ tres bases ordenadas; según (4), se tiene: $\Delta_\alpha(\gamma) = \Delta_\alpha(\beta) \Delta_\beta(\gamma)$, por lo tanto, entre los tres reales no nulos $\Delta_\alpha(\beta), \Delta_\beta(\gamma), \Delta_\alpha(\gamma)$, uno por lo menos de ellos es > 0 . Dicho de otro modo, dos por lo menos de las tres bases α, β, γ son equivalentes.]

Dos bases equivalentes se dirá que tienen **la misma orientación**; en caso contrario, se dirá que tienen *orientaciones opuestas*.

Definición I.12.1

§ **Orientar** un espacio vectorial E , consiste en elegir una de las dos clases de orientación de E , cuyos elementos reciben entonces el nombre de **bases**

$\left\{ \begin{array}{l} \text{directas. Las bases pertenecientes a la otra clase de orientación reciben} \\ \text{el nombre de indirectas o retrógradas.} \end{array} \right.$

Existen por lo tanto sobre E dos orientaciones posibles: estas dos orientaciones se dice que son *opuestas*.

Orientación y grupo lineal

Sigamos con la consideración de un espacio vectorial E de dimensión $n \geq 1$; el conjunto $GL_+(E)$ constituido por los $u \in GL(E)$ tales que $\det(u) \in \mathbf{R}_+^*$ forma un subgrupo de $GL(E)$. Este subgrupo es *propio* (es decir distinto de $GL(E)$), ya que la aplicación $u \mapsto \det(u)$ de $GL(E)$ en \mathbf{R}^* es *suprayectiva* (véase § I.1).

Pongamos $D(u) = +1$ si $u \in GL_+(E)$ y $D(u) = -1$ si $u \in GL(E) \setminus GL_+(E)$. La fórmula $\det(v \circ u) = \det(v) \det(u)$ muestra que D es *homomorfismo* del grupo $GL(E)$ en el grupo multiplicativo $K = \{-1, +1\}$; D es *suprayectiva* según se ha visto y, por definición, el núcleo de D es $GL_+(E)$. Por lo tanto $GL_+(E)$ es un subgrupo distinguido de $GL(E)$, siendo el grupo cociente

$$GL(E)/GL_+(E)$$

isomorfo de K .

Sean entonces $\alpha = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ y $\beta = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ dos bases de E . Designemos por u al automorfismo único tal que $u(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$ para todo i . Por definición, para que α y β tengan la misma orientación, es necesario y suficiente que se tenga: $u \in GL_+(E)$. Se deduce:

I.12.2 Sea $\alpha = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ una base del espacio vectorial E , y para todo $u \in GL(E)$ sea α_u la base $(u(\vec{a}_1), u(\vec{a}_2), \dots, u(\vec{a}_n))$. Para que se tenga: $u \in GL_+(E)$, es necesario y suficiente que las bases α y α_u tengan la misma orientación.
En consecuencia, si se orienta E de manera que la base α sea directa, la aplicación $u \mapsto \alpha_u$ es una biyección de $GL_+(E)$ sobre el conjunto de las bases directas y de $GL(E) \setminus GL_+(E)$ sobre el conjunto de las bases retrógradas.

Permutación de los vectores de una base

Sea, como siempre, $\alpha = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ una base de E . Para toda permutación $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, designemos por $\sigma^*(\alpha)$ la base $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$, donde se ha puesto $\vec{b}_i = \vec{a}_{\sigma^{-1}(i)}$ para todo i .

Según las propiedades de los determinantes (véase tomo 1, cap. X), se tiene:

$$\Delta_x[\sigma^*(\alpha)] = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma),$$

donde $\varepsilon(\sigma)$ designa la *signatura* de la permutación σ . Por lo tanto: *para que α y $\sigma^*(\alpha)$ tengan la misma orientación, es necesario y suficiente que la permutación σ sea par.*

Se demuestra fácilmente que, si u_σ designa el automorfismo de E definido por $u_\sigma(\vec{a}_i) = \vec{a}_{\sigma^{-1}(i)}$ para todo i , la aplicación $\sigma \rightarrow u_\sigma$ es un *homomorfismo inyectivo* de \mathfrak{S}_n en $GL(E)$. Según lo que antecede, este homomorfismo aplica el grupo alternando \mathcal{A}_n en $GL_+(E)$ (véase tomo 1, cap. II), y el conjunto $\mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ en $GL(E) \setminus GL_+(E)$.

Ejemplo

Supongamos $n = 3$. Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es una base directa de E , las bases $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ y $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ son directas; y las bases $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$, $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$, $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ son retrógradas.

Orientación de un espacio afín

Por definición, *orientar* un espacio afín \mathcal{E} , consiste en elegir una orientación sobre el espacio vectorial asociado E .

Sea $n = \dim(E)$ y sea \mathcal{S} el abierto de $\mathcal{E} \times E^n$ constituido por el conjunto de los sistemas de referencia ordenados de \mathcal{E} . Es evidente que la relación binaria «las bases de E asociadas a los sistemas de referencia \mathcal{R} , \mathcal{R}' tienen la misma orientación» es una relación de equivalencia sobre \mathcal{S} ; esta relación determina dos clases de equivalencia. Si E está orientado, una de las clases está formada por los sistemas de referencia cuya base asociada es directa: *estos sistemas de referencia se dice que son directos*; la otra clase está constituida por los sistemas de referencia cuya base asociada es retrógrada: a éstos se les llama *indirectos* o *retrógrados*.

El conjunto $GA_+(\mathcal{E})$ formado por las biyecciones afines de \mathcal{E} sobre \mathcal{E} cuya parte lineal pertenece a $GL_+(E)$, es un subgrupo distinguido de índice 2 del grupo afín $GA(\mathcal{E})$, y de la proposición I.12.2 se desprende inmediatamente:

I.12.3 Sea $\mathcal{R} = (\Omega; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ un sistema de referencia directo del espacio afín orientado \mathcal{E} , y para toda biyección afín $\varphi \in GA(\mathcal{E})$, sea \mathcal{R}_φ el sistema de referencia

$$(\varphi(\Omega); u(\vec{a}_1), \dots, u(\vec{a}_n)),$$

donde u es la parte lineal de φ . Entonces $\varphi \mapsto \mathcal{R}_\varphi$ es una **biyección** de $GA_+(\mathcal{E})$ sobre el conjunto de los **sistemas de referencia directos** de \mathcal{E} y una **biyección** de $GA(\mathcal{E}) \setminus GA_+(\mathcal{E})$ sobre el conjunto de los **sistemas de referencia indirectos** de \mathcal{E} .

§ I.13 RECTAS DE DIMENSIÓN 2

En un plano afín \mathcal{E}_2 las rectas afines se confunden con los hiperplanos afines. En un sistema de referencia fijo de \mathcal{E}_2 , una recta afín queda por lo tanto definida mediante una ecuación cartesiana de la forma $ux + vy + h = 0$, donde u, v, h son constantes tales que $(u, v) \neq (0, 0)$ y donde (x, y) son las coordenadas en el sistema de referencia elegido. La terna (u, v, h) queda determinada salvo un factor multiplicativo no nulo cuando se da la recta en consideración (véase § I.7).

— Para el estudio de la intersección de dos rectas afines \mathcal{D} y \mathcal{D}' , se puede consultar los manuales elementales. Recordemos la terminología: \mathcal{D} y \mathcal{D}' se dice que son *secantes* (o *concurrentes*) cuando no son paralelas; ello equivale a decir que tienen en común un punto único.

Supongamos \mathcal{D} y \mathcal{D}' definidas mediante sus ecuaciones respectivas en un mismo sistema de referencia, o sea:

$$ux + vy + h = 0, \quad u'x + v'y + h' = 0;$$

para que \mathcal{D} y \mathcal{D}' sean secantes, es necesario y suficiente que se tenga:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0.$$

— Sean M_1, M_2, M_3 tres puntos de \mathcal{E}_2 , de coordenadas respectivas $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 3}$ es un sistema de referencia fijo. Para que los puntos M_i estén alineados, es necesario y suficiente que existan reales (u, v, h) tales que

$$(u, v) \neq (0, 0) \quad \text{y} \quad ux_i + vy_i + h = 0$$

para $i = 1, 2, 3$. Estas relaciones constituyen un *sistema lineal homogéneo* de tres ecuaciones con las incógnitas (u, v, h) .

Si este sistema admite una solución no nula, su determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{es nulo.}$$

Recíprocamente, si $\Delta = 0$, existen reales (u, v, h) tales que $ux_i + vy_i + h = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y $(u, v, h) \neq (0, 0, 0)$. Si se tuviera $u = v = 0$, se deduciría de ello que $h = 0$. Se tiene por lo tanto que $(u, v) \neq (0, 0)$. Finalmente, hemos demostrado que M_1, M_2 y M_3 están alineados si, y solamente si, se tiene:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

— Sean ahora tres rectas afines \mathcal{D} , \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' , de ecuaciones respectivas

$$ux + vy + h = 0, \quad u'x + v'y + h' = 0, \quad u''x + v''y + h'' = 0$$

en un sistema de referencia fijo.

1. Supongamos que \mathcal{D} y \mathcal{D}' son secantes, o sea $uv' - u'v \neq 0$. Apliquemos el teorema I.7.3: para que \mathcal{D}'' pase por el punto I común a \mathcal{D} y \mathcal{D}' es necesario y suficiente que existan $\lambda, \lambda' \in \mathbf{R}$ tales que:

$$u'' = \lambda u + \lambda' u', \quad v'' = \lambda v + \lambda' v', \quad h'' = \lambda h + \lambda' h'.$$

Ahora bien, el que la matriz $\begin{bmatrix} u & v & h \\ u' & v' & h' \end{bmatrix}$ sea de rango 2, equivale a la anulación del determinante Δ , con

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & v & h \\ u' & v' & h' \\ u'' & v'' & h'' \end{vmatrix}.$$

2. Supongamos que dos cualesquiera de las tres rectas \mathcal{D} , \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' sean paralelas, lo que significa que la matriz $\begin{bmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \end{bmatrix}$ es de rango 1, lo que implica que $\Delta = 0$.

Recapitulando 1 y 2, se obtiene:

I.13.1 En un sistema de referencia de un plano afín \mathcal{E}_2 , sean

$$ux + vy + h = 0, \quad u'x + v'y + h' = 0, \quad u''x + v''y + h'' = 0$$

las ecuaciones de tres rectas. Para que estas tres rectas sean **concurrentes** o **paralelas** es necesario y suficiente que se tenga

$$\begin{vmatrix} u & v & h \\ u' & v' & h' \\ u'' & v'' & h'' \end{vmatrix} = 0.$$

Haces de rectas en el plano

Definición I.13.1

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{En un plano afín } \mathcal{E}_2, \text{ el conjunto de las rectas afines que pasan por un punto} \\ \text{fijo } I \in \mathcal{E}_2 \text{ recibe el nombre de } \mathbf{haz} \text{ (de rectas) de vértice } I. \\ \text{El conjunto de las rectas afines de dirección fija } \delta \text{ recibe el nombre de} \\ \mathbf{haz} \text{ (de rectas) de dirección } \delta. \end{array} \right.$

En todos los casos un haz Φ queda determinado cuando se da un par $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ de rectas distintas que le pertenecen. Un tal par $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ recibe el nombre de **base del haz** Φ .

Por aplicación de I.13.1, se obtiene:

- I.13.2** *En un sistema de referencia del plano afín \mathcal{E}_2 , sean $ux + vy + h = 0$, $u'x + v'y + h' = 0$ las ecuaciones de dos rectas **distintas** \mathcal{D} , \mathcal{D}' . Existe un **haz único** Φ que admite a $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ como rectas base. Para que una recta \mathcal{D}'' , de ecuación $u''x + v''y + h'' = 0$, pertenezca a Φ , es necesario y suficiente que existan $\lambda, \lambda' \in \mathbf{R}$ tales que*

$$u'' = \lambda u + \lambda' u', \quad v'' = \lambda v + \lambda' v', \quad h'' = \lambda h + \lambda' h'$$

(Estas relaciones implican que $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$, ya que se tiene $(u'', v'') \neq (0, 0)$.)

Con las notaciones de I.13.2, pongamos, para abreviar: $D(M) = ux + vy + h$, $D'(M) = u'x + v'y + h'$, siendo x e y las coordenadas de un punto cualquiera $M \in \mathcal{E}_2$. El teorema I.13.2 establece que el *haz de base* $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ es el conjunto de las rectas de ecuación

$$(1) \quad \lambda D + \lambda' D' = 0$$

cuando (λ, λ') recorre el conjunto de los pares reales, distintos de $(0, 0)$.

Observación. Para cada $k \neq 0$, la ecuación $(k\lambda)D + (k\lambda')D' = 0$ representa la misma recta que (1).

En particular, supongamos $\lambda \neq 0$: la recta (1) admite entonces la ecuación

$$D + \rho D' = 0, \quad \text{con} \quad \rho = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Pongamos $D_\rho = D + \rho D'$ ($\rho \in \mathbf{R}$). Al ser las funciones afines D y D' no proporcionales, las funciones $(D_\rho)_{\rho \in \mathbf{R}}$ son dos a dos no proporcionales. De donde se

deduce (designando por \mathcal{D}_ρ la recta de ecuación $D_\rho = 0$) que la aplicación $\rho \mapsto \mathcal{D}_\rho$ es una biyección de \mathbf{R} sobre el haz Φ excluyendo la recta \mathcal{D}' .

Introduzcamos el conjunto $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ obtenido al añadir un elemento único, designado por ∞ , a \mathbf{R} (véase tomo 2, cap. I). Convengamos, en lo que precede, en designar por \mathcal{D}_∞ a la recta \mathcal{D}' . Entonces la aplicación $\rho \mapsto \mathcal{D}_\rho$ es una biyección de $\tilde{\mathbf{R}}$ sobre el haz Φ de base $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

Según la definición I.13.1, se tiene inmediatamente:

I.13.3 Sea Φ un haz de rectas de un plano afín \mathcal{E}_2 . Si Φ es un haz de vértice I , por todo punto M de \mathcal{E}_2 , distinto de I , pasa una recta y solamente una del haz. Si Φ es un haz de rectas paralelas, por todo punto M de \mathcal{E}_2 , pasa una recta y solamente una del haz.

Sigamos con las notaciones de I.13.2 y busquemos la ecuación de la recta del haz Φ que pasa por un punto dado M_0 que no sea vértice de Φ . Tal punto M_0 no puede ser común a \mathcal{D} y \mathcal{D}' ; por ejemplo se supone $M_0 \notin \mathcal{D}'$. La recta \mathcal{D}_ρ que pasa por M_0 queda determinada entonces por la ecuación:

$$D(M_0) + \rho D'(M_0) = 0.$$

Al ser $D'(M_0) \neq 0$, esta ecuación determina un valor único de ρ , a saber:

$$\rho = - \frac{D(M_0)}{D'(M_0)}.$$

Ejercicio de aplicación

Tomando un sistema de referencia fijo en el plano, se dan cuatro rectas distintas \mathcal{D} , \mathcal{D}' , \mathcal{L} y \mathcal{L}' , de ecuaciones respectivas $D = 0$, $D' = 0$, $L = 0$, $L' = 0$. Se supone que \mathcal{D} y \mathcal{D}' se cortan en I y que \mathcal{L} y \mathcal{L}' se cortan en $J \neq I$. Hallar una ecuación de la recta IJ .

El método de los haces nos permite resolver este problema sin calcular las coordenadas de I ni las de J . Pongamos:

$$D(M) = ux + vy + h, \quad D'(M) = u'x + v'y + h',$$

$$L(M) = \lambda x + \mu y + v, \quad L'(M) = \lambda'x + \mu'y + v'$$

para todo punto M de coordenadas (x, y) .

Sea M_0 un punto distinto de I y sean (x_0, y_0) sus coordenadas. De acuerdo con las consideraciones que siguen a I.13.3, una ecuación de la recta (IM_0) es:

$$D'(M_0) D(M) - D(M_0) D'(M) = 0, \text{ o sea } Ax + By + C = 0,$$

con:

$$A = uD'(M_0) - u' D(M_0), \quad B = vD'(M_0) - v' D(M_0),$$

$$C = hD'(M_0) - h' D(M_0).$$

Esta recta (IM_0) coincide con (IJ) si, y solamente si, las tres rectas \mathcal{L} , \mathcal{L}' e (IM_0) son concurrentes, lo cual según I.13.1, equivale a:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix} = 0.$$

Una ecuación de la recta (IJ) es por lo tanto ⁽¹⁾:

$$\begin{vmatrix} uD' - u' D & vD' - v' D & hD' - h' D \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix} = 0.$$

Se hubiese obtenido una ecuación equivalente intercambiando los papeles de los haces $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ y $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$. En la práctica, se partirá del haz que conduzca a los cálculos más sencillos.

§ I.14 PLANOS DE UN ESPACIO AFÍN DE DIMENSIÓN 3

En lo que sigue, designaremos por \mathcal{E}_3 un espacio afín de dimensión 3 y por E_3 el espacio vectorial asociado.

Los *planos afines* de \mathcal{E}_3 son también los *hiperplanos afines* de \mathcal{E}_3 . Fijando un sistema de referencia en \mathcal{E}_3 , un plano afín queda definido mediante una ecuación cartesiana de la forma

$$(1) \quad ux + vy + wz + h = 0$$

donde (u, v, w, h) son constantes tales que $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ y donde (x, y, z) son las coordenadas en el sistema elegido. La cuaterna (u, v, w, h) queda determinada, salvo un factor multiplicativo no nulo, por el plano considerado (véase § I.7).

⁽¹⁾ Si se sustituye \mathbf{R} por un cuerpo conmutativo cualquiera K , este razonamiento solamente sigue siendo válido si K tiene por lo menos tres elementos ($K \neq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

Sean (X, Y, Z) las componentes de un vector en la base de E_3 asociada al sistema de referencia considerado. El plano vectorial *dirección* del plano definido por (1) admite la ecuación cartesiana:

$$(2) \quad uX + vY + wZ = 0.$$

Se deduce:

I.14.1 En un sistema de referencia de \mathcal{E}_3 , sean

$$ux + vy + wz + h = 0, \quad u'x + v'y + w'z + h' = 0$$

las ecuaciones cartesianas de dos planos. Para que estos planos sean **paralelos** es necesario y suficiente que la matriz $\begin{bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{bmatrix}$ sea de rango 1.

Por aplicación de I.7.3, se obtiene:

I.14.2 En \mathcal{E}_3 , sean \mathcal{P} y \mathcal{P}' dos planos **no paralelos** de ecuaciones respectivas (en un sistema de referencia fijo):

$$ux + vy + wz + h = 0, \quad u'x + v'y + w'z + h' = 0.$$

- a) La intersección $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ es una **recta afín** \mathcal{D} .
 b) Para que un plano \mathcal{P}'' , de ecuación $u''x + v''y + w''z + h'' = 0$, contenga a \mathcal{D} , es necesario y suficiente que existan $\lambda, \lambda' \in \mathbf{R}$ tales que
- $$u'' = \lambda u + \lambda' u', \quad v'' = \lambda v + \lambda' v', \quad w'' = \lambda w + \lambda' w',$$
- $$h'' = \lambda h + \lambda' h'.$$

En la práctica, la búsqueda de \mathcal{D} , a partir de las ecuaciones de \mathcal{P} y \mathcal{P}' , se reduce a resolver el *sistema lineal*

$$(3) \quad \begin{cases} ux + vy + wz + h = 0 \\ u'x + v'y + w'z + h' = 0. \end{cases}$$

El sistema homogéneo asociado a (3) es

$$(4) \quad \begin{cases} uX + vY + wZ = 0 \\ u'X + v'Y + w'Z = 0. \end{cases}$$

Decir que \mathcal{P} y \mathcal{P}' son no paralelos significa que (4) es *de rango* 2. Las soluciones no nulas de (4) son evidentemente los sistemas de componentes de un vector di-

rector de \mathcal{D} en el sistema de referencia considerado. Aplicando el teorema X.5.4 del tomo 1, se deduce el importante resultado que sigue:

Con las hipótesis I.14.2, las componentes de un vector director de \mathcal{D} son los cofactores de los términos no escritos en la matriz:

$$\begin{bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

— Sean M_1, M_2, M_3, M_4 cuatro puntos de \mathcal{E}_3 de coordenadas respectivas (x_i, y_i, z_i) . Razonando de la misma forma que para las rectas del plano, se ve que estos puntos son **coplanares** si, y solamente si, se tiene $\Delta = 0$, con:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

— Un razonamiento análogo (basado en la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales) permite determinar una ecuación del plano de vectores directores dados \vec{V}, \vec{V}' , que pasa por un punto M_0 dado. Si se designan por (x_0, y_0, z_0) las coordenadas de M_0 y por $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$ las respectivas componentes de \vec{V}, \vec{V}' , este plano admite la ecuación cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación equivale evidentemente a:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Haces de planos

Definición I.14.1

En el espacio \mathcal{E}_3 , el conjunto de los planos afines que pasan por una recta dada \mathcal{D} , recibe el nombre de **haz (de planos) de eje \mathcal{D}** . El conjunto de los planos afines cuya dirección es un plano vectorial fijo Π de E_3 , recibe el nombre de **haz (de planos) de dirección Π** .

Las propiedades de los haces de planos de \mathcal{E}_3 son análogas a las de los haces de rectas en el plano, y se demuestran de la misma manera, partiendo de I.14.1 y I.14.2. Las enunciaremos por lo tanto sin demostración. Lo mismo que en el caso de las rectas, llamaremos «planos base» de un haz de planos a todo par de planos *distintos* de este haz.

I.14.3 En \mathcal{E}_3 , sea Φ un haz de planos.

- a) Si Φ es un haz de eje \mathcal{D} , por todo punto $M \in \mathcal{E}_3 \setminus \mathcal{D}$, pasa un plano del haz y sólo uno.
- b) Si Φ es un haz de planos paralelos, por todo punto $M \in \mathcal{E}_3$ pasa un plano del haz y sólo uno.

Para enunciar el análogo de I.13.2, vamos a utilizar notaciones abreviadas: si $ux + vy + wz + h = 0$, es la ecuación de un plano \mathcal{P} , para todo punto $M \in \mathcal{E}_3$, de coordenadas (x, y, z) , pondremos:

$$P(M) = ux + vy + wz + h,$$

y diremos que « $P = 0$ es una ecuación de \mathcal{P} ».

I.14.4 Con un sistema de referencia fijo de \mathcal{E}_3 , sean $P = 0$, $P' = 0$ las ecuaciones de dos planos distintos \mathcal{P} y \mathcal{P}' .

Existe entonces un haz Φ y solamente uno que admite a \mathcal{P} , \mathcal{P}' como planos base. Los planos de Φ son los planos de ecuación

$$\lambda P + \lambda' P' = 0, \quad \text{con } \lambda, \lambda' \in \mathbf{R} \quad \text{y} \quad (\lambda, \lambda') \neq (0, 0).$$

Los pares (λ, λ') y $(k\lambda, k\lambda')$, siendo $k \in \mathbf{R}^*$, dan lugar al mismo plano.

Con las notaciones de I.14.4, sea \mathcal{P}_ρ el plano de ecuación $P + \rho P' = 0$ ($\rho \in \mathbf{R}$).

Extendamos esta definición a $\tilde{\mathbf{R}}$ poniendo $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}'$. Lo mismo que para las rectas, se ve entonces que: $\rho \mapsto \mathcal{P}_\rho$ es una biyección de $\tilde{\mathbf{R}}$ sobre el haz Φ .

La determinación del plano de un haz Φ que pasa por un punto no pertene-

ciente al eje de Φ se hace, a partir de ahí, lo mismo que para el caso de los haces de rectas.

Intersección de tres planos

Al interpretar I.7.3 en el caso $n = p = 3$, se obtiene:

I.14.5 $\left\| \begin{array}{l} \text{Tres planos tienen un punto común y solamente uno si y sólo si la intersección de sus planos vectoriales directores se reduce a } \{0\}; \text{ (lo cual equivale a que sus planos vectoriales directores están definidos por formas lineales independientes).} \end{array} \right.$

Habiendo fijado un sistema de referencia de \mathcal{E}_3 , sean

$$(5) \quad \begin{aligned} ux + vy + wz + h = 0, \quad u'x + v'y + w'z + h' = 0, \\ u''x + v''y + w''z + h'' = 0 \end{aligned}$$

las ecuaciones de los tres planos. Para que sus planos directores tengan su intersección reducida a $\{0\}$, es necesario y suficiente que se tenga:

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Las coordenadas del punto común a los tres planos quedan determinadas entonces por las ecuaciones (5), que constituyen un sistema de Cramer.

Sistemas de cuatro planos

Habiendo fijado un sistema de referencia en \mathcal{E}_3 , sean

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad P'' = 0, \quad P''' = 0$$

las ecuaciones de cuatro planos $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{P}'', \mathcal{P}'''$, con:

$$P = ux + vy + wz + h, \quad P' = u'x + v'y + w'z + h', \text{ etc. .}$$

1. Supongamos en primer lugar que, entre estos cuatro planos, existan tres con un punto común único I . Significa esto que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{bmatrix}$$

es de rango 3.

Podemos suponer, cambiando si es preciso las notaciones, que estos tres planos son \mathcal{P} , \mathcal{P}' , \mathcal{P}'' .

Aplicando I.7.3, se ve que \mathcal{P}''' pasa por I si, y solamente si, existen λ , λ' y $\lambda'' \in \mathbf{R}$ tales que

$$P''' = \lambda P + \lambda' P' + \lambda'' P''.$$

Ahora bien, esta condición equivale aquí a la anulación del determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w & h \\ u' & v' & w' & h' \\ u'' & v'' & w'' & h'' \\ u''' & v''' & w''' & h''' \end{vmatrix}.$$

2. Supongamos que la matriz A sea de rango ≤ 2 : esto implica que $\Delta = 0$. Si A es de rango 1, los cuatro planos son paralelos entre sí. Si A es de rango 2, el sistema lineal y homogéneo

$$uX + vY + wZ = 0, \quad u'X + v'Y + w'Z = 0,$$

$$u''X + v''Y + w''Z = 0, \quad u'''X + v'''Y + w'''Z = 0$$

admite una solución no nula; esto implica la existencia de un vector no nulo paralelo a los cuatro planos.

Recapitulando 1 y 2, se obtiene:

Para que los cuatro planos \mathcal{P} , \mathcal{P}' , \mathcal{P}'' , \mathcal{P}''' tengan por lo menos un punto común, o sean paralelos a un mismo vector no nulo, es necesario y suficiente que se tenga:

$$\begin{vmatrix} u & v & w & h \\ u' & v' & w' & h' \\ u'' & v'' & w'' & h'' \\ u''' & v''' & w''' & h''' \end{vmatrix} = 0.$$

Ejercicio de aplicación

Habiendo tomado un sistema de referencia en \mathcal{E}_3 , se dan cinco planos \mathcal{P} , \mathcal{P}' , \mathcal{Q} , \mathcal{Q}' , \mathcal{Q}'' de ecuaciones respectivas

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad Q = 0, \quad Q' = 0, \quad Q'' = 0$$

con:

$$P = ux + vy + wz + h, \quad P' = u'x + v'y + w'z + h'$$

$$Q = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \quad Q' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',$$

$$Q'' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''$$

Se supone que \mathcal{P} y \mathcal{P}' son no paralelos y se designa por \mathcal{D} su recta común; finalmente se supone que \mathcal{Q} , \mathcal{Q}' , \mathcal{Q}'' tienen un punto común único I no situado sobre \mathcal{D} . Fórmese una ecuación del plano que pasa por \mathcal{D} e I .

Sea M_0 un punto de $\mathcal{E}_3 \setminus \mathcal{D}$, de coordenadas (x_0, y_0, z_0) . Una ecuación del plano que pasa por M_0 y \mathcal{D} es

$$P'(M_0)P(M) - P(M_0)P'(M) = 0,$$

o sea

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

con

$$A = uP'(M_0) - u'P(M_0), \quad B = vP'(M_0) - v'P(M_0),$$

$$C = wP'(M_0) - w'P(M_0), \quad D = hP'(M_0) - h'P(M_0).$$

Para que este plano pase por I , es necesario y suficiente que se tenga:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix} = 0.$$

De ello se deduce que una ecuación del plano buscado ⁽¹⁾ es:

$$\begin{vmatrix} uP' - u' P & vP' - v' P & wP' - w' P & hP' - h' P \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix} = 0.$$

⁽¹⁾ Si se sustituye **R** por un cuerpo conmutativo K , este razonamiento solamente sigue siendo válido si $K \neq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, o sea $\text{card}(K) \geq 3$.

Capítulo II

Nociones de Geometría euclídea

En este capítulo, vamos a considerar solamente espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbf{R} . Para mayor claridad en la exposición, vamos a reservar el nombre de *espacio euclídeo* para los espacios de dimensión finita provistos de un producto escalar designado por $x.y$. Se reservará la notación $\|x\|$ para la norma euclídea (o prehilbertiana). Por otra parte, designaremos por $[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n]$, en lugar de $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n)$ al *producto mixto* de n vectores de un espacio euclídeo de dimensión n (con el fin de evitar toda confusión con la n -tupla constituida por estos vectores).

Recordemos que la notación \mathcal{E}_a designa el espacio vectorial obtenido tomando el punto a con origen en el espacio afín \mathcal{E} (véase § I.5).

§ II.1 ESPACIOS AFINES LIGADOS A UN E.V.N. CASO EUCLÍDEO

Sea (E, v) un espacio vectorial normado sobre el cuerpo \mathbf{R} (véase tomo 2), y sea \mathcal{E} un espacio afín ligado a E . Se define una *distancia* δ en \mathcal{E} poniendo:

$$(1) \quad (\forall M \in \mathcal{E}), (\forall N \in \mathcal{E}) \quad \delta(M, N) = v(\overrightarrow{MN}).$$

Se dirá que la distancia δ está definida por la *norma* v , o que está *asociada a* v . Si τ es una traslación cualquiera de \mathcal{E} se tiene $\overrightarrow{\tau(M)\tau(N)} = \overrightarrow{MN}$, de donde

$$\delta[\tau(M), \tau(N)] = \delta(M, N).$$

La distancia δ es por lo tanto *invariante por traslación*.

Para cada $A \in \mathcal{E}$, la aplicación $v_A : \mathcal{E}_A \rightarrow \mathbf{R}_+$, $M \mapsto \delta(A, M)$ es una *norma* sobre el espacio vectorial \mathcal{E}_A , y la biyección $\xi_A : \vec{V} \mapsto A + \vec{V}$, de (E, v) en (\mathcal{E}_A, v_A) , es un *isomorfismo isométrico de espacios vectoriales normados*, puesto que se tiene, para todo $\vec{V} \in E$:

$$v_A(A + \vec{V}) = \delta(A, A + \vec{V}) = v(\vec{V}).$$

La elección de un origen convierte por lo tanto al espacio métrico (\mathcal{E}, δ) en un espacio vectorial normado isométrico con (E, v) .

Sea \mathcal{V} una subvariedad afín no vacía de \mathcal{E} , de dirección V , la restricción a \mathcal{V} de la distancia δ es igual a la distancia definida por la restricción a V de la norma v .

Si v_1, v_2 son dos normas equivalentes sobre E , las distancias δ_1, δ_2 son *equivalentes* (véase tomo 2, Def. III.1.3); definen por lo tanto la misma topología sobre \mathcal{E} .

Espacios prehilbertianos y euclídeos

Recordemos que un espacio *prehilbertiano real* es un espacio vectorial E sobre el cuerpo \mathbf{R} , provisto de una *forma bilineal simétrica*, designada por

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

a la que se da el nombre de **producto escalar**, que verifica las condiciones siguientes:

- i) $(\forall x \in E) \quad x \cdot x \geq 0$;
- ii) $(x \cdot x = 0) \Leftrightarrow x = 0$.

(Véase tomo 1, p. 399).

De i) y ii) resulta que la función $x \mapsto (x \cdot x)^{1/2}$ es una *norma* sobre E , que nosotros designaremos por $\|x\|$.

Definición II.1.1

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Un espacio } \mathbf{vectorial} \text{ euclídeo es un espacio prehilbertiano real de dimen-} \\ \text{sión finita; un espacio } \mathbf{afín} \text{ euclídeo es un espacio afín ligado a un espacio} \\ \text{vectorial euclídeo.} \end{array} \right.$

Todo espacio afín euclídeo \mathcal{E} se supondrá provisto de la distancia d definida por

$$(\forall M, N \in \mathcal{E}) \quad d(M, N) = \| \overrightarrow{MN} \|.$$

Cuando no exista confusión posible, esta distancia será simplemente ⁽¹⁾ designada por MN .

La distancia d recibe el nombre de **distancia euclídea** en \mathcal{E} .

Esta distancia posee la notable propiedad siguiente, en la cual A, B, M designan puntos cualesquiera de \mathcal{E} :

Para que el punto M pertenezca al segmento $[A, B]$ es necesario y suficiente que se tenga:

$$d(A, B) = d(A, M) + d(M, B).$$

Esta propiedad se cumple por otra parte para todo espacio afín asociado a un espacio prehilbertiano ⁽²⁾. Se desprende del corolario del teorema XIII.3.1 del tomo 1.

Sea \mathcal{E} un espacio afín euclídeo de dimensión n : un sistema de referencia $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \mathcal{E} se dice que es **ortonormal** si la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ del espacio vectorial asociado E es ortonormal.

Cuando \mathcal{E} está orientado, los sistemas de referencia ortonormales de \mathcal{E} se dividen en dos clases: los sistemas *directos* y los sistemas *indirectos*.

En lo que sigue estudiaremos solamente espacios afines euclídeos, por lo tanto (por convenio) de *dimensión finita*. Pero algunas de las propiedades se extienden inmediatamente a los espacios afines ligados a un espacio prehilbertiano cualquiera.

Complementos de teoría espectral

Para los fines de este estudio, vamos a precisar algunos de los resultados establecidos en el tomo 1 (§ XIII.7).

En primer lugar sea E_n un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sea Q una *forma cuadrática* sobre E_n , definida en una base ortonormal cualquiera (\vec{e}_i) por:

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n q_{ij} x_i x_j;$$

finalmente sea B la forma bilineal *simétrica* asociada, definida por:

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} [Q(\vec{u} + \vec{v}) - Q(\vec{u}) - Q(\vec{v})],$$

de donde se desprende

⁽¹⁾ Señalemos que esta notación simplificada resulta casi indispensable para el desarrollo de los razonamientos geométricos.

⁽²⁾ Señalemos por el contrario que esta propiedad no siempre se cumple para un espacio afín ligado a un e.v.n. cualquiera.

$$B\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i y_j.$$

Existe un operador único φ de E_n que verifica, para todos los $\vec{u}, \vec{v} \in E_n$:

$$(2) \quad \vec{u} \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \varphi(\vec{u}) = B(\vec{u}, \vec{v}).$$

Este operador es *simétrico* (véase tomo 1, p. 412) y verifica:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \vec{e}_i.$$

Su matriz, en una base ortonormal cualquiera (\vec{e}_i) de E_n es por lo tanto igual a la matriz (q_{ij}) de la forma Q .

Se dice que φ es el **operador simétrico asociado a la forma cuadrática Q sobre E_n** .

Se observará que φ es el *único operador simétrico que verifica*:

$$(3) \quad (\forall \vec{v} \in E_n) \quad \varphi(\vec{v}) \cdot \vec{v} = Q(\vec{v}).$$

Del teorema XIII.7.1 del tomo 1 se deduce entonces el resultado siguiente, el cual es fundamental en Geometría euclídea:

Teorema II.1.1

Sea Q una forma cuadrática sobre el espacio vectorial euclídeo E_n . Existe entonces **por lo menos una base ortonormal** $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E_n y números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tales que para todos los reales x_1, \dots, x_n se tiene:

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Demostración. Sea φ el operador simétrico asociado a Q . Según el teorema XIII.7.1 del tomo 1, existe una base ortonormal (\vec{e}_i) de E_n formada por vectores propios de φ . Si se designa por λ_i el valor propio correspondiente al vector propio \vec{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) se tiene, según (3):

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \quad]$$

Con estas notaciones, las direcciones de los vectores propios de φ reciben el nombre de **direcciones principales** de la forma cuadrática Q (véase tomo 1, cap. XII).

§ II.2 ORTOGONALIDAD.

NOCIÓN ELEMENTAL DE ÁNGULO

Sea E un espacio vectorial euclídeo. Recordemos que dos subespacios V , W de E se dice que son *ortogonales* si para todo $x \in V$ y para todo $y \in W$, se tiene $x \cdot y = 0$. La intersección de V , W se reduce entonces a $\{0\}$, y para que V , W sean *suplementarios*, es necesario y suficiente que $V + W = E$ (véase tomo 1, p. 286). Establecemos entonces:

Definición II.2.1

En un espacio afín euclídeo \mathcal{E} sobre E , dos variedades afines no vacías \mathcal{V} , \mathcal{W} , se dice que son **ortogonales** cuando sus direcciones respectivas V , W son subespacios ortogonales de E ; se dice que son **suplementarias ortogonales** si V , W son suplementarios y ortogonales.

Si $\mathcal{V} = \mathcal{E}$, se tiene $V = E$, y por lo tanto $V^\perp = \{0\}$. En consecuencia: las variedades suplementarias ortogonales de \mathcal{E} son las variedades que se reducen a un punto de \mathcal{E} .

Sea \mathcal{V} una variedad afín no vacía de \mathcal{E} . De acuerdo con esta definición, por cada punto A de \mathcal{E} , pasa una variedad afín única \mathcal{W} suplementaria ortogonal de \mathcal{V} , y la dirección de W es el suplementario ortogonal V^\perp de la dirección V de \mathcal{V} . Para que una variedad afín que pasa por A sea ortogonal a \mathcal{V} es entonces necesario y suficiente que esté contenida en \mathcal{W} .

Del teorema de las proyecciones en un espacio euclídeo (véase tomo 1, teorema XII 6.1) se desprende inmediatamente:

II.2.1 Sean \mathcal{V} , \mathcal{W} dos variedades afines suplementarias ortogonales en el espacio afín euclídeo \mathcal{E} ; entonces \mathcal{V} y \mathcal{W} tienen un punto común y sólo uno H ; y, para todo $M \in \mathcal{V}$ [resp. para todo $N \in \mathcal{W}$], H es la **proyección ortogonal** de M sobre \mathcal{W} [resp. de N sobre \mathcal{V}].

Recordemos que la proyección ortogonal de M sobre \mathcal{W} es el punto único H de \mathcal{W} tal que $\|\overrightarrow{MH}\|$ es igual a la distancia de M a \mathcal{W} (véase tomo 1, p. 443).

Perpendicularidad

En un espacio vectorial euclídeo E , designemos por V^\perp el suplementario ortogonal de un subespacio V (véase tomo 1, p. 437). Se ve entonces que la condición de ortogonalidad de dos subespacios V, W se traduce por la relación de inclusión $V \subset W^\perp$ (siendo esta relación equivalente a: $W \subset V^\perp$).

Por definición, se dice que dos subespacios vectoriales V, W de E son **perpendiculares** si verifican la relación opuesta $W^\perp \subset V$. Esta relación equivale a $V^\perp \subset W$ (véase tomo 1, p. 438) y traduce la *ortogonalidad* de W^\perp y V^\perp . En consecuencia: la relación «los espacios vectoriales V, W son perpendiculares» es *simétrica*.

Observemos que V, W *solamente pueden ser a la vez perpendiculares y ortogonales si verifican $V = W^\perp$* , es decir: *si son suplementarios ortogonales*.

Establecemos:

Definición II.2.2

En un espacio afín euclídeo \mathcal{E} , dos variedades afines no vacías \mathcal{V}, \mathcal{W} , se dice que son **perpendiculares** si sus direcciones V, W lo son, es decir, si se tiene una de las relaciones equivalentes $V^\perp \subset W$ o $W^\perp \subset V$.

Ejemplos

En un espacio afín euclídeo de *dimensión* 3, dos planos se dice que son perpendiculares si uno de ellos contiene una recta ortogonal al otro.

En este mismo espacio, resulta equivalente decir que una recta es *ortogonal* a un plano, o que es *perpendicular* a este plano.

De modo general, si \mathcal{V}, \mathcal{W} son dos variedades afines perpendiculares, cada una de ellas contiene una variedad suplementaria ortogonal de la otra. De II.2.1, se desprende que la intersección de \mathcal{V} y \mathcal{W} es no vacía. Tomando como origen un punto de esta intersección, nos encontramos con la intersección de dos espacios vectoriales de E . Del teorema VIII.1.4, del tomo 1, se deduce entonces el resultado siguiente:

II.2.2 En un espacio afín euclídeo \mathcal{E} , sean \mathcal{V}, \mathcal{W} dos variedades afines **perpendiculares**. Se tiene entonces

$$\dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) - \dim(\mathcal{E}).$$

Además, para todo punto $I \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, la variedad suplementaria ortogonal de \mathcal{V} que pasa por I está contenida en \mathcal{W} y es también una variedad suplementaria ortogonal de $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ en \mathcal{W} .

Ejemplo

Supongamos que \mathcal{E} es de dimensión 3; si \mathcal{V} y \mathcal{W} son *planos perpendiculares*, su intersección es una recta \mathcal{D} . Para cada punto I de \mathcal{D} , la recta perpendicular a \mathcal{V} en I está contenida en \mathcal{W} (véase la figura 1).

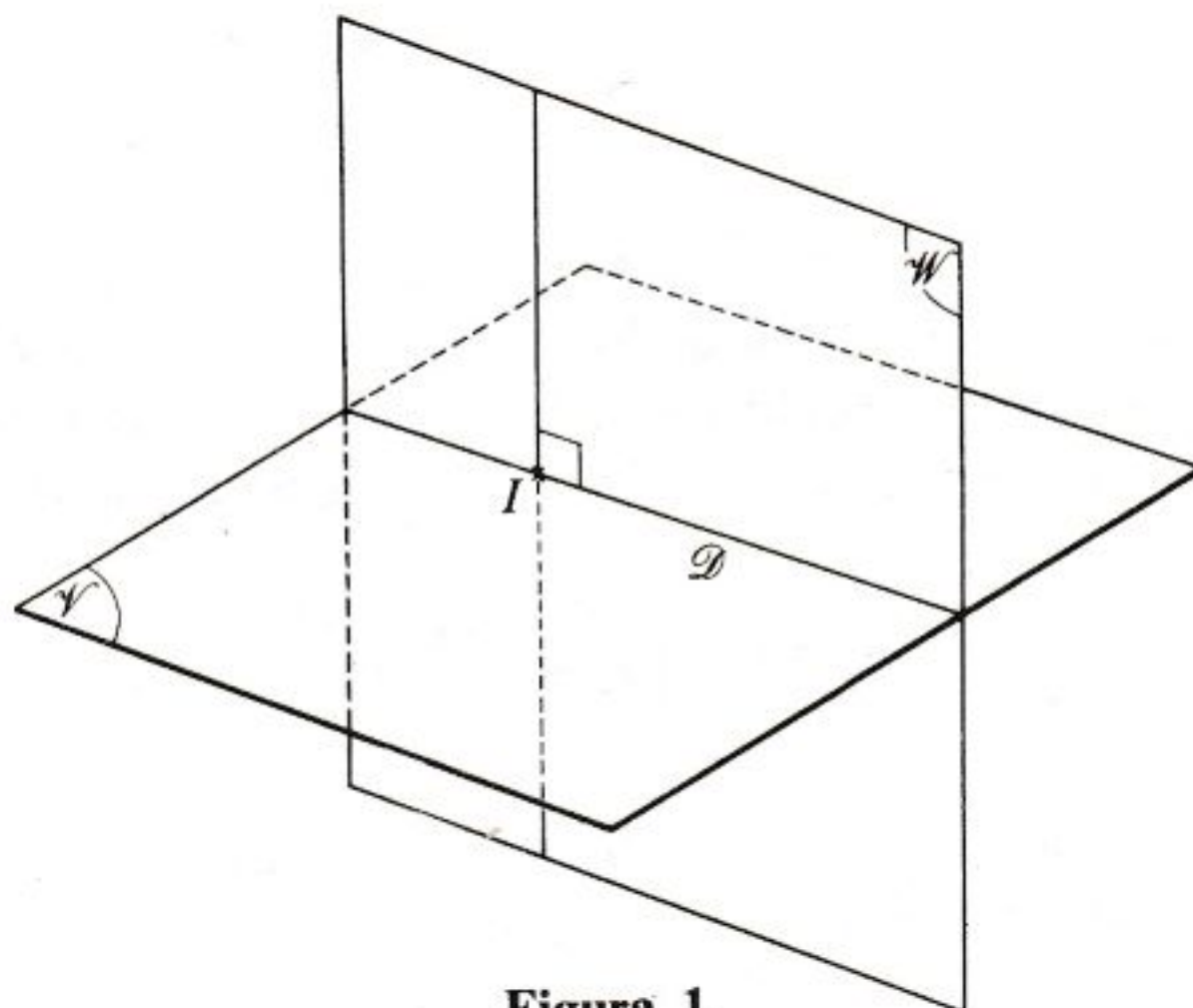


Figura 1.

Volvamos al caso general y pongamos $\dim(\mathcal{E}) = n$. Se obtiene fácilmente la proposición que sigue:

II.2.3 Para que dos subvariedades afines \mathcal{V} , \mathcal{W} de \mathcal{E} , de intersección no vacía sean **ortogonales** [resp. **perpendiculares**], es necesario y suficiente que exista un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E} en el cual \mathcal{V} esté definida por las ecuaciones $x_1 = 0, \dots, x_p = 0$ y \mathcal{W} por las ecuaciones

$$x_q = 0, x_{q+1} = 0, \dots, x_n = 0$$

con $p + 1 \geq q$ [resp. $p + 1 \leq q$].

Demostración. Es claro que la condición enunciada es suficiente. Para demostrar que es necesaria basta con tomar una referencia de origen $O \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ tal que \mathcal{V} esté definida por $x_1 = 0, \dots, x_p = 0$, y utilizar las definiciones.]]

Ángulo de dos vectores (en el espacio)

Definición II.2.3

En un espacio prehilbertiano real E , el ángulo de dos vectores no nulos \vec{u}, \vec{v} es el único real θ que verifica

$$(1) \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Esta definición se aplica en particular al caso en que E es **euclídeo**; corresponde entonces a la noción elemental de ángulo. Para precisar, se le puede llamar *medida en radianes* del ángulo de los vectores \vec{u}, \vec{v} . Recordemos que la medida en *grados sexagesimales* [resp. *centésimales*] de este mismo ángulo es el número ⁽¹⁾

$$\frac{180}{\pi} \theta \quad \left[\text{resp.} \quad \frac{200}{\pi} \theta \right].$$

Quede bien entendido que se podría llamar también «medida» del ángulo de los vectores \vec{u}, \vec{v} a todo real θ que verificase

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|};$$

si θ_0 designa a uno de tales números, los restantes son todos los reales de la forma

$$\pm \theta_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Sin embargo la consideración de estos números no presenta en general interés.

Para distinguir este concepto elemental de ángulo, del más preciso de ángulo orientado, que se definirá en el § 3, diremos a veces que el número θ definido por (1) es el **ángulo no orientado** de los vectores \vec{u}, \vec{v} o mejor aún, la **distancia angular** ⁽²⁾ de estos vectores. Lo designaremos por $\theta = \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$.

⁽¹⁾ Al ser nuestro objetivo esencialmente práctico, damos aquí la terminología más usualmente adoptada. Es bien sabido que la palabra «ángulo» se aplica, en el lenguaje habitual de los matemáticos, a varios conceptos distintos que en una teoría rigurosa habría que distinguir. Sin embargo en la práctica tales distinciones tienen que quedar implícitas si no se quiere caer en una pesadez enervante.

⁽²⁾ En el § 5 veremos en efecto que la función $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, así definida sobre $E \times E$, verifica la desigualdad triangular y satisface en consecuencia los axiomas de *distancias*.

Para todos los $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^*$, el ángulo de los vectores $\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}$ es evidentemente igual al ángulo de los vectores \vec{u}, \vec{v} : el ángulo de los dos vectores \vec{u}, \vec{v} depende pues solamente de las *semirrectas vectoriales* que ellos engendran, y recibe también el nombre de *ángulo de estas semirrectas*.

Finalmente, sea \mathcal{E} un espacio afín sobre E y sean Δ, Δ' dos ejes (rectas afines orientadas) de \mathcal{E} ; por definición: el *ángulo de los ejes* Δ, Δ' es igual al ángulo de un vector director de Δ y de un vector director de Δ' .

Producto vectorial

Recordemos aquí que si E es de dimensión 3 y orientado, el producto vectorial de dos vectores \vec{u}, \vec{v} de E es un vector \vec{w} de E , designado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, que es nulo si u, v están ligados y que, en caso contrario, está caracterizado por las propiedades que siguen:

- i) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0, \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$;
- ii) la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ es directa;
- iii) $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$, donde θ designa el ángulo de los vectores \vec{u}, \vec{v} , definido por (1). Se tiene por lo tanto:

$$\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 .$$

Ángulo de dos rectas

Sea como siempre \mathcal{E} un espacio afín sobre E y sean $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ dos rectas afines de \mathcal{E} . Daremos el nombre de **ángulo** (o mejor: **distancia angular**) de las rectas $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ al número real único θ que verifica:

$$(2) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} ,$$

donde \vec{u} designa un vector director de \mathcal{D} y \vec{v} un vector director de \mathcal{D}' .

El número θ definido por (2) no depende en efecto de los vectores directores elegidos. Lo designaremos por

$$\theta = \widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} .$$

Depende sólo de las *direcciones* de las rectas $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$.

Para que las rectas \mathcal{D} , \mathcal{D}' sean **paralelas** [resp. **ortogonales**] es necesario y suficiente que su ángulo sea **nulo** [resp. igual a $\pi/2$].

Si \mathcal{F} es una subvariedad afín de \mathcal{E} que contiene a \mathcal{D} y \mathcal{D}' , se observará que el ángulo de las rectas \mathcal{D} y \mathcal{D}' en \mathcal{F} es igual al ángulo de las mismas en \mathcal{E} .

Ángulo de variedades

Se puede definir de una manera muy general el ángulo θ de sus variedades afines \mathcal{V} , \mathcal{W} de dimensión ≥ 1 de \mathcal{E} ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) de tal modo que se cumplan las condiciones siguientes:

- a) El ángulo de dos variedades depende solamente de sus *direcciones*.
- b) Si \mathcal{F} es una subvariedad afín de \mathcal{E} que contiene a \mathcal{V} y \mathcal{W} , el ángulo de \mathcal{V} y \mathcal{W} en \mathcal{F} es igual al ángulo de \mathcal{V} y \mathcal{W} en \mathcal{E} .
- c) Si \mathcal{W}_1 designa una variedad afín *suplementaria ortogonal* de \mathcal{W} , los ángulos θ , θ_1 de \mathcal{V} con \mathcal{W} , \mathcal{W}_1 están relacionados por

$$\theta + \theta_1 = \pi/2.$$

En consecuencia: si \mathcal{V}_1 , \mathcal{W}_1 son variedades afines suplementarias ortogonales de \mathcal{V} , \mathcal{W} , el ángulo de \mathcal{V}_1 con \mathcal{W}_1 es *igual* al ángulo de \mathcal{V} con \mathcal{W} .

- d) Si la variedad afín $\mathcal{L} = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ es de dimensión ≥ 1 y si \mathcal{L}_1 designa una variedad afín suplementaria ortogonal de \mathcal{L} , entonces el ángulo de \mathcal{V} con \mathcal{W} es igual al ángulo de la variedad $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \cap \mathcal{L}_1$ con la variedad $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W} \cap \mathcal{L}_1$.

Estas condiciones nos permiten reducirnos a la definición de *ángulo de dos subespacios vectoriales suplementarios* V , W de E . En este caso, se puede definir el ángulo θ de V , W poniendo:

$$(3) \quad \theta = \inf_{\vec{v} \in V \setminus \{0\}, \vec{w} \in W \setminus \{0\}} \widehat{\vec{v}, \vec{w}},$$

de donde $\theta = \pi/2$ si (y solamente si) V , W son ortogonales (véase ejercicio II.16).

Nos limitaremos a estudiar el caso en que una de las variedades es *una recta* o *un hiperplano*.

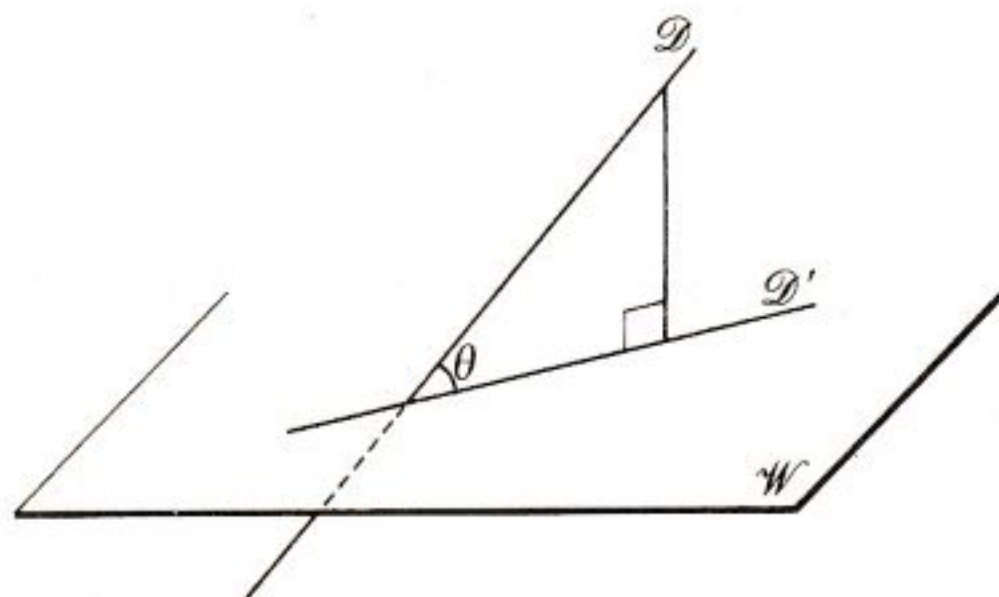


Figura 2.

a) Sea \mathcal{W} una variedad afín de dimensión ≥ 1 de \mathcal{E} y \mathcal{D} una recta afín. Si \mathcal{D} es no ortogonal a \mathcal{W} , el ángulo θ de \mathcal{D} con \mathcal{W} es igual al ángulo de \mathcal{D} con su *proyección ortogonal* \mathcal{D}' sobre \mathcal{W} (véase figura 2). Si \mathcal{D} es ortogonal a \mathcal{W} , el ángulo de \mathcal{D} con \mathcal{W} es igual a $\pi/2$. Si \mathcal{D} es paralela a \mathcal{W} , el ángulo de \mathcal{D} y de \mathcal{W} es igual a 0.

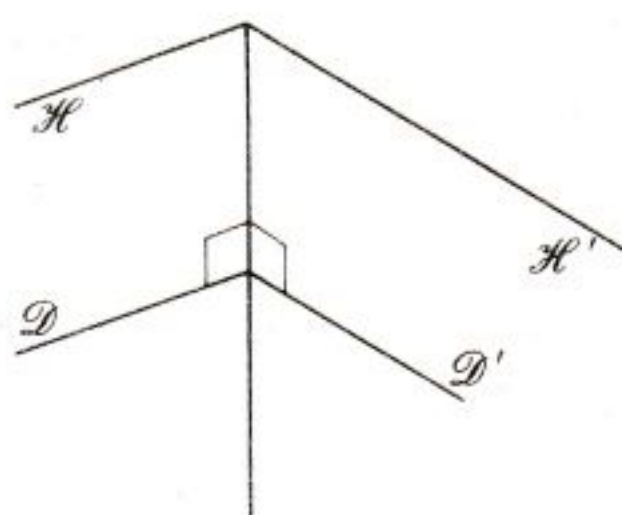


Figura 3.

b) Sea \mathcal{W} una variedad afín de dimensión ≥ 1 de \mathcal{E} y \mathcal{H} un hiperplano. Entonces el ángulo de \mathcal{H} y de \mathcal{W} es igual a $\pi/2 - \theta$, donde θ designa el ángulo de \mathcal{W} con una recta ortogonal a \mathcal{H} .

En consecuencia, el ángulo de \mathcal{H} y de \mathcal{W} es igual a $\pi/2$ si, y solamente si, \mathcal{H} y \mathcal{W} son *perpendiculares*.

El ángulo de dos hiperplanos \mathcal{H} , \mathcal{H}' es también igual al ángulo de una recta ortogonal a \mathcal{H} con una recta ortogonal a \mathcal{H}' . Es nulo si, y solamente si, los hiperplanos son *paralelos*. Si \mathcal{H} y \mathcal{H}' son secantes, su ángulo es igual al de las rectas \mathcal{D} , \mathcal{D}' obtenidas al cortar \mathcal{H} y \mathcal{H}' por una variedad suplementaria ortogonal de $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ (véase figura 3, relativa al caso en que \mathcal{E} es de dimensión 3).

§ II.3 CASO DEL PLANO. ÁNGULOS ORIENTADOS ⁽¹⁾

Vamos a ver que en un **plano euclídeo orientado**, la consideración del grupo de las rotaciones permite precisar el concepto de ángulo al introducir el de *ángulo orientado* (de vectores o de rectas).

⁽¹⁾ Este tratamiento no hace más que recoger brevemente, desde un punto de vista práctico, la teoría expuesta en la enseñanza secundaria: de acuerdo con el uso corriente y para abreviar daremos el nombre de *ángulo orientado* a lo que en Terminal C* se llama *medida de un ángulo*. Su definición supone por lo tanto una orientación previa del plano. Cualquiera que sea el punto de vista adoptado, el concepto de ángulo orientado, cuando se sabe manejar bien, constituye un instrumento precioso en Geometría plana.

* N. del T. Así se llama en Francia el curso preuniversitario requerido para ingresar en cualquiera de las Facultades de Ciencias.

Sea por lo tanto \mathcal{E}_2 un espacio afín ligado a un plano vectorial euclídeo, y sea $SO(E_2)$ el grupo especial ortogonal de E_2 , llamado también *grupo de las rotaciones vectoriales* (véase tomo 1, § XII.7).

Orientemos ahora E_2 y, para todo real θ , designemos por r_θ la *rotación* de E_2 cuya matriz, en toda base ortogonal directa de E_2 , es

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

La aplicación $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow SO(E_2)$, $\theta \mapsto r_\theta$ así definida es un *homomorfismo* Φ del grupo aditivo \mathbf{R} sobre el grupo $SO(E_2)$. El *núcleo* de este homomorfismo es el subgrupo $2\pi\mathbf{Z}$ de los múltiplos enteros de 2π . Se obtiene por lo tanto un isomorfismo natural

$$(1) \quad \Psi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow SO(E_2).$$

La clase de un real θ módulo $2\pi\mathbf{Z}$ será designada simplemente por: $\theta \pmod{2\pi}$.

La rotación r_θ recibe el nombre de *rotación de ángulo* $\theta \pmod{2\pi}$: dicho de otro modo, el ángulo de una rotación es su imagen recíproca en el isomorfismo (1): es una clase de reales módulo 2π ⁽¹⁾.

Designemos por S_1 al conjunto de los vectores de *norma* 1 en E_2 . Para todos los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in S_1$, existe una rotación única $r \in SO(E_2)$ tal que $r(\vec{u}) = \vec{v}$ (en otros términos: $SO(E_2)$ actúa fiel y transitivamente sobre S_1). Por definición, el ángulo de esta rotación recibe el nombre de **ángulo orientado** de los vectores \vec{u}, \vec{v} : se le designa por (\vec{u}, \vec{v}) , y cada uno de los números reales θ tales que $r_\theta = r$ se dice que es **una medida** (en radianes) o una **determinación** del ángulo (\vec{u}, \vec{v}) ⁽²⁾.

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in S_1$, y sean r, s las rotaciones tales que

$$r(\vec{u}) = \vec{v}, \quad s(\vec{v}) = \vec{w}.$$

Puesto que (1) define un isomorfismo de grupos, el ángulo de la rotación $s \circ r$ es la suma de los ángulos de r y s , y se tiene por lo tanto la **relación de Chasles**:

$$(2) \quad \boxed{(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})}.$$

⁽¹⁾ Tengamos en cuenta que en el Curso de Terminal C, se define un ángulo orientado de \mathcal{E}_2 como una rotación vectorial de E_2 , o una clase de equivalencia de pares de semirrectas vectoriales.

⁽²⁾ Observemos aquí que el símbolo (\vec{u}, \vec{v}) unas veces designa un par de vectores y otras veces el ángulo orientado que forman.

Con más generalidad, si \vec{u}, \vec{v} son dos vectores no nulos *cualesquiera* (no necesariamente unitarios), se da el nombre de *ángulo orientado* de estos vectores a la clase módulo 2π definida por:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right).$$

La relación (2) se extiende entonces inmediatamente a una terna cualquiera $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vectores no nulos de E_2 .

Para todos los vectores \vec{u}, \vec{v} no nulos, se tiene evidentemente:

$$(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \pmod{2\pi} \quad \text{y} \quad (\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}).$$

Efecto de un cambio de orientación del plano

Si la orientación de E_2 se cambia por su opuesta, el homomorfismo

$$\Phi : \theta \mapsto r_\theta$$

queda cambiado por su opuesto, es decir, pasa a ser $\bar{\Phi}$ tal que, para todo θ , $\bar{\Phi}(\theta) = (\Phi(\theta))^{-1}$. Por lo tanto el *ángulo orientado* de dos vectores \vec{u}, \vec{v} queda *cam- biado por su opuesto* (véase más adelante).

Determinación práctica

Supongamos en primer lugar que \vec{u}, \vec{v} son *unitarios*. Existe entonces un vector unitario único \vec{u}' tal que el par (\vec{u}, \vec{u}') es una base ortonormal *directa* de E_2 . Este vector \vec{u}' queda determinado por la relación $(\vec{u}, \vec{u}') = +\pi/2 \pmod{2\pi}$. La relación:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \pmod{2\pi} \quad \text{equivale a:} \quad \vec{v} = \vec{u} \cos \theta + \vec{u}' \sin \theta$$

(ya que traduce el hecho de que \vec{v} deriva de \vec{u} por la rotación de ángulo θ).

El ángulo orientado (\vec{u}, \vec{v}) es por lo tanto el conjunto de los reales θ que verifican

$$\cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{y} \quad \sin \theta = [\vec{u}, \vec{v}]$$

donde $[\vec{u}, \vec{v}]$ designa el *producto mixto* de \vec{u} y \vec{v} (recordemos que $[\vec{u}, \vec{v}]$ es igual al determinante de \vec{u} y \vec{v} en una base ortonormal directa arbitraria).

Si ahora \vec{u}, \vec{v} son dos vectores *no nulos cualesquiera* de E_2 , se deduce la equivalencia:

$$((\vec{u}, \vec{v}) = \theta \pmod{2\pi}) \Leftrightarrow \left(\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{y} \quad \text{sen } \theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right).$$

Por definición, el ángulo orientado de dos *semirrectas* (afines o vectoriales) Ax, Ay es igual al ángulo orientado de un vector director de Ax y de un vector director de Ay . Se le designa por (Ax, Ay) . Del mismo modo se define el ángulo orientado de dos *ejes* del plano vectorial E_2 o del plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 .

Ángulo orientado de rectas

Definiremos en primer lugar el ángulo orientado de dos rectas vectoriales de E_2 .

Designemos por G el subgrupo de dos elementos de $\text{SO}(E_2)$ constituido por la aplicación idéntica y la rotación de ángulo π (también llamada simetría central). Para todo real θ , designemos por $(\text{mod } \pi)$ a la clase de $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ constituida por los números $\theta + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Si E_2 es *orientado*, se deduce fácilmente de (1) un isomorfismo natural:

$$(3) \quad \Theta : \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} \text{SO}(E_2)/G ;$$

a cada clase $\theta \pmod{\pi}$ este isomorfismo asocia la clase módulo G formada por la rotación de ángulo $\theta \pmod{2\pi}$ de la rotación de ángulo $\theta + \pi \pmod{2\pi}$.

Sean entonces D_1, D_2 dos *rectas vectoriales* de E_2 , existen exactamente *dos* rotaciones que aplican D_1 sobre D_2 . Estas dos rotaciones constituyen una clase módulo G ⁽¹⁾: por definición el elemento de $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ que corresponde a esta clase en el isomorfismo (3) recibe el nombre de **ángulo orientado** de las rectas D_1, D_2 y es designado por (D_1, D_2) . Los elementos de la clase (D_1, D_2) se dice que son las *medidas* (en radianes) o las *determinaciones*, de este ángulo.

Del hecho de ser (3) un isomorfismo de grupos, se deduce la **relación de Chasles**

$$(4) \quad (D_1, D_2) + (D_2, D_3) = (D_1, D_3)$$

válida para tres rectas vectoriales cualesquiera D_1, D_2, D_3 .

Observemos que si las rectas vectoriales D_1, D_2 son respectivamente engendradas por los vectores \vec{u}_1, \vec{u}_2 , la relación:

⁽¹⁾ Dicho de otro modo, el subgrupo $\text{SO}(E_2)/G$ opera fiel y transitivamente sobre el conjunto de las rectas vectoriales de E_2 .

$(D_1, D_2) = \theta \pmod{\pi}$ equivale a:

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \theta \pmod{2\pi} \quad \text{o} \quad (\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \theta + \pi \pmod{2\pi}.$$

Si las rectas D_1, D_2 son ortogonales, se tiene: $(D_1, D_2) = \pi/2 \pmod{\pi}$; de lo contrario, se tiene la equivalencia:

$$\left((D_1, D_2) = \theta \pmod{\pi} \right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} \theta = \frac{[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2} \right).$$

Consideremos ahora dos **rectas afines** $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ de un plano afín euclídeo orientado \mathcal{E}_2 ligado a E_2 . Por definición, *el ángulo orientado de estas rectas es igual al ángulo orientado de sus direcciones* D_1, D_2 en E_2 . Se le designa por $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

La relación de Chasles (4) sigue siendo válida para ángulos orientados de rectas afines.

Recordemos aquí dos proposiciones que son útiles en Geometría plana:

a) Si las rectas $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2$ son respectivamente *perpendiculares* a las rectas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, se tiene:

$$(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2) = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2).$$

b) Si \mathcal{D} es una *bisectriz* de las rectas secantes $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, se tiene, para toda recta Δ :

$$2(\Delta, \mathcal{D}) = (\Delta, \mathcal{D}_1) + (\Delta, \mathcal{D}_2) \pmod{\pi}.$$

● Si la orientación de E_2 se cambia por su *opuesta*, el ángulo de dos rectas queda cambiado por su opuesto (véase más adelante).

Relaciones con el concepto elemental de ángulo

Si \vec{u}, \vec{v} son dos vectores de E_2 que verifican $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \pmod{2\pi}$ su *distancia angular* (tal como ha sido definida en el § 2) es el número único $\theta_0 \in [0, \pi]$ que verifica

$$\theta - \theta_0 \in 2\pi\mathbf{Z} \quad \text{o} \quad \theta + \theta_0 \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

Igualmente, si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ son dos rectas de \mathcal{E}_2 que verifican $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \theta \pmod{\pi}$, su *distancia angular* es el número único $\theta_0 \in [0, \pi/2]$ que verifica

$$\theta - \theta_0 \in \pi\mathbf{Z} \quad \text{o} \quad \theta + \theta_0 \in \pi\mathbf{Z}.$$

Observación importante. Solamente es posible definir el *ángulo orientado* de dos vectores [resp. de dos rectas] de un espacio afín euclídeo cuando se ha elegido una orientación de un plano paralelo a los dos vectores [resp. rectas].

El concepto de ángulo orientado, que resulta muy cómodo para los problemas de Geometría plana no se extiende a los espacios euclídeos de dimensión ≥ 3 .

Observemos aquí que si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ son tres vectores de $\mathcal{E}_n (n \geq 3)$, se tiene la desigualdad

$$\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_3} \leq \widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2} + \widehat{\vec{u}_2, \vec{u}_3}$$

(véase § 5); se tiene una desigualdad análoga para las distancias angulares de rectas de \mathcal{E}_n : en \mathcal{E}_n , la relación de Chasles se sustituye por una *desigualdad*.

Efecto de un cambio de orientación del plano

Cambiamos ahora la orientación de E_2 por la orientación *opuesta*. Se comprueba entonces fácilmente que:

a) El homomorfismo Φ es sustituido por el homomorfismo

$$\bar{\Phi} : \mathbf{R} \rightarrow \text{SO}(E_2)$$

tal que

$$(\forall \theta \in \mathbf{R}) \quad \bar{\Phi}(\theta) = [\Phi(\theta)]^{-1},$$

es decir:

$$(\forall \theta \in \mathbf{R}) \quad \bar{\Phi}(\theta) = \Phi(-\theta);$$

b) El isomorfismo Ψ es sustituido por el isomorfismo

$$\bar{\Psi} : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \text{SO}(E_2)$$

tal que

$$(\forall \zeta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}) \quad \bar{\Psi}(\zeta) = [\Psi(\zeta)]^{-1}$$

o sea:

$$(\forall \zeta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}), \quad \bar{\Psi}(\zeta) = \Psi(-\zeta);$$

c) El isomorfismo Θ es sustituido por el isomorfismo

$$\bar{\Theta} : \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \rightarrow \text{SO}(E_2)/G$$

tal que

$$(\forall \xi \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}), \quad \bar{\Theta}(\xi) = [\Theta(\xi)]^{-1}$$

o sea:

$$(\forall \xi \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}), \quad \bar{\Theta}(\xi) = \Theta(-\xi).$$

Problema algebraico de la división de los ángulos

Para todo $a \in \mathbf{R}_+^*$, designemos por T_a el grupo cociente $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$, y por $p_a : \mathbf{R} \rightarrow T_a$ el homomorfismo canónico.

Pongamos $a = kb$, con $k \in \mathbf{N}^*$ y $b \in \mathbf{R}_+^*$; la aplicación $\varphi_k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto kx$ induce un homomorfismo natural $\psi_k : T_a \rightarrow T_b, X \mapsto kX$.

Es inmediato que ψ_k es suprayectiva ya que (φ_k es suprayectiva); su núcleo es el conjunto de los elementos de T_a cuyo orden es un divisor de k , es decir el subgrupo $G_k = b\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ de T_a .

Ahora bien la aplicación $u \mapsto bu$ de \mathbb{Z} sobre $b\mathbb{Z}$ induce un isomorfismo natural de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ sobre el grupo $G_k = b\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$: por lo tanto G_k es un **grupo cíclico** de k elementos.

Vamos a demostrar que G_k es el único subgrupo finito de k elementos de T_a .

Sea, en efecto, G un tal subgrupo. Por ser la restricción de p_a a $]0, a]$ una biyección, el conjunto $\Gamma =]0, a] \cap p_a^{-1}(G)$ es una parte finita de k elementos de \mathbb{R}_+^* . Designemos por b el elemento más pequeño de Γ . Si existiera un real $c \in \Gamma$ que no fuera múltiplo de b , existiría un entero n que verificaría las desigualdades estrictas $nb < c < (n+1)b$, y (por ser $p_a^{-1}(G)$ un subgrupo aditivo de \mathbb{R}) $c - nb$ sería un elemento de Γ estrictamente inferior a b , lo cual estaría en contradicción con la definición de b .

Por lo tanto, todos los elementos de Γ son múltiplos de b , y se tiene:

$$\Gamma = \{ b, 2b, \dots, kb \}.$$

Además, $a \in \Gamma$ (ya que $p_a(a)$ es el elemento neutro de G) y es el elemento más grande de Γ . Se tiene por lo tanto $a = kb$, de donde $p_a^{-1}(G) = b\mathbb{Z}$, y $G = b\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$.

De este estudio, nos quedaremos con las conclusiones siguientes (supuesto fijo el real $a > 0$):

I. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, el conjunto $G_k = \{X \in T_a \mid kX = 0_{T_a}\}$ es el único subgrupo finito de k elementos de T_a ; este grupo es cíclico y es engendrado por $p_a(b)$, con $b = a/k$.

II. Sean $Y \in T_a$ y $k \in \mathbb{N}^*$ dados. Entonces la ecuación (1) ($X \in T_a$ y $kX = Y$) admite exactamente k soluciones. Designando por X_0 una de ellas, el conjunto de las soluciones es $X_0 + G_k$. Dicho de otro modo: si y es un real tal que $p_a(y) = Y$, las soluciones de (1) son las imágenes por p_a de los reales $\frac{y}{k} + \lambda \frac{a}{k}$ ($\lambda = 0, 1, \dots, k-1$).

Aplicaciones

En lo que sigue, E_2 designa un plano vectorial euclídeo orientado y k un entero > 0 fijo cualquiera.

1. Tomemos $a = 2\pi$. Según I, se ve que el único subgrupo finito de k elementos del grupo de las rotaciones vectoriales de E_2 , es un grupo cíclico engendrado por la rotación de ángulo $2\pi/k$ (mod 2π).

2. Sea U el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1. El homomorfismo exponencial $\exp: \mathbb{R} \rightarrow U$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$, induce un isomorfismo de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sobre U (véase tomo 2, teorema VIII.8.10). Por aplicación de I con $a = 2\pi$, se obtiene:

Para cada entero $k > 0$, el conjunto U_k de las raíces k -ésimas de la unidad es el subgrupo finito único de k elementos de U ; además, U_k es cíclico y engendrado por $e^{2i\pi/k}$.

(Observemos que este resultado se desprende también de una propiedad general de los cuerpos conmutativos, establecida en el tomo 1, p. 141, que se puede aplicar a \mathbb{C} .)

3. Sigamos tomando $a = 2\pi$. Al interpretar II en el lenguaje de los ángulos orientados de semirrectas vectoriales, se obtiene:

Si d_1, d_2 son dos semirrectas vectoriales de E_2 , existen exactamente k semirrectas vectoriales δ de E_2 que verifican:

$$k(d_1, \delta) = (d_1, d_2);$$

se trata de las semirrectas δ_λ ($\lambda = 0, 1, \dots, k-1$) definidas por

$$(d_1, \delta_\lambda) = \frac{\varphi}{k} + \frac{2\lambda\pi}{k} \pmod{2\pi},$$

donde φ designa una determinación cualquiera del ángulo orientado (d_1, d_2) .

Para $k = 2$ se obtienen dos semirrectas opuestas δ_0, δ_1 cuya reunión es la única bisectriz de las semirrectas d_1, d_2 .

4. Al tomar $a = \pi$ e interpretar II en el lenguaje de los ángulos orientados de rectas vectoriales, se obtiene igualmente:

Si D_1, D_2 son rectas vectoriales de E_2 , existen exactamente k rectas vectoriales Δ de E_2 que verifican

$$k(D_1, \Delta) = (D_1, D_2);$$

se trata de las rectas Δ_λ ($\lambda = 0, 1, \dots, k-1$) definidas por

$$(D_1, \Delta_\lambda) = \frac{\varphi}{k} + \frac{\lambda\pi}{k} \pmod{\pi}$$

donde φ designa una determinación cualquiera del ángulo orientado (D_1, D_2) .

Para $k = 2$, se obtienen las bisectrices de las rectas D_1, D_2 .

§ II.4 COORDENADAS POLARES

En un plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 , sea $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un sistema de referencia ortonormal. Se da el nombre de *sistema de coordenadas polares* de un punto $M \in \mathcal{E}_2$, con relación al sistema ortonormal dado, a todo par (r, θ) de reales que verifiquen

(1)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

donde x, y designan las coordenadas de M en este sistema.

Recíprocamente, si r y θ son dos reales dados, el punto de \mathcal{E}_2 cuyas coordenadas x, y están definidas por (1) se dirá que es *el punto de coordenadas polares* r, θ .

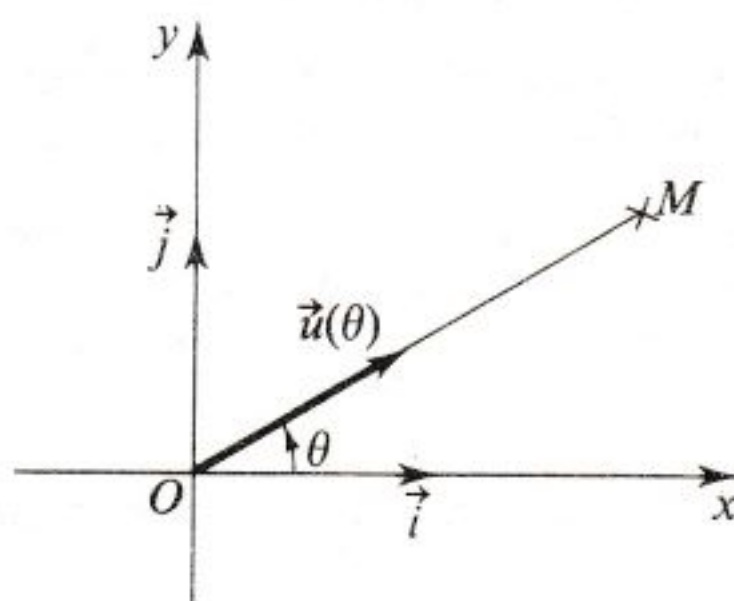


Figura 4.

Para cada $\theta \in \mathbf{R}$, pongamos

$$\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta.$$

La relación (1) equivale entonces a:

$$(1\text{bis}) \quad \boxed{\overrightarrow{OM} = r \vec{u}(\theta)}.$$

Busquemos todos los sistemas de coordenadas polares de un punto M dado.

En primer lugar, si $M = O$, los sistemas de coordenadas polares de O son todos los pares $(0, \theta)$, donde θ designa un real cualquiera.

Si $M \neq O$ se obtiene un sistema de coordenadas polares (r, θ) de M poniendo:

$$r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y tomando como θ uno cualquiera de los reales que verifican

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \vec{u}(\theta).$$

Supongamos ahora que \mathcal{E}_2 esté *orientado* de manera que la base (\vec{i}, \vec{j}) sea *directa*: se puede decir entonces que el vector $\vec{u}(\theta)$ se deduce de \vec{i} por la rotación de ángulo $+\pi/2 \pmod{2\pi}$; y, si M es un punto de E_2 distinto de O , todos los pares (r, θ) tales que

$$(2) \quad r = \|\overrightarrow{OM}\| \quad \text{e} \quad (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$$

son sistemas de coordenadas polares de M (véase la figura 4).

Si (r, θ) y (r_1, θ_1) son dos sistemas de coordenadas polares de M ($M \neq O$), la relación $r \vec{u}(\theta) = r_1 \vec{u}(\theta_1)$ implica:

bien

$$\vec{u}(\theta) = \vec{u}(\theta_1), \quad \text{de donde} \quad r = r_1 \quad \text{y} \quad \theta = \theta_1 \pmod{2\pi}$$

o bien

$$\vec{u}(\theta) = -\vec{u}(\theta_1), \quad \text{de donde} \quad r = -r_1 \quad \text{y} \quad \theta = \theta_1 + \pi \pmod{2\pi}.$$

Resulta, pues:

a) Todo punto $M \in \mathcal{E}_2$ admite una infinidad de sistemas de coordenadas polares; si \mathcal{E}_2 está orientado y si $M \neq O$ los sistemas (r, θ) que verifican $r > 0$ se hallan definidos por (2).

b) Si (r, θ) es un sistema de coordenadas polares de un punto M de \mathcal{E}_2 distinto de O , los sistemas de coordenadas polares de M son todos los pares:

$$(r, \theta + 2k\pi) \quad \text{y} \quad (-r, \theta + \pi + 2k\pi) \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Se observará que si la abscisa x de M es no nula, se tiene:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x},$$

cualquiera que sea el sistema de coordenadas polares (r, θ) de M .

De hecho, los sistemas de coordenadas polares de un punto $M \in \mathcal{E}_2$ no son sino los elementos de la imagen recíproca de M por la aplicación suprayectiva de clase C^∞

$$(3) \quad P: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{E}_2, \quad (r, \theta) \mapsto O + r \vec{u}(\theta)$$

(véase tomo 2, p. 292). Se nos presenta pues un problema de «globalización».

Definición II.4.1

Sea U un abierto de \mathcal{E}_2 . Se da el nombre de **coordenadas polares globales sobre U** (respecto al sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$) a toda aplicación continua

$$S: U \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad M \mapsto (r, \theta)$$

que verifica $(\forall M \in U) \overrightarrow{OM} = r \vec{u}(\theta)$ o sea, en otros términos tal que $P \circ S = \operatorname{Id}_U$, donde P es la aplicación definida por (3).

Se puede demostrar que no existe ninguna aplicación S que verifique estas condiciones y esté definida sobre un abierto que contenga al origen O (véase ejercicio III.1).

Si S es un sistema de coordenadas polares globales sobre un abierto U de \mathcal{E}_2 que no contiene a O , el teorema de la inversión local (tomo 2, teorema VI.5.1) demuestra que S es un *difeomorfismo* de U sobre un abierto V de \mathbf{R}^2 : en efecto, el jacobiano de P en el punto (r, θ) es igual a r y no se anula sobre $V = S(U)$; por lo tanto S es el difeomorfismo recíproco de la restricción de P a V .

Si (r, θ) es un sistema de coordenadas polares globales sobre U , las aplicaciones $M \mapsto (r, \theta + 2k\pi)$ y $M \mapsto (-r, \theta + \pi + 2k\pi)$, donde $k \in \mathbf{Z}$ designa una constante, son también sistemas de coordenadas globales sobre U . Si U es *conexo*, se puede demostrar que no existe otro.

En efecto, vamos a ver que la búsqueda de coordenadas polares globales equivale a la de una determinación continua del argumento de un número complejo, lo cual nos permitirá construirlas.

Asociemos al punto M de coordenadas (x, y) en el sistema de referencia $(O;$

\vec{i}, \vec{j}) de \mathcal{E}_2 el número complejo $z = x + iy$: se obtiene de este modo una biyección de \mathcal{E}_2 sobre \mathbf{C} que permite identificar \mathcal{E}_2 con \mathbf{C} ; y la relación $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta)$ equivale a $z = r e^{i\theta}$. Limitémonos a buscar los sistemas de coordenadas globales (r, θ) que verifiquen $r > 0$. Si U es un abierto de \mathcal{E}_2 que no contiene al origen, la búsqueda de un tal sistema (r, θ) sobre U equivale a buscar una determinación *continua* de $\arg(z)$ en U .

Aplicando el teorema VIII.10.2 del tomo 2, se obtiene por ejemplo:

En el plano \mathcal{E}_2 del que se ha suprimido la semirrecta D_α definida paramétricamente por $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$ ($t \geq 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ fijo), existe un sistema (r, θ) de coordenadas polares globales que verifican $r > 0$ y $\alpha < \theta < 2\pi + \alpha$. Si $\alpha = -\pi$ (caso del plano privado de la semirrecta $y = 0$, $x \leq 0$) la determinación del argumento así obtenida es la *determinación principal* (véase tomo 2, p. 407).

Cambio de sistema de referencia

Sigamos orientando E_2 de manera que la base (\vec{i}, \vec{j}) sea directa. Sea $\mathcal{R}' = (O; \vec{i}', \vec{j}')$ un sistema de referencia del mismo origen O que el sistema inicial $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, deducido de éste por una rotación de ángulo α .

Si (r, θ) designa un sistema de coordenadas polares de un punto M en el sistema de referencia inicial \mathcal{R} , se tiene, según (1 bis):

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u} \quad \text{con} \quad (\vec{i}, \vec{u}) = \theta \pmod{2\pi};$$

de donde, por aplicación de la relación de Chasles:

$$(\vec{i}', \vec{u}) = (\vec{i}, \vec{u}) - (\vec{i}, \vec{i}') = \theta - \alpha \pmod{2\pi}.$$

Resulta en consecuencia:

Si (r, θ) es un sistema de coordenadas polares de un punto $M \in \mathcal{E}_2$ en un sistema de referencia ortonormal \mathcal{R} , el par $(r, \theta - \alpha)$ es un sistema de coordenadas polares de M en el sistema de referencia deducido de \mathcal{R} por la rotación de ángulo α alrededor de su origen.

Aplicaciones

Ciertas transformaciones del plano euclídeo se explican de manera muy sencilla por medio de coordenadas polares. Por ejemplo, si (r, θ) designa un sistema de coordenadas polares de un punto M en un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$, entonces:

- $(r, -\theta)$ es un sistema de coordenadas polares del *simétrico de M respecto a la recta Ox* (dirigida por el vector \vec{i});
- $(r, \pi - \theta)$ es un sistema de coordenadas polares del *simétrico de M respecto a la recta Oy* (dirigida por el vector \vec{j});
- de un modo más general $(r, 2\alpha - \theta)$ es un sistema de coordenadas polares del *simétrico de M respecto a la recta de ecuación $x \operatorname{sen} \alpha - y \operatorname{cos} \alpha = 0$* ;
- $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ son sistemas de coordenadas polares del *simétrico de M respecto al origen*;
- $(r, \theta + \alpha)$ es un sistema de coordenadas polares del punto deducido de M por la *rotación* de centro O y ángulo $\alpha \pmod{2\pi}$;
- si $r \neq 0$, el par $(k/r, \theta)$ es un sistema de coordenadas polares del transformado de M por la *inversión* de polo O y potencia k ($k \in \mathbf{R}^*$).

Estas propiedades se utilizan a menudo para determinar los elementos de simetría de una curva definida mediante una ecuación polar (véase § VII.3).

§ II.5 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Coordenadas cilíndricas

Sea \mathcal{E}_3 un espacio afín euclídeo de dimensión 3 provisto de un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ cuyos ejes serán designados por Ox , Oy , Oz .

Se da el nombre de *sistema de coordenadas cilíndricas* (o *semipolares*) de un punto M de \mathcal{E}_3 , respecto a este sistema de referencia, a toda terna $(r, \theta, z) \in \mathbf{R}^3$ que verifique

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

donde x, y, z designan las coordenadas de M en \mathcal{R} . Equivale a decir que (r, θ) es un sistema de coordenadas polares de la proyección de M sobre el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Todo punto M de \mathcal{E}_3 admite pues una infinidad de sistemas de coordenadas cilíndricas.

- Si M pertenece al eje Oz , sus coordenadas cilíndricas son todas las ternas $(0, \theta, z)$, donde $\theta \in \mathcal{R}$ es arbitrario y donde z designa la tercera coordenada (cota) de M .
- Si (r, θ, z) designa un sistema de coordenadas cilíndricas de un punto M y si M no pertenece a Oz , los sistemas de coordenadas cilíndricas de M son las ternas de la forma:

$$(r, \theta + 2k\pi, z) \quad \text{o} \quad (-r, \theta + \pi + 2k\pi, z) \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Poniendo siempre $\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$ ($\theta \in \mathbf{R}$), se ve que la relación: « M admite como coordenadas cilíndricas a (r, θ, z) » equivale a:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + z\vec{j}.$$

Sea U un abierto de \mathcal{E}_3 . Se dará el nombre de *coordenadas cilíndricas globales* sobre U a toda aplicación **continua**:

$$S : U \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad M \mapsto (r, \theta, z)$$

tal que para cada $M \in U$, la terna $S(M) = (r, \theta, z)$ sea un sistema de coordenadas polares de M (en el sistema de referencia \mathcal{R} considerado).

Se puede demostrar que una tal aplicación solamente puede existir si U no corta al eje Oz y, de existir una, es un difeomorfismo de U sobre un abierto de \mathbf{R}^3 .

Para que una tal aplicación S exista, *basta* que existan coordenadas polares globales sobre la proyección de U en el plano Oxy ; pero tal condición no es necesaria.

Coordenadas esféricas

Sigamos designando por \mathcal{E}_3 un espacio afín euclídeo provisto de un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de ejes Ox , Oy , Oz .

Se da el nombre de *sistema de coordenadas esféricas* de un punto M de \mathcal{E}_3 , respecto a este sistema de referencia, a toda terna $(r, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3$ que verifique:

$$(1) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

donde (x, y, z) designan las coordenadas de M respecto a \mathcal{R} .

Dicho de otro modo, los sistemas de coordenadas esféricas de M son los elementos de la imagen recíproca de M en la aplicación de clase C^∞ :

$$(2) \quad \Sigma : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathcal{E}, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto O + r \sin \theta (\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) + r \cos \theta \vec{k}.$$

Resulta fácil ver que todo punto M de \mathcal{E}_3 admite una infinidad de sistemas de coordenadas esféricas. En efecto:

a) Si $M = O$, las coordenadas esféricas de M son todas las ternas $(0, \theta, \varphi)$ con $\theta \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{R}$.

b) Sea M un punto del eje Oz distinto de O y por lo tanto de coordenadas $(0, 0, z)$ con $z \neq 0$. Sus sistemas de coordenadas esféricas son todas las ternas $(z, 2k\pi, \varphi)$ y las ternas $(-z, (2k+1)\pi, \varphi)$ ($k \in \mathbf{Z}$, $\varphi \in \mathbf{R}$).

c) Sea M un punto de \mathcal{E}_3 , de coordenadas x, y, z , que no pertenece al eje Oz , y sea m su proyección sobre el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (véase figura 5). Si (r, θ, φ) es un sistema de coordenadas esféricas de M , entonces $(r \operatorname{sen} \theta, \varphi)$ es un sistema de coordenadas polares de m en el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Recíprocamente, si (ρ, φ) es un sistema de coordenadas polares de m , toda terna (r, θ, φ) que verifique:

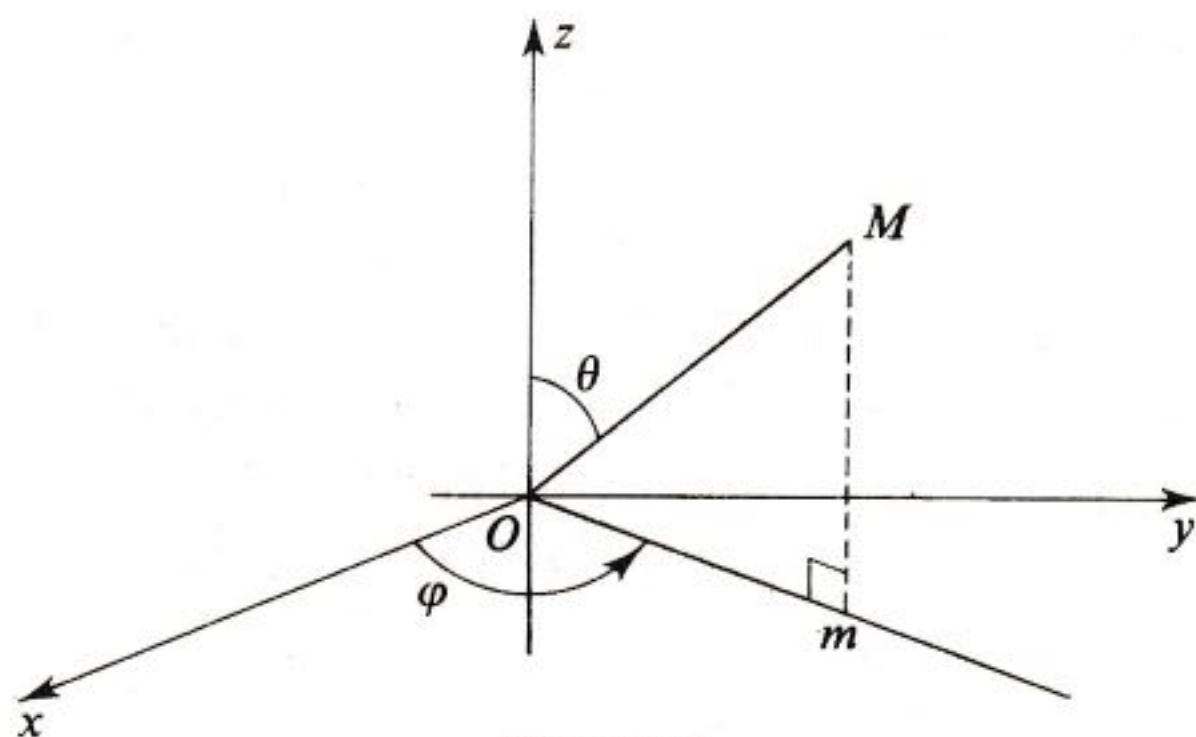


Figura 5.

$$r \operatorname{sen} \theta = \rho, \quad r \cos \theta = z$$

es un sistema de coordenadas esféricas de M . De ello se deduce que M admite una infinidad de sistemas de coordenadas esféricas.

● Se puede suponer siempre $r \geq 0$ y $\theta \in [0, \pi]$. Si M no pertenece al eje Oz , las ternas que corresponden a esta elección son las que verifican las relaciones:

$$(3) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \operatorname{Arc} \cos \left(\frac{z}{r} \right), \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{y}{r}$$

Los números r y θ quedan determinados entonces de manera única y φ queda determinado módulo 2π . En este caso, se tiene (véase figura 5):

- $\theta = \widehat{MOz}$ (distancia angular de los vectores \overrightarrow{OM} y \vec{k}).
- $\varphi = \widehat{Ox, Om}$ (ángulo orientado de los vectores \vec{i} y \overrightarrow{Om} en el plano orientado (Oxy)).

Coordenadas esféricas globales

Volvamos a la aplicación Σ definida por (2). Si U es un abierto de \mathcal{E}_3 , se da el nombre de sistema de coordenadas globales sobre U a toda aplicación continua

$$S : M \mapsto (r, \theta, \varphi)$$

de U en \mathbb{R}^3 que verifique $\Sigma \circ S = \text{Id}_U$, es decir (1), designando por x, y, z las coordenadas cartesianas de M .

El jacobiano de Σ en el punto (r, θ, φ) es $J = r^2 \sin \theta$, que solamente es nulo cuando el punto $M = \Sigma(r, \theta, \varphi)$ pertenece al eje Oz . De ello resulta que todo sistema de coordenadas esféricas globales definido sobre un abierto que no corta a Oz es de clase C^∞ ; además, todo punto de \mathcal{E}_3 , que no pertenece a Oz , admite un entorno sobre el cual existe un sistema de coordenadas esféricas globales.

Por ejemplo, las relaciones (4) muestran que existen coordenadas esféricas globales sobre $\mathcal{E}_3 \setminus P$, donde P designa el *semiplano* $y = 0, x \leq 0$: uno de estos sistemas establece un difeomorfismo de $\mathcal{E}_3 \setminus P$ sobre el abierto de \mathbb{R}^3 definido por las desigualdades

$$r > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Aplicación: fórmula fundamental de la trigonometría esférica

Designemos por A, B, C tres puntos de la esfera de \mathcal{E}_3 de centro O y de radio 1, por a, b, c los ángulos de las caras del triedro $(O; A, B, C)$ y por α, β, γ los ángulos diedros de este triedro. $a = \widehat{BOC}$ es la distancia angular de los vectores $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$; y α es el ángulo de los semiplanos $(OAB), (OAC)$, es decir la distancia angular de las semirrectas obtenidas al cortar estos semiplanos (limitados por la recta (OA)) por un plano perpendicular a (OA) . b, c, β y γ se definen de manera análoga, y se tiene:

(5)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \alpha.$$

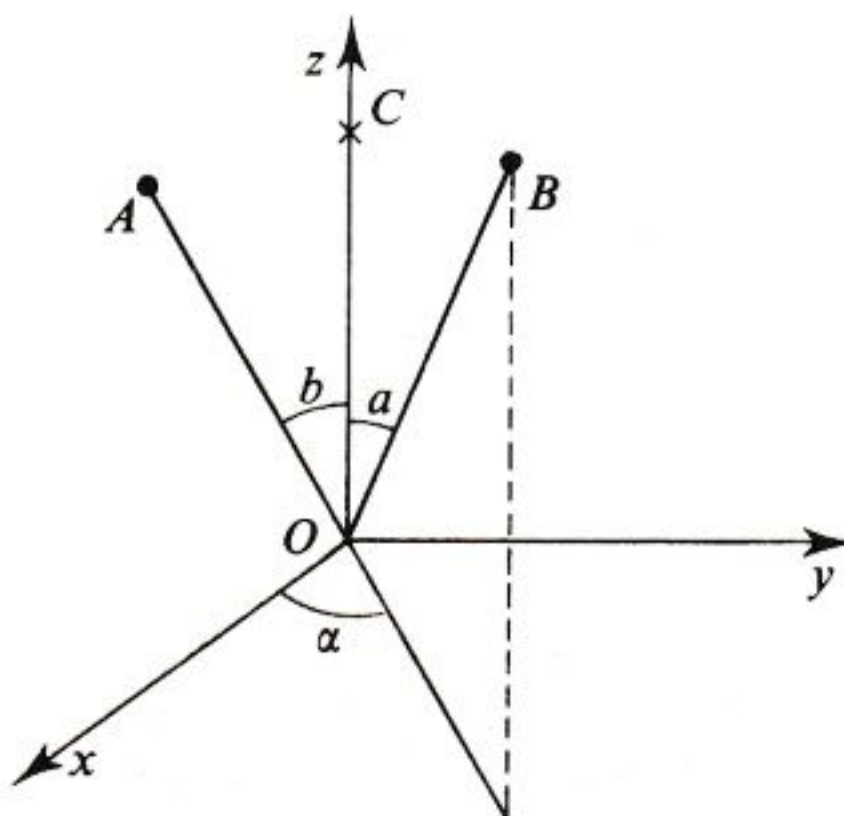


Figura 6.

Demostración. Tomemos un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$, y que A esté en el plano (O, \vec{i}, \vec{k}) . Entonces A admite el sistema de coordenadas esféricas $(1, b, 0)$ y B admite el sistema de coordenadas esféricas $(1, a, \alpha)$, de donde se deducen las coordenadas cartesianas de A , o sea:

$$x_A = \text{sen } b, \quad y_A = 0, \quad z_A = \cos b$$

y las coordenadas cartesianas de B , o sea:

$$x_B = \text{sen } a \cos \alpha, \quad y_B = \text{sen } a \text{ sen } \alpha, \quad z_B = \cos a$$

de donde

$$\cos c = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \text{sen } a \text{ sen } b \cos \alpha + \cos a \cos b.]$$

Sea entonces $(O; A', B', C')$ un triedro *suplementario* de $(O; A, B, C)$ definido por las relaciones:

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$$

(estando el espacio \mathcal{E}_3 orientado de un modo cualquiera).

Se demuestra entonces fácilmente que los números $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ asociados a este triedro verifican:

$$a' = \alpha, \quad b' = \beta, \quad c' = \gamma, \quad \alpha' = a, \quad \beta' = b, \quad \gamma' = c;$$

y aplicando la fórmula (5) a este triedro se obtiene la fórmula dual de (5):

(6)

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos a$$

Por permutación circular sobre a, b, c y α, β, γ se obtendrían otras cuatro relaciones entre los seis números $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

Se observará que a, b, c son las longitudes de los *lados* del *triángulo esférico* de vértices A, B, C (estos lados son arcos de círculo máximo de longitud $< \pi$) y que α, β, γ son los *ángulos* de este triángulo.

De la relación (5) se deduce:

$$\cos c \geq \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b = \cos(a + b)$$

de donde (al estar a, b, c comprendidos entre 0 y π):

$$c \leq a + b.$$

Para todos los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de \mathcal{E}_3 , se tiene por lo tanto:

$$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \leq \widehat{\vec{u}, \vec{w}} + \widehat{\vec{w}, \vec{v}}$$

lo cual justifica el término de *distancia angular* utilizado para designar el ángulo de \vec{u} y \vec{v} . (Para un estudio detallado de la Geometría esférica, se puede consultar [8].)

II.6 RECTAS DEL PLANO EUCLÍDEO

En este §, vamos a considerar un plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 , provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, y mientras no se diga nada del sistema de referencia, se tratará de uno de este tipo. Los ejes asociados al mismo se designarán por Ox , Oy .

Ecuaciones de una recta

Toda ecuación cartesiana de una recta afín \mathcal{D} es de la forma

$$(1) \quad ux + vy + h = 0, \quad \text{con } (u, v) \neq (0, 0).$$

Designemos por H la proyección ortogonal de E sobre \mathcal{D} , por M el punto de coordenadas (x, y) y pongamos

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}.$$

La relación (1) equivale entonces a

$$(1\text{bis}) \quad \overrightarrow{OM} \cdot \vec{V} + h = 0.$$

Si M_0 designa un punto fijo cualquiera de \mathcal{D} , se tiene $h = -\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{V}$ y la relación (1 bis) se escribe:

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{V} = 0}.$$

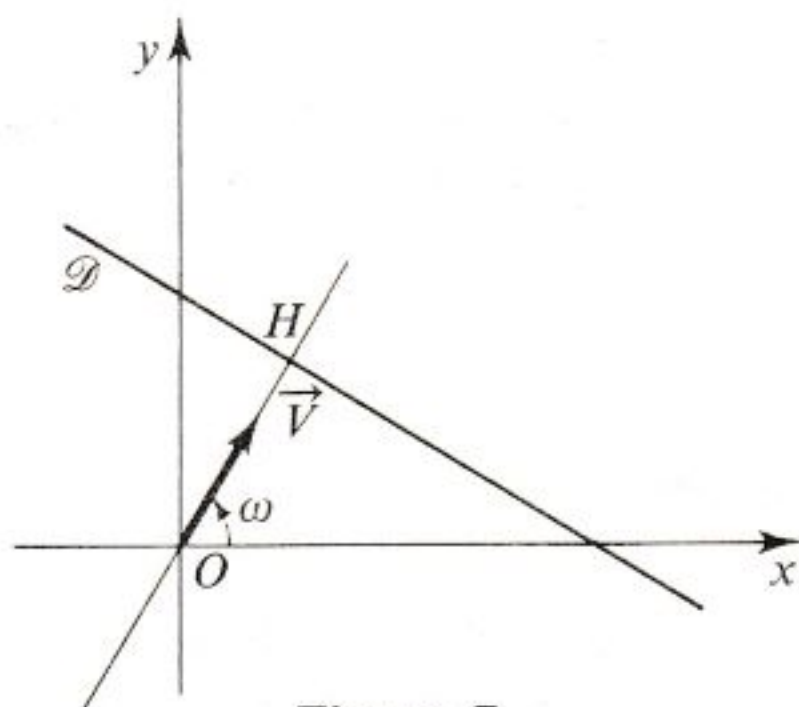


Figura 7.

El vector \vec{V} es pues ortogonal a \mathcal{D} , y H pertenece a la recta que pasa por O y está dirigida por \vec{V} (véase figura 7). Si se sustituyen u, v, h por ku, kv, kh , siendo $k \in \mathbf{R}^*$, el vector \vec{V} es sustituido por $k\vec{V}$. De esto se deduce que \mathcal{D} admite exactamente *dos* ecuaciones cartesianas en las que \vec{V} es *unitario*, a saber:

$$(2) \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{y} \quad (-\alpha)x + (-\beta)y + (-\gamma) = 0$$

con:

$$\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \gamma = \frac{h}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Las dos ecuaciones (2) reciben el nombre de *ecuaciones normales de \mathcal{D}* . Consideremos la ecuación normal

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 ;$$

al ser unitario el vector $\vec{v} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$, existe un real ω , que es *único* módulo (2π) , tal que:

$$\vec{v} = \vec{i} \cos \omega + \vec{j} \sin \omega ;$$

y la ecuación considerada se escribe

(3)

$$x \cos \omega + y \sin \omega + \gamma = 0 .$$

Según 3, la relación (4) se escribe $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} + \gamma = 0$, o sea $\gamma = \overrightarrow{MO} \cdot \vec{v}$; en particular:

$$\gamma = \overrightarrow{HO} \cdot \vec{v}, \quad \text{o sea} \quad \gamma = \overline{HO},$$

habiendo tomado la medida algebraica según el vector \vec{v} . Para la otra ecuación normal, se cambia ω por $\omega + \pi \pmod{2\pi}$ y \vec{v} por $-\vec{v}$; por lo tanto \overline{HO} queda cambiado por su opuesto.

Ecuaciones polares de una recta

Designemos por \mathcal{D} una recta de \mathcal{E}_2 y busquemos la condición para que un punto de coordenadas polares (r, θ) en el sistema de referencia ortonormado $(O; \vec{i}, \vec{j})$ pertenezca a \mathcal{D} :

a) Si \mathcal{D} pasa por O , la condición buscada es evidentemente

$$(4) \quad \boxed{\theta = \theta_0 \pmod{\pi}}, \quad \text{con } \theta_0 = (Ox, \mathcal{D}) \pmod{\pi}.$$

Recíprocamente, toda relación de la forma (4), con θ_0 fijo, define una recta que pasa por O .

Cuando \mathcal{D} no es el eje Oy , la relación (4) equivale a $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0$.

b) Si \mathcal{D} es cualquiera, sea

$$(5) \quad x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega + \gamma = 0$$

una de sus ecuaciones normales. Para que el punto de coordenadas polares (r, θ) pertenezca a \mathcal{D} , es necesario y suficiente que los números $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ verifiquen (5); en otros términos, es necesario y suficiente que los números r, θ verifiquen:

$$(6) \quad \boxed{r(\cos \omega \cos \theta + \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta) + \gamma = 0}.$$

A la relación (6) se le da el nombre de *ecuación polar* de \mathcal{D} . Se escribe también

$$(7) \quad \boxed{r \cos(\theta - \omega) + \gamma = 0}.$$

Recíprocamente, sea una relación de la forma

$$r(A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta) + C = 0 \quad (A, B, C = \text{Ctes}, (A, B) \neq (0, 0)).$$

Esta relación es una condición necesaria y suficiente para que el punto de coordenadas polares (r, θ) pertenezca a la recta \mathcal{D} de ecuación cartesiana

$$Ax + By + C = 0.$$

Es por lo tanto una *ecuación polar* de \mathcal{D} . Si $C = 0$, la recta \mathcal{D} pasa por O y nos volvemos a encontrar con una ecuación polar de la forma (5).

En el caso de una recta \mathcal{D} definida por una ecuación polar de la forma (7), se observará que el punto H (proyección de O sobre \mathcal{D}) está definido por

$$\overrightarrow{OH} = -\gamma \vec{v} = -\gamma(\vec{i} \cos \omega + \vec{j} \sin \omega),$$

es pues el punto de coordenadas polares $(-\gamma, \omega)$. Esta observación permite construir fácilmente \mathcal{D} .

Distancia de un punto a una recta

Sea \mathcal{D} una recta afín de ecuación cartesiana $ux + vy + h = 0$ y sea M_0 un punto de coordenadas (x_0, y_0) , que se proyecta ortogonalmente sobre \mathcal{D} en H_0 . El problema consiste en calcular la distancia de M_0 a \mathcal{D} , o sea $d(M_0) = H_0M_0$ (véase la figura 8).

Para abreviar, pondremos, para todo punto M de coordenadas (x, y) :

$$D(M) = ux + vy + h;$$

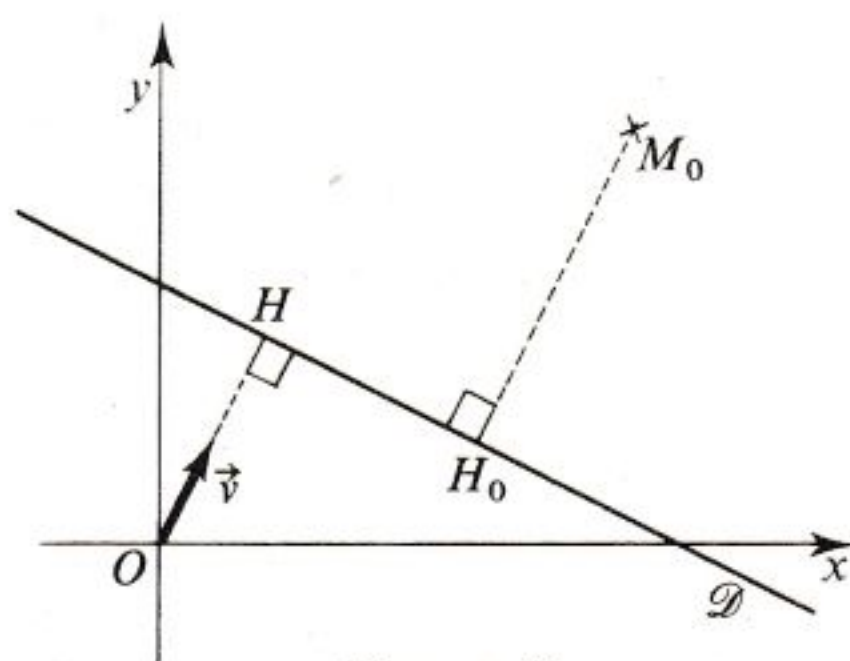


Figura 8.

y, lo mismo que antes, pondremos:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{u\vec{i} + v\vec{j}}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Cualesquiera que sean los puntos M, M' de \mathcal{E}_2 , de coordenadas respectivas $(x, y), (x', y')$, se tiene:

$$D(M') - D(M) = u(x' - x) + v(y' - y) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{MM'}.$$

En particular, por ser $H_0 \in \mathcal{D}$, se tiene:

$$D(M_0) = D(M_0) - D(H_0) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{H_0M_0} = \sqrt{u^2 + v^2} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{H_0M_0});$$

sea otra vez: $D(M_0) = \sqrt{u^2 + v^2} \overline{H_0 M_0}$, habiendo tomado la medida algebraica según el vector \vec{v} .

Se tiene pues:

$$d(M_0) = \frac{|D(M_0)|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{|ux_0 + vy_0 + h|}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Distancia entre dos rectas paralelas

Si dos rectas \mathcal{D} , \mathcal{D}' son paralelas, se pueden poner sus ecuaciones bajo la forma

$$ux + vy + h = 0, \quad ux + vy + h' = 0.$$

De donde las ecuaciones normales

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \alpha x + \beta y + \gamma' = 0$$

con:

$$\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \gamma = \frac{h}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \gamma' = \frac{h'}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Según el estudio de las ecuaciones normales, se ve que la distancia d entre las dos rectas es: $d = HH' = |\gamma - \gamma'|$ (véase la figura 9) de donde:

$$d = \frac{|h - h'|}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

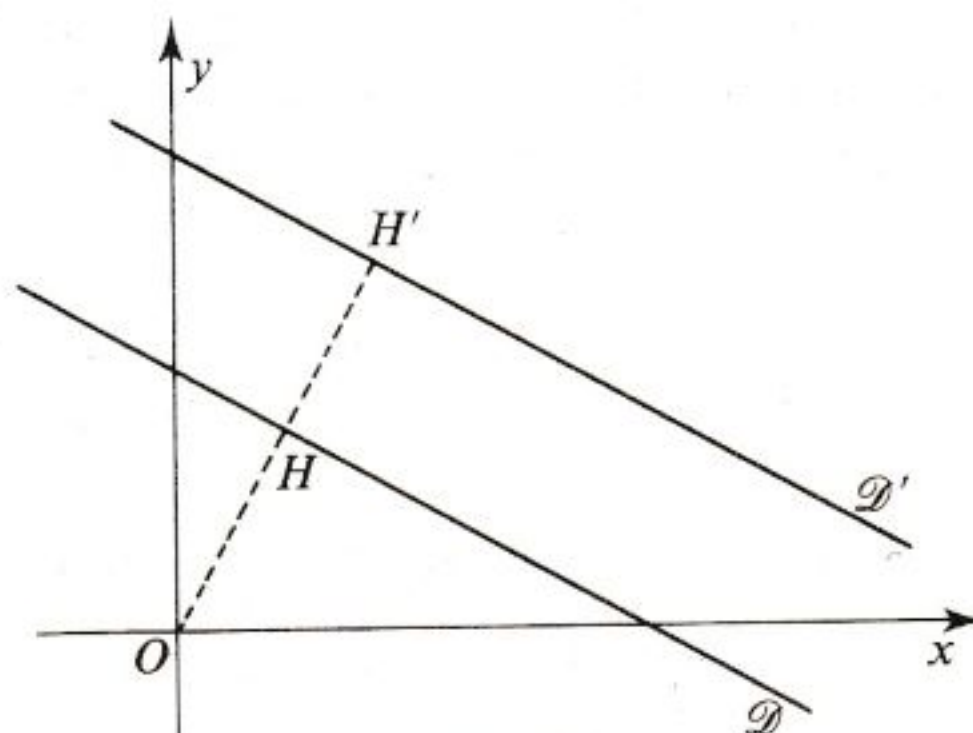


Figura 9.

Ángulo de dos rectas

La determinación del ángulo de dos rectas \mathcal{D} , \mathcal{D}' no presenta dificultad alguna. Si

$$ux + vy + h = 0, \quad u'x + v'y + h' = 0$$

son ecuaciones de \mathcal{D} y \mathcal{D}' , se sabe que los vectores

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}, \quad \vec{V}' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$$

son respectivamente normales a \mathcal{D} y \mathcal{D}' . Basta por lo tanto determinar el ángulo de \vec{V} y \vec{V}' . Por un abuso de escritura cómoda ⁽¹⁾, se tiene en efecto:

$$(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = (\vec{V}, \vec{V}') \pmod{\pi}.$$

§ II.7 HAZ DE RECTAS DEFINIDO MEDIANTE UNA ECUACIÓN HOMOGÉNEA DE SEGUNDO GRADO (EN EL PLANO)

Atendiendo al interés que presenta en las aplicaciones, vamos a estudiar el conjunto plano definido (en un sistema de referencia dado) por una ecuación cartesiana de la forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

En el caso en que este conjunto es la reunión de dos rectas, veremos enseguida como se puede determinar sencillamente su ángulo y sus bisectrices.

Para abreviar, un conjunto de rectas que pasan por un mismo punto O recibirá el nombre de **haz** finito de rectas; se dice a veces también, por abuso del lenguaje, que es un **haz de rectas** ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Se puede justificar este abuso de escritura por medio de un isomorfismo adecuado de grupos cociente.

⁽²⁾ En rigor, el haz de rectas que pasan por O es el conjunto de *todas las rectas* que pasan por O (véase § I.11)(*).

(*) *N. del T.* Diremos siempre abreviadamente «haz» en vez de «haz finito».

Estudio afín

Sea \mathcal{E} un plano afín, provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cualquiera. Consideremos en primer lugar dos rectas D_1, D_2 , que pasan por O , definidas por sus ecuaciones respectivas:

$$u_1 x + v_1 y = 0, \quad u_2 x + v_2 y = 0.$$

Su *reunión* $D_1 \cup D_2$ es entonces el conjunto definido por la ecuación

$$(u_1 x + v_1 y)(u_2 x + v_2 y) = 0.$$

o sea:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

con

$$A = u_1 u_2, \quad 2B = u_1 v_2 + u_2 v_1, \quad C = v_1 v_2.$$

Se comprueba que $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Recíprocamente, sean A, B, C tres reales no todos nulos, sea f la forma cuadrática definida sobre \mathbf{R}^2 por

$$(1) \quad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

y sea Γ el conjunto de \mathcal{E} definido por la ecuación $f(x, y) = 0$, es decir el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{E}$ cuyas coordenadas (x, y) verifican $f(x, y) = 0$.

Designando por $\Delta = AC - B^2$ al discriminante de f , vamos a ver que Γ es:

- el conjunto $\{O\}$ si $\Delta > 0$;
- una recta que pasa por O si $\Delta = 0$;
- la reunión de dos rectas que pasan por O si $\Delta < 0$.

Primer caso: $\Delta > 0$. Esta condición equivale a decir que la forma cuadrática f es *definida positiva* o *definida negativa*.

Cuando es así, se tiene $f(x, y) \neq 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, por lo tanto el conjunto Γ se reduce al punto O .

Segundo caso: $\Delta = 0$. Esta condición significa que f es *degenerada*. Al ser $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, se tiene entonces: $(A, C) \neq (0, 0)$.

Si $A = 0$, se tiene: $f(x, y) = Cy^2$.

Si $A \neq 0$, se tiene: $f(x, y) = A \left(x + \frac{B}{A} y \right)^2$.

En todos los casos, se ve por lo tanto que el conjunto Γ definido por la ecuación $f(x, y) = 0$ es *una recta que pasa por O* .

Tercer caso: $\Delta < 0$. Esta condición significa que f es *no definida* y *no degenerada*. Pongamos entonces $\Delta = -\delta^2$. Si $A \neq 0$, se tiene:

$$f(x, y) = A \left[\left(x + \frac{B}{A} y \right)^2 - \delta^2 y^2 \right] = A \left[x + \left(\frac{B}{A} + \delta \right) y \right] \left[x + \left(\frac{B}{A} - \delta \right) y \right].$$

El conjunto Γ es entonces la reunión de las dos rectas distintas que pasan por O de ecuaciones respectivas.

$$x + \left(\frac{B}{A} + \delta \right) y = 0 \quad \text{y} \quad x + \left(\frac{B}{A} - \delta \right) y = 0.$$

Si $A = 0$, Γ es la reunión de las dos rectas distintas, definidas respectivamente por

$$y = 0 \quad \text{y} \quad 2Bx + Cy = 0.$$

Se ve por lo tanto que, en este tercer caso, Γ es la *reunión de dos rectas distintas que pasan por O* . Diremos que es el *haz de rectas* definido por la ecuación (1).

En el caso $\Delta \leq 0$, vamos a ver que *toda forma cuadrática g sobre \mathbf{R}^2 , tal que el conjunto Γ esté definido por la ecuación $g(x, y) = 0$, es de la forma kf , con $k \in \mathbf{R}^*$* .

En efecto, supongamos en primer lugar $C \neq 0$: el conjunto Γ es entonces la reunión de dos rectas (distintas o no) que pasan por O y distintas del eje Oy . Las *pendientes* de estas rectas, referidas al sistema $(O; \vec{i}, \vec{j})$ son las raíces de la ecuación (de incógnita m):

$$(2) \quad Cm^2 + 2Bm + A = 0$$

(llamada *ecuación de las pendientes*).

Pongamos $g(x, y) = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2$; si $g = 0$ representa también Γ , se tiene en primer lugar: $C' \neq 0$ (ya que Oy no está contenida en Γ), y la ecuación de las pendientes

$$C'm^2 + 2B'm + A' = 0$$

tiene las *mismas raíces* que (2). Existe por lo tanto un $k \in \mathbf{R}^*$ tal que

$$A' = kA, \quad B' = kB, \quad C' = kC, \quad \text{de donde: } g = kf.$$

Si $C = 0$ se llega fácilmente a la misma conclusión.

Recíprocamente, si $g = kf$ ($k \in \mathbf{R}^*$) la ecuación $g = 0$ define el mismo conjunto I' que la ecuación $f = 0$.

Problemas de ángulos para un haz de dos rectas en \mathcal{E}_2

En el plano afín euclídeo orientado \mathcal{E}_2 , provisto de un sistema de referencia ortonormal directo $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, consideremos el haz de rectas $\{\mathcal{D}', \mathcal{D}''\}$ definido por la ecuación:

$$(3) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

con $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ y $\Delta = AC - B^2 \leq 0$.

Primer problema: determinar, en función de A, B, C , el ángulo de \mathcal{D}' y \mathcal{D}'' .
Supongamos en primer lugar $C \neq 0$. La ecuación de las pendientes es entonces:

$$Cm^2 + 2Bm + A = 0,$$

y a sus raíces las designaremos por (m', m'') .

Sean θ', θ'' números reales tales que:

$$(Ox, \mathcal{D}') = \theta', \quad (Ox, \mathcal{D}'') = \theta'' \pmod{\pi}.$$

En ángulo orientado de las rectas $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ viene entonces dado por

$$\varphi = (\mathcal{D}', \mathcal{D}'') = \theta'' - \theta' \pmod{\pi}.$$

Cambiando si es preciso el orden de los números m', m'' , se puede suponer que:

$$m' = \operatorname{tg} \theta', \quad m'' = \operatorname{tg} \theta''.$$

De donde, mediante un cálculo fácil:

$$\cos^2 \varphi = \frac{(1 + m' m'')^2}{1 + m'^2 + m''^2 + m'^2 m''^2}.$$

Teniendo en cuenta que:

$$m' m'' = \frac{A}{C}, \quad m' + m'' = -\frac{2B}{C},$$

se obtiene:

$$(4) \quad \cos^2 \varphi = \frac{(A + C)^2}{(A + C)^2 - 4\Delta} = \frac{(A + C)^2}{(A - C)^2 + B^2},$$

lo cual determina el ángulo (no orientado) de \mathcal{D}' y \mathcal{D}'' en función de A, B, C .

Se comprueba fácilmente que la relación (4) sigue siendo válida si $C = 0$.

En particular, para que las rectas $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ sean *ortogonales*, es necesario y suficiente que se tenga $\cos \varphi = 0$, o sea: $A + C = 0$ (lo cual era de prever, puesto que esta relación equivale a $m' m'' = -1$). Observemos por otra parte que la relación $A + C = 0$ implica $\Delta \leq 0$.

Cuando \mathcal{D}' y \mathcal{D}'' no son ortogonales se tiene:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(m'' - m')^2}{(1 + m' m'')^2} = \frac{-4\Delta}{(A + C)^2},$$

pudiendo deducirse esta relación también de (4).

Observación. Al no quedar determinado el orden de las rectas $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ mediante la ecuación (3), el conocimiento de los números A, B, C no permite determinar su ángulo *orientado*.

Segundo problema: determinar el haz de las bisectrices de \mathcal{D}' y \mathcal{D}'' .

Designemos por F la forma cuadrática definida en E_2 por:

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad F(x\vec{i} + y\vec{j}) = f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

y sea Φ el operador simétrico de E_2 asociado a esta forma, por lo tanto de matriz

$$Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

en la base ortonormal (\vec{i}, \vec{j}) .

Según el teorema II.1.1, existe una base ortonormal (\vec{i}', \vec{j}') en la cual la matriz de Φ es de la forma

$$Q' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

de donde

$$F(x'\vec{i}' + y'\vec{j}') = \lambda x'^2 + \mu y'^2.$$

Los nuevos ejes Ox' , Oy' son las *bisectrices* de \mathcal{D}' y \mathcal{D}'' ; están dirigidas por *vectores propios* de Φ (véase § II.1). La *ecuación característica* de Φ es

$$X^2 - (A + C)X + \Delta = 0 \quad \text{con} \quad \Delta = AC - B^2.$$

Siendo > 0 el real $(A + C)^2 - 4\Delta$ (puesto que $\Delta \leq 0$ y $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$) se ve que esta ecuación tiene dos raíces *distintas*: los subespacios propios de Φ son por lo tanto de dimensión 1, lo cual concuerda con el hecho de que las bisectrices se hallan definidas de manera única.

De aquí se deduce una manera práctica de determinar las bisectrices en el sistema de referencia dado $(O; \vec{i}, \vec{j})$. En efecto, para que el vector $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$) sea un vector propio de Φ , es necesario y suficiente que exista $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que

$$A\alpha + B\beta = \lambda\alpha \quad \text{y} \quad B\alpha + C\beta = \lambda\beta,$$

lo cual equivale a:

$$\begin{vmatrix} A\alpha + B\beta & \alpha \\ B\alpha + C\beta & \beta \end{vmatrix} = 0, \text{ o sea: } B\alpha^2 + (C - A)\alpha\beta - B\beta^2 = 0.$$

En consecuencia: *el haz de las bisectrices de \mathcal{D}' y \mathcal{D}'' está definida por la ecuación:*

$$Bx^2 + (C - A)xy - By^2 = 0.$$

§ II.8 RECTAS Y PLANOS EN DIMENSIÓN 3

En este §, consideramos un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 , ligado al espacio vectorial euclídeo E_3 , de dimensión 3, y supondremos dado un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Mientras no se especifique otra cosa se supondrá que se trata de un sistema de referencia de este tipo.

● Por otra parte, en todas las cuestiones en que intervengan productos mixtos o productos vectoriales, se supondrá implícitamente que el espacio \mathcal{E}_3 está *orientado* de manera que el sistema de referencia \mathcal{R} sea **directo**.

Ecuaciones de un plano

Sea \mathcal{P} un plano afín de \mathcal{E}_3 , definido por la ecuación cartesiana

$$(1) \quad ux + vy + wz + h = 0 \quad \text{con} \quad (u, v, w) \neq (0, 0, 0).$$

Si \vec{V} designa el vector de componentes (u, v, w) y M el punto de coordenadas (x, y, z) , la relación (1) se escribe:

$$(1\text{bis}) \quad \overrightarrow{OM} \cdot \vec{V} + h = 0.$$

Si M_0 designa un punto fijo de \mathcal{P} , de coordenadas (x_0, y_0, z_0) , se tiene

$$h = -\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{V},$$

y la relación (1) se escribe:

$$(2) \quad \boxed{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{V} = 0}.$$

El vector \vec{V} es por lo tanto ortogonal a \mathcal{P} . Se dice que la ecuación (1) es *normal* si \vec{V} es unitario. Todo plano admite pues *dos* ecuaciones normales. Las del plano \mathcal{P} definido por la ecuación (1) son:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad \text{y} \quad (-\alpha)x + (\alpha\beta)y + (-\gamma)z + (-\delta) = 0$$

con

$$\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

$$\gamma = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad \delta = \frac{h}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Si $\vec{v} = \vec{V} / \|\vec{V}\|$ designa el vector unitario de componentes α, β, γ , la ecuación (1) equivale a

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} + \delta = 0;$$

en particular si H designa la proyección ortogonal de O sobre \mathcal{P} , se tiene:

$$\overrightarrow{OH} \cdot \vec{v} + \delta = 0, \quad \text{o sea} \quad \delta = \overline{HO},$$

tomando la medida algebraica según el vector \vec{v} .

Distancia de un punto a un plano

Sea \mathcal{P} el plano de ecuación $ux + vy + wz + h = 0$, M_0 un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) y H_0 la proyección ortogonal de H sobre \mathcal{P} .

Pongamos para abreviar $P(M) = ux + vy + wz + h$ para todo punto M de coordenadas (x, y, z) . Razonando de la misma forma que en el caso de la recta (véase § 6), se obtiene:

$$(3) \quad \boxed{\overline{H_0 M_0} = \frac{P(M_0)}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}},$$

tomando la medida algebraica según el vector \vec{v} acabado de definir.

En consecuencia, la distancia $d(M_0) = H_0 M_0$ de M_0 a \mathcal{P} viene dada por:

$$d(M_0) = \frac{|P(M_0)|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Consideremos ahora dos planos *secantes* \mathcal{P} , \mathcal{P}' respectivamente definidos por las ecuaciones:

$$P(M) = ux + vy + wz + h = 0, \quad P'(M) = u'x + v'y + w'z + h' = 0.$$

Entonces el conjunto de los puntos equidistantes de \mathcal{P} y \mathcal{P}' viene definido por la ecuación:

$$(4) \quad \frac{P^2(M)}{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{P'^2(M)}{u'^2 + v'^2 + w'^2},$$

que es la reunión de los dos planos definidos por las ecuaciones:

$$(5) \quad \frac{P(M)}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \varepsilon \frac{P'(M)}{\sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}} \quad \text{con } \varepsilon = \pm 1.$$

Estos planos reciben el nombre de **planos bisectores** de \mathcal{P} y \mathcal{P}' y forman haz con los \mathcal{P} y \mathcal{P}' .

Observación. Si los planos \mathcal{P} , \mathcal{P}' fueran paralelos y distintos, la relación (4)

definiría un plano único equidistante de \mathcal{P} y \mathcal{P}' , obtenido al tomar $\varepsilon = -1$ en (5) siendo $(u, v, w) = (u', v', w')$.

Distancia entre dos planos paralelos

Este problema se trata de manera análoga al de la distancia entre dos rectas paralelas en el plano. Se empieza poniendo las ecuaciones de los planos en la forma:

$$ux + vy + wz + h = 0, \quad ux + vy + wz + h' = 0.$$

La distancia buscada d viene entonces dada por:

$$d = \frac{|h - h'|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Ángulo entre dos planos

La determinación del ángulo entre dos planos \mathcal{P} , \mathcal{P}' se reduce a la del ángulo entre dos vectores no nulos respectivamente ortogonales a estos planos (véase § 3).

Si

$$ux + vy + wz + h = 0 \quad \text{y} \quad u'x + v'y + w'z + h' = 0$$

son ecuaciones de \mathcal{P} y \mathcal{P}' , los vectores

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{V}' = u'\vec{i} + v'\vec{j} + w'\vec{k}$$

son respectivamente ortogonales a \mathcal{P} y \mathcal{P}' . El ángulo φ entre \mathcal{P} y \mathcal{P}' verifica por lo tanto:

$$\cos^2 \varphi = \frac{(\vec{V} \cdot \vec{V}')^2}{\|\vec{V}\|^2 \|\vec{V}'\|^2}$$

Recta definida por dos ecuaciones cartesianas

Toda recta afín \mathcal{D} de \mathcal{E} puede ser definida como intersección de dos planos no paralelos \mathcal{P} , \mathcal{P}' . Si

$$ux + vy + wz + h = 0, \quad u'x + v'y + w'z + h' = 0$$

son ecuaciones de \mathcal{P} y \mathcal{P}' , se sabe que los vectores

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{V}' = u'\vec{i} + v'\vec{j} + w'\vec{k}$$

son respectivamente ortogonales a \mathcal{P} y \mathcal{P}' .

Resulta, pues, que el vector $\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V}'$ es *paralelo* a \mathcal{D} ; decir que \mathcal{P} y \mathcal{P}' no son paralelos equivale a decir que $\vec{W} \neq 0$. Es de observar que: *un vector director de \mathcal{D} es $\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V}'$.*

En particular, toda recta *no paralela al plano de ecuación $z = 0$* puede ser considerada de manera única como intersección de un plano paralelo a Ox y de un plano paralelo a Oy , y admite por lo tanto un sistema único de ecuaciones de la forma:

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

con $a, b, p, q = \text{Ctes.}$ Estas ecuaciones proporcionan una parametrización de la recta, siendo el parámetro igual a la coordenada z .

Ángulo de una recta y de un plano

Sea \vec{W} un vector director de una recta \mathcal{D} y \vec{V} un vector no nulo ortogonal a un plano \mathcal{P} . El ángulo φ de \mathcal{D} y \mathcal{P} verifica:

$$\text{sen}^2 \varphi = \frac{(\vec{V} \cdot \vec{W})^2}{\|\vec{V}\|^2 \cdot \|\vec{W}\|^2} \quad (\text{véase § 2}).$$

Distancia de un punto a una recta

Buscamos aquí la distancia $d(M_0)$ de un punto M_0 , de coordenadas (x_0, y_0, z_0) , a una recta afín \mathcal{D} . Designaremos por H_0 la proyección ortogonal de M_0 sobre \mathcal{D} .

a) *Caso en que se conoce un punto A y un vector director \vec{W} de \mathcal{D} :*

Se tiene entonces:

$$\overrightarrow{AM_0} \wedge \vec{W} = \overrightarrow{HM_0} \wedge \vec{W} \quad \text{y} \quad \|\overrightarrow{HM_0} \wedge \vec{W}\| = \|\overrightarrow{HM_0}\| \cdot \|\vec{W}\| = d(M_0) \cdot \|\vec{W}\|,$$

de donde:

$$(6) \quad d(M_0) = \frac{\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \overrightarrow{W}\|}{\|\overrightarrow{W}\|}.$$

Teniendo en cuenta que:

$$\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \overrightarrow{W}\|^2 + (\overrightarrow{AM_0} \cdot \overrightarrow{W})^2 = \|\overrightarrow{AM_0}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{W}\|^2,$$

se tiene también:

$$d^2(M_0) = \|\overrightarrow{AM_0}\|^2 - \frac{(\overrightarrow{AM_0} \cdot \overrightarrow{W})^2}{\|\overrightarrow{W}\|^2}.$$

b) *Caso en que se conocen dos planos distintos \mathcal{P} , \mathcal{P}' que contienen a \mathcal{D} .*

Supongamos que \mathcal{P} y \mathcal{P}' se hallan respectivamente definidos, respecto a un sistema de referencia ortonormal directo, por las ecuaciones

$$P(M) = 0 \quad \text{y} \quad P'(M) = 0,$$

donde, para todo punto M de coordenadas x, y, z :

$$P(M) = ux + vy + wz + h \quad \text{y} \quad P'(M) = u'x + v'y + w'z + h'$$

Designemos por \overrightarrow{V} y \overrightarrow{V}' los vectores de componentes respectivas (u, v, w) y (u', v', w') ; pongamos $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}'$ y designemos por A un punto cualquiera de $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Se tiene entonces:

$$P(M_0) = P(M_0) - P(A) = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{AM_0};$$

$$P'(M_0) = P'(M_0) - P'(A) = \overrightarrow{V}' \cdot \overrightarrow{AM_0};$$

y, por aplicación de la fórmula del *doble producto vectorial* (véase § IV.2):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_0} \wedge \overrightarrow{W} &= \overrightarrow{AM_0} \wedge (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}') = -(\overrightarrow{AM_0} \cdot \overrightarrow{V}) \overrightarrow{V}' + (\overrightarrow{AM_0} \cdot \overrightarrow{V}') \overrightarrow{V} \\ &= P'(M_0) \overrightarrow{V} - P(M_0) \overrightarrow{V}'; \end{aligned}$$

de donde, por aplicación de (6): (ya que $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$ supone $\overrightarrow{W} \neq 0$):

$$d(M_0) = \frac{\| P'(M_0) \overrightarrow{V} - P(M_0) \overrightarrow{V}' \|}{\| \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}' \|}.$$

Perpendicular común a dos rectas

Si \mathcal{D} y \mathcal{D}' son dos rectas afines *no paralelas*, existe una recta \mathcal{L} y sólo una que corta ortogonalmente a \mathcal{D} y \mathcal{D}' ; de esta recta \mathcal{L} se dice que es la *perpendicular común* ⁽¹⁾ a \mathcal{D} y \mathcal{D}' .

Designemos por H, H' los puntos en que \mathcal{L} corta respectivamente a $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$, y por \mathcal{P} [resp. \mathcal{P}'] el plano paralelo a \mathcal{D} y \mathcal{D}' que contiene a \mathcal{D} [resp. \mathcal{D}'] (véase la figura 10). Entonces la distancia HH' es igual a la distancia de los planos paralelos $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$.

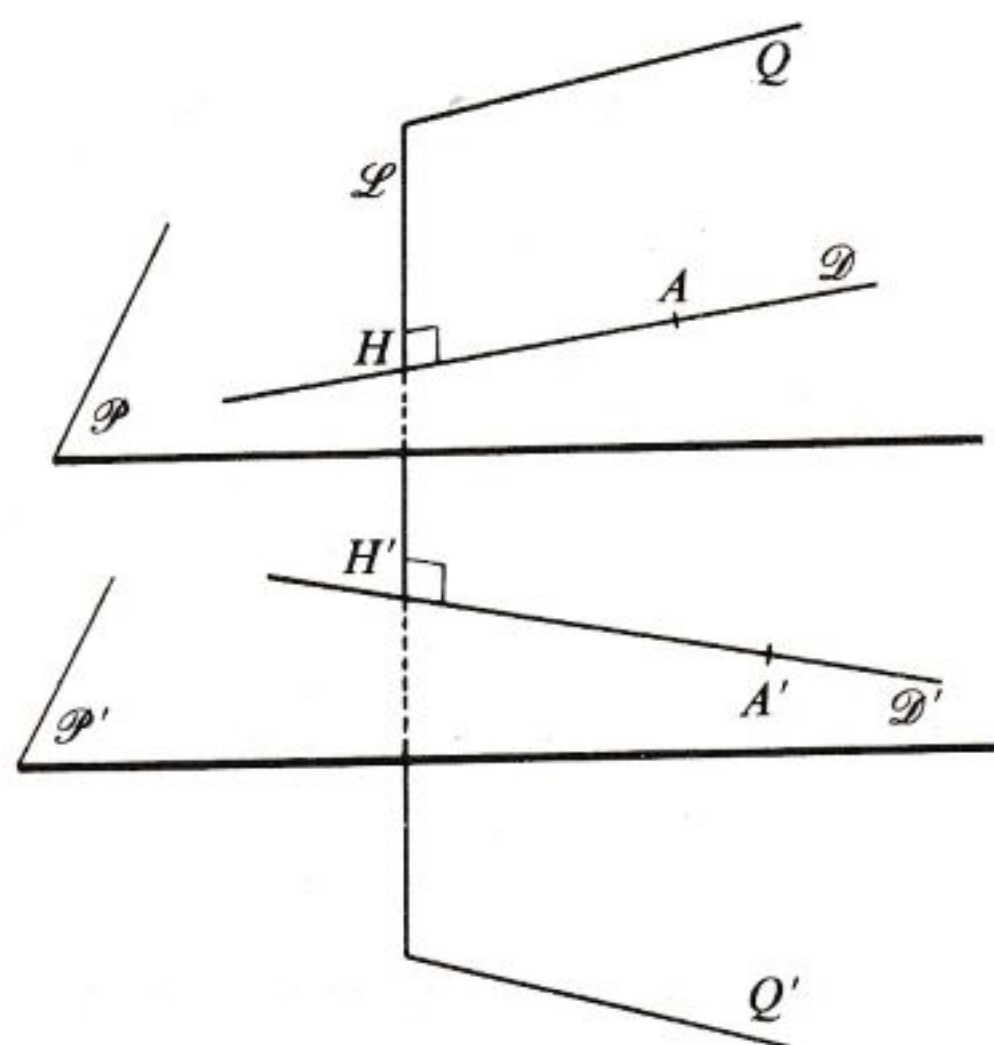


Figura 10.

Para todo punto A de \mathcal{D} y todo punto A' de \mathcal{D}' se tiene pues $AA' \geq HH'$ cumpliéndose la igualdad solamente cuando $A = H$ y $A' = H'$. El par (H, H') es por lo tanto el único elemento de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ tal que HH' es igual a la distancia $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$

⁽¹⁾ De hecho \mathcal{L} no es *perpendicular* a \mathcal{D} y \mathcal{D}' en el sentido de la definición II.2.2, sino *ortogonal* a \mathcal{D} y \mathcal{D}' .

entre las rectas \mathcal{D} , \mathcal{D}' . Este número $HH' = d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ se dice que es la **distancia más corta** entre \mathcal{D} y \mathcal{D}' .

Caso en que se conoce un punto y un vector director de cada recta.

Supongamos la recta \mathcal{D} [resp. \mathcal{D}'] definida mediante un punto A y un vector director $\vec{V} \in E_3$ [resp. mediante un punto A' y un vector director $\vec{V}' \in E_3$].

Un vector director de la recta \mathcal{L} es entonces

$$\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V}'.$$

Para determinar la recta \mathcal{L} , basta con que se dé uno de los puntos H , H' . Por ejemplo, para determinar H' , se puede buscar una ecuación del plano Q que contiene a \mathcal{D} y es paralelo a \vec{W} , sea ésta $F = 0$. Se tiene entonces $H' = A' + \lambda \vec{V}'$, quedando determinado el número por la condición $F(A' + \lambda \vec{V}') = 0$.

Para calcular la distancia más corta $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$, calculemos el producto mixto $\mu = [\vec{AA'}, \vec{V}, \vec{V}']$; sustituyendo $\vec{AA'}$ por $\vec{AH} + \vec{HH'} + \vec{H'A'}$, se obtiene:

$$[\vec{AA'}, \vec{V}, \vec{V}'] = [\vec{HH'}, \vec{V}, \vec{V}'] = \vec{W} \cdot \vec{HH'}.$$

De donde:

$$|\mu| = |\vec{W} \cdot \vec{HH'}| = \|\vec{W}\| \cdot \|\vec{HH'}\| = \|\vec{W}\| \cdot d(\mathcal{D}, \mathcal{D}').$$

Se tiene, pues,

$$d^2(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{[\vec{AA'}, \vec{V}, \vec{V}']^2}{\|\vec{V} \wedge \vec{V}'\|^2}$$

en particular, para que \mathcal{D} y \mathcal{D}' se corten, es necesario y suficiente que se tenga:

$$[\vec{AA'}, \vec{V}, \vec{V}'] = 0.$$

Observación importante.

a) Si no se hace ninguna hipótesis acerca de las rectas \mathcal{D} y \mathcal{D}' , la relación

$$[\vec{AA'}, \vec{V}, \vec{V}'] = 0$$

proporciona una condición necesaria y suficiente para que \mathcal{D} y \mathcal{D}' sean **coplanares** (por lo tanto secantes o paralelas). Traduce en efecto el hecho de que los vectores $\overrightarrow{AA'}$, \overrightarrow{V} , $\overrightarrow{V'}$ son coplanares.

b) Supongamos definida la recta \mathcal{D} [resp. \mathcal{D}'] mediante dos ecuaciones cartesianas

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0 \quad [\text{resp. } P'_1 = 0, \quad P'_2 = 0].$$

Resulta entonces fácil determinar un vector director \overrightarrow{V} de \mathcal{D} [resp. $\overrightarrow{V'}$ de \mathcal{D}']. La recta \mathcal{L} admite $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V'}$ como vector director, que es por lo tanto la intersección del plano Q , paralelo a \overrightarrow{W} que contiene a \mathcal{D} , con el plano Q' , paralelo a \overrightarrow{W} que contienen a \mathcal{D}' .

Se obtiene una ecuación de Q determinando λ de manera que el plano de ecuación $P_1 + \lambda P_2 = 0$ sea paralelo a \overrightarrow{W} , y si este valor se designa por λ_0 , una ecuación de Q es $P_1 + \lambda_0 P_2 = 0$. Del mismo modo se determina una ecuación de Q' , de la forma $P'_1 + \lambda'_0 P'_2 = 0$. La recta \mathcal{L} queda entonces definida mediante las ecuaciones $P_1 + \lambda_0 P_2 = 0$, y $P'_1 + \lambda'_0 P'_2 = 0$.

Para calcular la distancia más corta entre \mathcal{D} , \mathcal{D}' se puede buscar entre los planos de ecuación $P_1 + \lambda P_2 = 0$ (planos que contienen a \mathcal{D}) el plano \mathcal{P} paralelo a $\overrightarrow{V'}$. Del mismo modo se determina el plano \mathcal{P}' que contiene a \mathcal{D}' y es paralelo a \overrightarrow{V} ; la distancia buscada $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ es entonces igual a la distancia entre los planos paralelos \mathcal{P} , \mathcal{P}' (véase lo anterior).

§ II.9 PLANOS DEFINIDOS MEDIANTE UNA ECUACIÓN HOMOGÉNEA DE SEGUNDO GRADO

En este § seguimos designando por \mathcal{E}_3 un espacio euclídeo de dimensión 3 provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. El estudio que sigue es análogo al que se ha hecho en el § 7 en \mathcal{E}_2 .

Consideremos en primer lugar dos planos \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 de \mathcal{E}_3 , que pasan por O , de ecuaciones respectivas

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0, \quad u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0.$$

Para que un punto de \mathcal{E}_3 pertenezca a la *reunión* $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ de estos dos planos, es necesario y suficiente que sus coordenadas (x, y, z) verifiquen la ecuación $f(x, y, z) = 0$ con

$$(1) \quad f(x, y, z) = (u_1 x + v_1 y + w_1 z)(u_2 x + v_2 y + w_2 z).$$

Se observará que la función f definida por (1) es una forma cuadrática no nula en \mathbf{R}^3 , de rango 2 si $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, de rango 1 si $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Recíprocamente, supóngase dada una forma cuadrática de rango 1 o 2 en \mathbf{R}^3 , sea ésta ⁽¹⁾:

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy;$$

vamos a discutir la naturaleza del conjunto S de \mathcal{E}_3 definido por la ecuación cartesiana $f(x, y, z) = 0$, y en el caso en que S es la reunión de dos planos veremos como se determina su ángulo y sus planos bisectores.

Designemos por F la forma cuadrática definida en E_3 por

$$F(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = f(x, y, z)$$

y por Φ el operador simétrico de E_3 asociado a F (véase § II.1) por lo tanto de matriz:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{bmatrix}$$

en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

S es entonces el conjunto de los puntos M de \mathcal{E}_3 que verifican $F(\overrightarrow{OM}) = 0$.

Vamos a discutir la naturaleza de S según el rango de f (igual al de F).

a) Para que f sea de rango 1, es necesario y suficiente que exista $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ tal que las líneas de la matriz \mathcal{Q} sean proporcionales a (α, β, γ) ; cambiando si es preciso el orden de las coordenadas, se puede suponer $\alpha \neq 0$. Existe entonces un $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tal que

$$\mathcal{Q} = \frac{\lambda}{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \gamma\alpha \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}, \text{ de donde}$$

$$f(x, y, z) = \frac{\lambda}{\alpha} [\alpha x + \beta y + \gamma z]^2.$$

Se ve por lo tanto que el conjunto S es el plano de ecuación

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

b) Supongamos que f sea de rango 2. La ecuación característica de Φ es

$$(3) \quad -X^3 + IX^2 - JX = 0$$

⁽¹⁾ El caso en el que f es de rango máximo 3, se estudiará en el § III.8.

$$\begin{aligned} \text{con} \quad & I = A + A' + A'' = \text{tr}(\mathcal{Q}) \\ \text{y} \quad & J = B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - A''A - AA'. \end{aligned}$$

Por hipótesis, se tiene $J \neq 0$, por lo tanto Φ admite el valor propio simple 0 y dos valores propios no nulos λ y μ , que son *reales* (ya que Φ es simétrico).

El núcleo de Φ es una recta vectorial D , y la recta \mathcal{D} , que pasa por O y es paralela a D , está contenida en S .

Según el teorema II.1.1, existe una base ortonormal $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, en la cual se tiene:

$$F(x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}') = \lambda x'^2 + \mu y'^2.$$

En el sistema de referencia $\mathcal{R}' = (O; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ el conjunto S está definido por la ecuación cartesiana:

$$(4) \quad \lambda x'^2 + \mu y'^2 = 0.$$

Se deduce inmediatamente:

— Si λ y μ son del *mismo signo* (caso en que f es de signatura $(2, 0)$ o $(0, 2)$), el conjunto S queda reducido a la recta \mathcal{D} .

Este caso ocurre si, y solamente si, se tiene: $J > 0$.

— Si λ y μ son de *signo contrario* (caso en que f es de signatura $(1, 1)$), el conjunto S es la reunión de dos planos distintos $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ que se cortan según \mathcal{D} ;

Este caso se presenta si, y solamente si, se tiene: $J < 0$.

Primer problema: ángulo de los dos planos

Sigamos con la notación de b) y supongamos $J < 0$; vamos a determinar el ángulo de dos planos \mathcal{P} y \mathcal{P}' .

Si θ es una medida de este ángulo, se tiene, según (4), o bien

$$\text{tg}^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{\lambda}{\mu}, \quad \text{o bien} \quad \text{cotg}^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

En todos los casos, se deduce

$$\cos^2 \theta = \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda - \mu)^2}.$$

Teniendo en cuenta que $\lambda + \mu = I$ y que $\lambda\mu = J$, se obtiene por lo tanto:

$$\cos^2 \theta = \frac{I^2}{I^2 - 4J}.$$

En particular, la relación $I = 0$ es necesaria y suficiente para que los planos \mathcal{P} , \mathcal{P}' sean perpendiculares. Y cuando $I \neq 0$ se tiene:

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{4J}{I}.$$

Se observará que $I = \lambda + \mu$. Al ser reales λ y μ , de la relación $I = 0$ se desprende $J < 0$.

Segundo problema: planos bisectores

Manteniendo las mismas hipótesis y notaciones, busquemos una ecuación de la reunión de los *planos bisectores* de los planos \mathcal{P} , \mathcal{P}' :

En el sistema de referencia \mathcal{R}' antes determinado, los planos \mathcal{P} , \mathcal{P}' se hallan definidos por la ecuación (4); sus planos bisectores \mathcal{S} , \mathcal{S}' están pues definidos por las ecuaciones $x' = 0$, $y' = 0$. Ahora bien, en la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, la matriz de Φ es

$$Q' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ve inmediatamente que la condición $M \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ equivale a

$$[\Phi(\overrightarrow{OM}), \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{V}] = 0;$$

en efecto, en el sistema de referencia \mathcal{R}' , esta relación se traduce mediante la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \lambda x' & x' & 0 \\ \mu y' & y' & 0 \\ 0 & z' & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{o sea} \quad (\lambda - \mu) x' y' = 0.$$

La ecuación de la reunión de los planos bisectores en el sistema de referencia dado es por lo tanto

$$\begin{vmatrix} Ax + B''y + B'z & x & a \\ B''x + A'y + Bz & y & b \\ B'x + By + A''z & z & c \end{vmatrix} = 0.$$

§ II.10 ISOMETRÍAS Y DESPLAZAMIENTOS. DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

En este §, vamos a considerar un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_n , de dimensión $n \geq 2$, ligado al espacio vectorial euclídeo E_n .

● Mientras no se diga lo contrario, *el espacio \mathcal{E}_n no se supondrá orientado*.

Utilizaremos el homomorfismo $L : \text{GA}(\mathcal{E}_n) \rightarrow \text{GL}(E_n)$ que a toda biyección afín de \mathcal{E}_n , asocia su *parte lineal* (véase § I.4). Como de costumbre el *grupo ortogonal* (resp. *especial ortogonal*) de E_n será designado por $O(E_n)$ (resp. $SO(E_n)$).

Por definición, una **isometría** de \mathcal{E}_n es una aplicación $\varphi : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ tal que

$$(1) \quad (\forall M \in \mathcal{E}_n, \forall N \in \mathcal{E}_n) \quad \|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Por ejemplo; si φ es una biyección afín cuya parte lineal pertenece a $O(E_n)$, es evidentemente una isometría. Recíprocamente, se demuestra que **toda isometría de \mathcal{E}_n es una biyección afín** (véase tomo 1, teorema XIII.9.1) y, según (1), la *parte lineal* f de una isometría verifica

$$(\forall \vec{V} \in E_n) \quad \|f(\vec{V})\| = \|\vec{V}\|,$$

lo cual implica que: $f \in O(E_n)$. En resumen, *las isometrías de \mathcal{E}_n son las biyecciones afines de \mathcal{E}_n cuya parte lineal pertenece a $O(E_n)$* .

Recordemos que los elementos de $O(E_n)$ reciben el nombre de *endomorfismos ortogonales* o *isometrías vectoriales* de E_n .

El conjunto de las isometrías de \mathcal{E}_n será designado por $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$.

Se tiene pues

$$\text{Is}(\mathcal{E}_n) = L^{-1}[O(E_n)].$$

Del hecho de ser $O(E_n)$ subgrupo de $\text{GL}(E_n)$, se deduce que $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ es un subgrupo de $\text{GA}(\mathcal{E}_n)$. Este hecho era de prever ya que las compuestas y las recíprocas de biyecciones que verifican (1) también verifican (1). (De un modo general, las isometrías biyectivas de un espacio métrico cualquiera forman grupo.)

Al ser el homomorfismo L suprayectivo se tiene:

$$L(\text{Is}(\mathcal{E}_n)) = O(E_n).$$

Del mismo modo, la imagen recíproca de $SO(E_n)$ de L es un subgrupo de $\text{GA}(\mathcal{E}_n)$, incluido en $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$, que designaremos por $\text{Dep}(\mathcal{E}_n)$. Sus elementos son las isometrías de determinante $+1$; se les da el nombre **isometrías directas** o **desplazamientos**.

Observemos que $\text{Is}(\mathcal{E}_n) \setminus \text{Dep}(\mathcal{E}_n)$ es el conjunto de las isometrías de determinante -1 ; evidentemente no constituye un grupo. Sus elementos reciben el nombre de **isometrías indirectas** o **antidesplazamientos**.

Definición II.10.1

$\left\{ \begin{array}{l} \text{El grupo } \text{Is}(\mathcal{E}_n) \text{ recibe el nombre de } \mathbf{grupo de las isometrías de } \mathcal{E}_n; \text{ el grupo} \\ \text{Dep}(\mathcal{E}_n) \text{ recibe el nombre de } \mathbf{grupo de los desplazamientos (o de las} \\ \text{isometrías directas) de } \mathcal{E}_n. \end{array} \right.$

Estas definiciones son independientes de toda orientación de \mathcal{E}_n .

Sabemos que $\text{SO}(E_n)$ es un subgrupo distinguido de $\text{O}(E_n)$ y que el grupo cociente $\text{O}(E_n)/\text{SO}(E_n)$ tiene dos elementos. De ello se deduce:

II.10.1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{El grupo } \text{Dep}(\mathcal{E}_n) \text{ es subgrupo distinguido de } \text{Is}(\mathcal{E}_n) \text{ y el grupo cociente} \\ \text{Is}(\mathcal{E}_n)/\text{Dep}(\mathcal{E}_n) \text{ tiene dos elementos.} \end{array} \right.$

Esta proposición se demuestra inmediatamente componiendo el homomorfismo:

$$L : \text{Is}(\mathcal{E}_n) \rightarrow \text{O}(E_n)$$

con el homomorfismo canónico

$$\text{O}(E_n) \rightarrow \text{O}(E_n)/\text{SO}(E_n),$$

el compuesto de estos dos homomorfismos es suprayectivo y su núcleo es

$$\text{Dep}(\mathcal{E}_n).$$

Esto se puede ver perfectamente observando que:

- i) Si φ es una isometría cualquiera y ψ un desplazamiento, entonces $\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi$ es un desplazamiento.
- ii) Si φ, ψ son isometrías indirectas, entonces $\varphi \circ \psi^{-1}$ es un desplazamiento (estas proposiciones se desprenden inmediatamente de las propiedades de los determinantes).

Volviendo a las definiciones del § II.2 se ve inmediatamente que los conceptos de variedades *ortogonales* o *perpendiculares* son invariantes en el grupo $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ y no ocurre lo mismo con la *distancia angular* de vectores o de rectas. Esta observación se utilizará constantemente en lo que sigue. En particular, haremos uso con frecuencia de la propiedad siguiente:

II.10.2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \varphi \text{ es una isometría de } \mathcal{E}_n \text{ que deja fijos los puntos de una variedad} \\ \text{afín } \mathcal{V}, \text{ entonces las variedades suplementarias ortogonales de } \mathcal{V} \text{ son} \\ \text{globalmente invariantes por } \varphi. \end{array} \right.$

En efecto una tal variedad \mathcal{W} tiene un punto único común I con \mathcal{V} ; I es fijo por φ y \mathcal{W} es la única variedad suplementaria ortogonal de \mathcal{V} que pasa por I .]

Utilización de los sistemas de referencia ortonormales

Sea $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_n , y $\mathcal{R}' = (O'; \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ un segundo sistema de referencia. Sea P la matriz de paso de la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ a la base $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ y ℓ la matriz columna de las coordenadas de O' en \mathcal{R} . Según la relación (1) del § I.12, se tiene:

$$(2) \quad \mathcal{X} = \ell + P\mathcal{X}',$$

designando por \mathcal{X} [resp. \mathcal{X}'] la matriz columna de las coordenadas de un punto M en \mathcal{R} [resp. \mathcal{R}'].

Para que el sistema de referencia \mathcal{R}' sea *ortonormal*, es necesario y suficiente que la matriz P sea *ortogonal*. Para que \mathcal{R}' sea *ortonormal y de la misma orientación que \mathcal{R}* , es necesario y suficiente que la matriz P sea *ortogonal y de determinante $+1$* . De esto se deduce:

II.10.3 Supongamos a \mathcal{E}_n orientado de manera que el sistema $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sea **directo**. Para toda biyección afín φ , sea \mathcal{R}_φ el sistema de referencia

$$(\varphi(O); f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)),$$

donde $f = L(\varphi)$ designa la parte lineal de φ . Entonces la aplicación $\varphi \mapsto \mathcal{R}_\varphi$ define una **biyección** de $\text{Dep}(\mathcal{E}_n)$ en el conjunto de los sistemas de referencia **ortonormales directos** de \mathcal{E}_n , y una biyección de $\text{Is}(\mathcal{E}_n) \setminus \text{Dep}(\mathcal{E}_n)$ en el conjunto de los **sistemas de referencia ortonormales indirectos** de \mathcal{E}_n .

Observación. Supongamos que se tenga $O' = O$ y que \mathcal{R}' sea ortonormal. Se tiene entonces $\mathcal{X} = P\mathcal{X}'$, de donde $\mathcal{X}' = P^{-1}\mathcal{X} = {}^tP\mathcal{X}$ (ya que la matriz P es ortogonal).

Si los sistemas de referencia \mathcal{R} , \mathcal{R}' tienen el *mismo origen* y son los dos ortonormales, el conocimiento de la matriz de paso P permite pues, sin otro cálculo, expresar las coordenadas en \mathcal{R}' en función de las coordenadas en \mathcal{R} .

Siguiendo con el supuesto de que el sistema de referencia $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ es ortonormal directo, sea $\varphi: \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ una aplicación afín, sea Q la matriz de $L(\varphi)$ en la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Según la fórmula (2) del § I.12 se tiene:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{C} + Q\mathcal{X},$$

donde \mathcal{C} , \mathcal{X} e \mathcal{Y} designan respectivamente las matrices columnas de las coordenadas del punto $\varphi(O)$, de un punto cualquiera $M \in \mathcal{E}_n$ y del punto $\varphi(M)$. De donde:

Para que la aplicación afín φ sea una isometría [resp. un desplazamiento], es necesario y suficiente que la matriz Q sea ortogonal [resp. ortogonal y de determinante $+1$].

Propiedad de los endomorfismos ortogonales

Una matriz ortogonal M de coeficientes reales puede ser considerada como *unitaria* puesto que verifica ${}^t M \cdot M = I$ (donde I designa la matriz unidad) y $\bar{M} = M$, por lo tanto ${}^t \bar{M} \cdot M = I$ (véase tomo 1, p. 448 y 468). Según el teorema XIII.6.4 del tomo 1, una tal matriz es *diagonalizable* en \mathbf{C} y sus valores propios son todos de módulo 1. Sus valores propios reales son pues necesariamente iguales a $+1$ o a -1 .

Por otra parte, al ser M de coeficientes reales, sus valores propios no reales son dos a dos imaginarios conjugados: si $e^{i\theta}$ ($\theta/\pi \notin \mathbf{Z}$) es un valor propio complejo de M , $e^{-i\theta}$ es un valor propio del mismo orden de multiplicidad. De donde se deduce inmediatamente:

II.10.4 *El determinante de un endomorfismo ortogonal f es igual a $(-1)^{n-p}$ donde p designa el orden de multiplicidad de 1 como valor propio (conviniendo en que $p = 0$ si 1 no es valor propio de f).*

Demostración. El determinante de f es igual al producto de los valores propios de su matriz M en una base ortonormal cualquiera (entrando cada uno como factor tantas veces como indique su orden de multiplicidad) y el producto de los valores propios *no reales* es igual a 1. Por otra parte, si se designa por p y q los órdenes de multiplicidad respectivos de $+1$ y -1 como valores propios de M , el número de los valores propios no reales de M es *par* e igual a $n - p - q$. Se tiene por lo tanto

$$\det(f) = (-1)^q \quad \text{y} \quad (-1)^{n-p-q} = 1,$$

de donde:

$$\det(f) = (-1)^{n-p}.$$

Corolario

|| Si n es **impar**, toda isometría vectorial **directa** de E_n admite $+1$ como valor propio.

Con las notaciones de II.10.4 se tiene en efecto $(-1)^{n-p} = 1$, de donde $(-1)^p = -1$ y (ya que p es positivo) la desigualdad $p \geq 1$, y por lo tanto 1 es valor propio f .

Téngase presente que un endomorfismo ortogonal f de E_n no es necesariamente diagonalizable en el cuerpo \mathbf{R} . En efecto un tal endomorfismo solamente es diagonalizable cuando los espacios propios asociados a los valores propios $+1$ y -1 son suplementarios, lo cual exige que sea una simetría ortogonal (véase § II.11).

Sin embargo, puesto que la matriz de f en una base ortonormal es diagonalizable en el cuerpo \mathbf{C} , se ve que el espacio característico asociado a un valor propio real de f está formado por vectores propios. *La dimensión del \mathbf{R} -espacio propio asociado a un valor propio real de f es por lo tanto igual al orden de multiplicidad de este valor propio.*

Volveremos a obtener este resultado por un método directo, sin recurrir a la teoría de los operadores unitarios, estableciendo lo siguiente:

II.10.5 *Sea f una isometría vectorial de E_n y λ un valor propio real de f . Se tiene entonces $\lambda = +1$ o $\lambda = -1$ y la **dimensión del espacio propio asociado es igual al orden de multiplicidad de este valor propio.***

Demostración. Por hipótesis, existe un vector no nulo $\vec{u} \in E_n$ que verifica

$$(3) \quad f(\vec{u}) = \lambda \vec{u};$$

y, para todo vector $\vec{v} \in E_n$, se tiene

$$(4) \quad f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

de donde, si $\vec{v} = \vec{u}$,

$$(\lambda^2 - 1) \|\vec{u}\|^2 = 0, \text{ o sea } \lambda^2 = 1.$$

Por otra parte se tiene, comparando (3) y (4):

$$(5) \quad (\forall \vec{v} \in E_n) \quad \vec{u} \cdot [\vec{v} - \lambda f(\vec{v})] = 0$$

de donde, al ser $\lambda^2 = 1$,

$$\vec{u} \cdot [\lambda \vec{v} - f(\vec{v})] = 0.$$

Sea entonces $F = \{\vec{u}\}^\perp$ el subespacio de dimensión $n - 1$ ortogonal a \vec{u} . Por aplicación de (5), se ve que F es estable en f , y la restricción de f a F es una isometría vectorial de F .

Para establecer el segundo aserto II.10.5 basta entonces proceder por recurrencia sobre el entero n : la propiedad enunciada se cumple evidentemente para $n = 1$, y, si se cumple para el orden $n - 1$, se cumple para la restricción g de f a F . Si λ es un valor propio de orden α de f , es valor propio de orden $\alpha - 1$ de g ; el espacio F_λ de los vectores propios de f contenidos en F y que corresponden al valor propio λ es por lo tanto de dimensión $\alpha - 1$, y el espacio propio de f asociado a λ es $\text{Vect}(\{\vec{u}\}, F_\lambda)$. Es por lo tanto de dimensión α .]

Prolongación de las isometrías

Recordemos aquí un resultado importante establecido en el tomo 1 (teorema XIII.11.4):

II.10.6 Sean X, Y dos partes en \mathcal{E}_n y sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una isometría de X en Y (o sea una aplicación de X en Y que verifica

$$(\forall M, N \in X) \quad \|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|).$$

Existe entonces por lo menos una isometría $\bar{\varphi}$ de \mathcal{E}_n cuya restricción a X es igual a φ , y si $\mathcal{E}_n = \text{Aff}(X)$, $\bar{\varphi}$ es única.

Corolario

Sean $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ y $(B_i)_{1 \leq i \leq p}$ dos familias de puntos de \mathcal{E}_n que verifican:

$$(\forall i, j = 1, 2, \dots, p) \quad \|\overrightarrow{B_i B_j}\| = \|\overrightarrow{A_i A_j}\|;$$

existe entonces una isometría $\bar{\varphi}$ de \mathcal{E}_n que verifica

$$(\forall i = 1, 2, \dots, p) \quad \bar{\varphi}(A_i) = B_i,$$

y si $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ engendra afínmente \mathcal{E}_n , esta isometría $\bar{\varphi}$ es única.

Demostración. Basta aplicar II.10.6 tomando como X, Y los conjuntos $\{A_1, \dots, A_p\}, \{B_1, \dots, B_p\}$, y como φ la aplicación

$$A_i \mapsto B_i \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Observaciones.

1. Si en II.10.6, se supone que $\text{Aff}(X)$ es de dimensión $\leq n - 1$, existe por lo menos un *desplazamiento* ψ de E_n que prolonga a φ (véase tomo 1, teorema XIII.11.4), y si $\text{Aff}(X)$ es de dimensión $n - 1$, el teorema II.11.1 (véase más adelante) demuestra que un tal desplazamiento ψ es *único*.

2. Se ve fácilmente que la existencia de una aplicación isométrica de \mathcal{E}_n en \mathcal{E}_p sólo es posible si es $p \geq n$, ya que una tal aplicación es *afín* e *inyectiva*.

Isometrías de un espacio afín asociado a un espacio prehilbertiano

Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre un espacio prehilbertiano E de dimensión infinita. Se definen de la misma manera las *isometrías* de \mathcal{E} y se demuestra que toda isometría de \mathcal{E} es necesariamente *afín* (véase tomo 1, p. 492) e *inyectiva*, pero *no necesariamente biyectiva*.

§ II.11 ESTRUCTURA DE LAS ISOMETRÍAS; PUNTOS FIJOS

Grupos $\text{Is}_A(\mathcal{E}_n)$ y $\text{Dep}_A(\mathcal{E}_n)$.

Sea A un punto dado de \mathcal{E}_n ; el conjunto de las isometrías [resp. desplazamientos] que dejan fijo a A es un subgrupo de $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ [resp. $\text{Dep } \mathcal{E}_n$] que nosotros designaremos por $\text{Is}_A(\mathcal{E}_n)$ [resp. $\text{Dep}_A(\mathcal{E}_n)$]: es el *subgrupo de isotropía* de A (véase tomo 1, p. 82) para la operación natural de $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ (resp. $\text{Dep}(\mathcal{E}_n)$) en \mathcal{E}_n .

Los elementos de $\text{Dep}_A(\mathcal{E}_n)$ recibirán el nombre de **rotaciones** (se sobreentiende: *afines*) de **centro** A .

La aplicación $\varphi \mapsto L(\varphi)$ es un *isomorfismo* de $\text{Is}_A(\mathcal{E}_n)$ sobre $O(E_n)$, y un isomorfismo de $\text{Dep}_A(\mathcal{E}_n)$ sobre $SO(E_n)$. Esto demuestra que las isometrías que admiten un punto fijo se reducen a *isometrías vectoriales en* E_n ; más concretamente: *las isometrías de centro* A *de* \mathcal{E}_n , *son las isometrías vectoriales del espacio vectorial euclídeo que se obtiene al tomar* A *como origen en* \mathcal{E}_n .

Si f es un endomorfismo ortogonal de E_n , el conjunto F de sus puntos fijos es el subespacio propio asociado al valor propio 1 (y por lo tanto se reduce a $\{0\}$ si 1 no es valor propio de f). Según II.10.5, *su dimensión es por lo tanto igual al orden de multiplicidad de 1 como valor propio de* f (conviniendo que si 1 no es valor propio de f , su orden de multiplicidad es cero).

● En lo que sigue designaremos por $v(f)$ la dimensión del espacio F de los elementos fijos de un endomorfismo f de E_n . Igualmente, designaremos por $v(\varphi)$ la dimensión de la variedad afín \mathcal{F} constituida por los puntos fijos de una aplicación afín φ de \mathcal{E}_n , de donde: $v(\varphi) = -1$ si \mathcal{F} es vacío.

Si \mathcal{F} no es vacío y si se pone $f = L(\varphi)$, se tiene, según I.6.4:

$$\boxed{v(\varphi) = v(f)}.$$

Ejemplos

1. Sea φ una *traslación* de \mathcal{E}_n , se trata de un *desplazamiento*. Si $\varphi = \text{Id}_{\mathcal{E}_n}$, se tiene $v(\varphi) = v(f) = n$. Si $\varphi \neq \text{Id}_{\mathcal{E}_n}$, φ carece de punto fijo y se tiene $v(\varphi) = -1$.
2. Según II.10.5, toda matriz ortogonal de determinante $+1$ y de orden *impar* admite a 1 como valor propio. Por lo tanto si el entero n es impar, no existe ningún *desplazamiento* de \mathcal{E}_n que admita un punto fijo único.

Simetrías ortogonales

Definición II.11.1

Sea \mathcal{H} una subvariedad afín no vacía de \mathcal{E}_n , de dirección H y de dimensión $p \leq n - 1$. La **simetría** (se sobreentiende ortogonal) **respecto a \mathcal{H}** es la **simetría afín s de dirección H^\perp respecto a \mathcal{H}** (véase § I.10).

Dicho de otro modo, para todo punto $M \in \mathcal{E}_n$, $s(M)$ es el simétrico de M con relación a su proyección ortogonal en \mathcal{H} .

- Si $p = n - 1$, se dice que s es una *simetría de hiperplano \mathcal{H}* .
- Si $p = n - 2$, con $n \geq 3$, se dice que s es una *simetría axial en torno a \mathcal{H}* (o de eje \mathcal{H} , si $n = 3$).
- Finalmente si $p = 0$, es decir si \mathcal{H} se reduce a un punto O , se dice que s es una *simetría central*, de centro O .

Volviendo al caso general, elijamos un sistema de referencia ortonormal

$$\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

tal que $O \in \mathcal{H}$ y $H = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$, lo cual supone que $H^\perp = \text{Vect}(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$.

Si M es un punto de \mathcal{E} , de coordenadas (x_i) en \mathcal{R} , las coordenadas (y_i) de su imagen $M' = s(M)$ vienen dadas por:

$$(1) \quad y_i = x_i \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq p; \quad y_i = -x_i \quad \text{para} \quad i > p.$$

Se ve de inmediato (ya sea directamente, o bien con ayuda de las relaciones (1)), que la simetría s es una isometría y que el conjunto de sus puntos fijos es \mathcal{H} . Se tiene pues aquí $v(s) = p = \dim(\mathcal{H})$.

Toda simetría ortogonal es por lo tanto una isometría.

Las relaciones (1) hacen ver además que s es un desplazamiento (por lo tanto una rotación afín) si el entero $n - p$ es par, y una isometría indirecta si $n - p$ es impar. En particular: *toda simetría axial es una rotación afín; toda simetría respecto a un hiperplano es una isometría indirecta; finalmente una simetría central de \mathcal{E}_n es una isometría directa o indirecta según que n sea par o impar.*

Las simetrías con relación a hiperplanos están caracterizadas por la proposición siguiente:

II.11.1 || *Las únicas isometrías que dejan invariante a cada punto de un hiperplano \mathcal{H} son la aplicación idéntica y la simetría respecto a \mathcal{H} .*

Demostración. Sea φ una isometría de \mathcal{E}_n que deja invariante a todo punto de \mathcal{H} .

● Si φ admite un punto fijo A tal que $A \notin \mathcal{H}$, entonces φ deja invariante a todo punto de la variedad afín engendrada por A y \mathcal{H} , variedad que no es sino el mismo \mathcal{E}_n ; se tiene pues $\varphi = \text{Id}_{\mathcal{E}_n}$.

● Si φ no admite más puntos fijos que los de \mathcal{H} , sea M un punto de $\mathcal{E}_n \setminus \mathcal{H}$, y $M' = \varphi(M)$. Entonces cada punto P de \mathcal{H} verifica $PM = PM'$, y al ser $M \neq M'$, resulta que \mathcal{H} es el hiperplano mediador del segmento $[M, M']$. Dicho de otro modo, M' es el simétrico de M respecto a \mathcal{H} .]

Producto de simetrías

Las propiedades elementales de los productos de simetrías en \mathcal{E}_2 y \mathcal{E}_3 son casos particulares de la proposición que sigue, la cual se desprende inmediatamente de las fórmulas (1) y de II.2.3.

II.11.2 || *Designemos por s_1, s_2 las simetrías respecto a dos variedades afines no vacías $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ de \mathcal{E}_n .*

a) *Si \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son perpendiculares, el producto $s_1 \circ s_2$ es la simetría respecto a $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.*

b) *Si \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son ortogonales y tienen un punto común O , entonces $s_1 \circ s_2$ es la simetría respecto a la variedad afín que pasa por O y es suplementaria ortogonal de $\text{Aff}(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2)$.*

En los dos casos a) y b) considerados se tiene, $s_2 \circ s_1 = s_1 \circ s_2$.

En particular, el producto de las simetrías respecto a dos variedades afines suplementarias ortogonales $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ es la *simetría central* cuyo centro es el punto de intersección de $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

Observemos, en lo que sigue, que *el producto de p simetrías respecto a hiperplanos es un desplazamiento si p es par y una isometría indirecta si p es impar.*

Inversamente, las relaciones (1) muestran que toda simetría respecto a una variedad \mathcal{H} de dimensión p es el producto de $n - p$ simetrías respecto a hiperplanos que contienen a \mathcal{H} y perpendiculares dos a dos.

Veremos más adelante (§ 12) que toda isometría es un producto de isometrías respecto a hiperplanos.

Para terminar, señalemos la siguiente caracterización de las simetrías.

II.11.3 *Para que una isometría de \mathcal{E}_n , distinta de la aplicación idéntica, sea una simetría, es necesario y suficiente que sea involutiva.*

Demostración. Evidentemente la condición es necesaria. Inversamente, sea φ una isometría involutiva de \mathcal{E}_n ; para todo punto $M \in \mathcal{E}_n$, el punto medio del segmento $[M, \varphi(M)]$ es un punto fijo de φ . Por lo tanto φ admite por lo menos un punto fijo O . Por otra parte $f = L(\varphi)$ es una isometría involutiva de E_n , o en otros términos, se tiene $f^2 = \text{Id}_{E_n}$.

Se ve entonces inmediatamente que E_n es la suma directa de los subespacios F, G definidos por:

$$F = \{ x \in E_n \mid f(x) = x \} \quad \text{y} \quad G = \{ x \in E_n \mid f(x) = -x \}$$

(en efecto todo $x \in E_n$ se descompone en $x = y + z$ con $y = \frac{1}{2}[x - f(x)]$ y $z = \frac{1}{2}[x + f(x)]$, y se tiene $y \in F, z \in G, F \cap G = \{0\}$).

Además F y G son ortogonales; ya que si $y \in F$ y $z \in G$, se tiene:

$$y \cdot z = f(y) \cdot f(z) = y \cdot (-z) = -y \cdot z, \text{ de donde } y \cdot z = 0.$$

Se ve por lo tanto que f es la simetría vectorial ortogonal respecto a F .

Sea entonces O un punto fijo cualquiera de φ . Tomando O como origen en \mathcal{E}_n , φ se identifica con f , y de ello se deduce que φ es la simetría ortogonal respecto a la variedad \mathcal{F} afín de dirección F que pasa por O .]

Descomposición canónica de las isometrías

Es evidente que toda isometría φ de \mathcal{E}_n es, de una infinidad de maneras, el producto de una traslación τ y de una isometría ψ que admite por lo menos un punto

fijo. Vamos a estudiar este problema de descomposición imponiendo a τ y a ψ , condiciones suplementarias. Estableceremos antes un lema:

Lema

|| Sea ψ una isometría tal que $v(\psi) \geq 1$ y sea τ una traslación de vector \vec{V} paralelo a la variedad \mathcal{F} constituida por los puntos fijos de ψ . Entonces ψ y τ **conmutan**, o sea $\psi \circ \tau = \tau \circ \psi$.

Demostración. Pongamos $\psi' = \tau^{-1} \circ \psi \circ \tau$ y sea M un punto cualquiera de \mathcal{F} ; entonces el punto $M' = \tau(M)$ pertenece a \mathcal{F} (ya que $\vec{V} = \overrightarrow{MM'}$ es paralelo a \mathcal{F}) y se tiene:

$$\psi'(M) = \tau^{-1}[\psi(M')] = \tau^{-1}(M') = M.$$

Dicho de otro modo, la isometría ψ' deja invariante a cada uno de los puntos de \mathcal{F} y como ψ' tiene la misma parte lineal que ψ , se tiene $\psi' = \psi$, o sea $\psi \circ \tau = \tau \circ \psi$.]

Teorema II.11.4

|| Sea φ una isometría de \mathcal{E}_n cuya parte lineal f verifica $v(f) \geq 1$ (lo cual se cumple en particular si φ carece de punto fijo). Existe entonces un **par único** (ψ, τ) constituido por una **isometría** ψ , tal que $v(\psi) = v(f)$, y una **traslación** τ , de vector nulo o paralelo a la variedad \mathcal{F} de los puntos fijos de ψ , que verifican las relaciones equivalentes:

$$(2) \quad \varphi = \tau \circ \psi, \quad \varphi = \psi \circ \tau.$$

Demostración. Designaremos por F el espacio vectorial de los elementos fijos de f , en $G = F^\perp$ su ortogonal y por \mathcal{G} una variedad afín de dirección G , fijada arbitrariamente. Pondremos $\mathcal{G}' = \varphi(\mathcal{G})$.

a) *Unicidad.* Sea (ψ, τ) un par que verifica las condiciones impuestas, por lo tanto tal que $\varphi = \tau \circ \psi$, de donde $L(\psi) = f$. La variedad \mathcal{F} de los puntos fijos de ψ tiene por dirección F ; por lo tanto \mathcal{F} y \mathcal{G} son suplementarias ortogonales y, según II.10.2, \mathcal{G} es estable en ψ . Se tiene pues:

$$\mathcal{G}' = \varphi(\mathcal{G}) = \tau[\psi(\mathcal{G})] = \tau(\mathcal{G}).$$

Ahora bien existe una *traslación única* τ de vector ortogonal a \mathcal{G} (es decir nulo o paralelo a \mathcal{F}) que verifica $\tau(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$. Si M' designa la proyección ortogonal en \mathcal{G}' de un punto cualquiera M de \mathcal{G} , el vector de τ es $\overrightarrow{MM'}$ (véase la figura 11). De donde la unicidad de τ y, por lo tanto, de ψ .

b) *Existencia.* Sea τ la traslación de vector ortogonal a \mathcal{G} que verifica $\tau(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$, y sea $\psi = \tau^{-1} \circ \varphi$. Se tiene:

$$\psi(\mathcal{G}) = \tau^{-1}(\mathcal{G}') = \mathcal{G}.$$

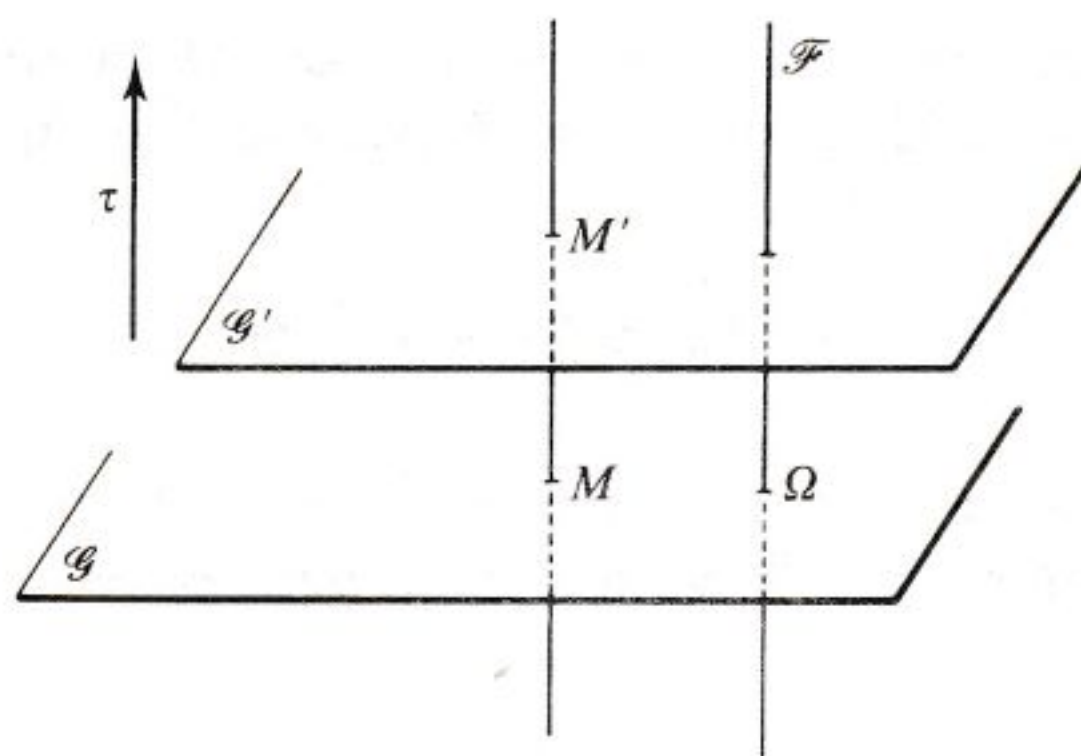


Figura 11.

Por lo tanto \mathcal{G} es *estable* en ψ y la restricción ψ_1 de ψ a \mathcal{G} admite como parte lineal la restricción f_1 de f a G . Ahora bien, f_1 no admite más punto fijo que el origen. Según I.6.5, ψ_1 admite un punto fijo único Ω , el cual es evidentemente un punto fijo de ψ .

Puesto que $L(\psi) = f$, el conjunto de los puntos fijos de ψ es la variedad \mathcal{F} , de dirección F , que pasa por Ω , y se tiene $\varphi = \tau \circ \psi = \psi \circ \tau$; de donde se deduce el resultado.]]

Observación. Si $v(f) = 0$, φ admite un punto fijo único y el teorema II.11.4 sigue siendo válido si se conviene en que no existe vector no nulo paralelo a una variedad afín reducida a un punto. Se tiene entonces una descomposición única de la forma (2), con $\tau = \text{Id}_{\mathcal{E}_n}$.

Aplicaciones

En lo que sigue, designaremos siempre por φ una isometría de \mathcal{E}_n , por f su parte lineal y por \mathcal{F} el conjunto de los puntos fijos de φ .

Utilizaremos el resultado siguiente, que se desprende inmediatamente de II.10.4 y II.10.5:

II.11.5 || *El entero $n - v(f)$ es par o impar según que φ sea un desplazamiento o una isometría indirecta.*

Según II.10.5 se tiene en efecto $v(f) = p$, donde p designa el orden de multiplicidad de 1 como valor propio, y según II.10.4 se tiene $\det(f) = (-1)^{n-p}$, de donde el resultado.]]

Caso $n = 2$

a) Si φ es un *desplazamiento* del plano euclídeo \mathcal{E}_2 , se tiene $v(f) = 0$ ó $v(f) = 2$. Si $v(f) = 0$, φ tiene un punto fijo único O , se trata de una *rotación* de centro O . Si $v(f) = 2$, se tiene $f = \text{Id}_{\mathcal{E}_2}$, luego φ es una *traslación*.

b) Si φ es una *isometría indirecta*, se tiene necesariamente $v(f) = 1$, y por lo tanto \mathcal{F} es vacío o de dimensión 1. Si \mathcal{F} es una recta, φ es la simetría respecto a esta recta (véase II.11.1).

El teorema II.11.4 muestra entonces que *toda isometría indirecta de \mathcal{E}_2 se descompone* (de manera única) *en el producto de una simetría respecto a una recta y de una traslación de vector paralelo a esta recta* (siendo este producto conmutativo).

Caso $n = 3$

a) Si φ es un **desplazamiento**, se tiene $v(f) = 1$, ó $v(f) = 3$. Si $v(f) = 3$, f es la aplicación idéntica y φ es una traslación.

Si $v(f) = 1$, se tiene la descomposición

$$(2) \quad \varphi = \tau \circ \psi = \psi \circ \tau,$$

donde ψ designa un desplazamiento cuyo conjunto de puntos fijos es una recta D y τ una traslación de vector nulo o paralelo a D .

Se dice entonces que ψ es una *rotación de eje D* y que φ es un **atornillamiento** (o desplazamiento helicoidal) del eje D .

Elijamos un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que $O \in D$ y que \vec{k} sea un vector director de D ; al ser la restricción de ψ al plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$ una rotación de centro O , la matriz de ψ en este sistema de referencia es de la forma

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si se orienta el plano $\mathcal{P} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de manera que la base (\vec{i}, \vec{j}) sea directa, la restricción de ψ a este plano es una *rotación de ángulo θ* . El elemento $\bar{\theta} \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$

depende por lo tanto solamente de la orientación elegida en el plano \mathcal{P} , ortogonal en O a D . Se transforma en su opuesto cuando se cambia esta orientación por su opuesta.

● En la práctica, se orienta primero \mathcal{E}_3 ; después se orienta la recta D eligiendo un vector director \vec{k} ; finalmente se conviene en orientar \mathcal{P} de manera que si (\vec{i}, \vec{j}) es una base directa de \mathcal{P} la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sea una base directa de \mathcal{E}_3 , y si la restricción de ψ a \mathcal{P} es una rotación de ángulo θ alrededor de O , se dice que ψ es una **rotación de ángulo θ alrededor del eje (orientado) D** .

Si $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, ψ es la *simetría axial* de eje D (siendo este concepto independiente de toda orientación).

b) Si ψ es un **antidesplazamiento**, se tiene $v(f) = 0$ o $v(f) = 2$.

1. Si $v(f) = 0$, φ admite un punto fijo único O . Existe entonces un sistema de referencia ortogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en el cual la matriz de φ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(véase tomo 1, p. 496).

Entonces φ es el producto de una *rotación* y de la *simetría* respecto a un plano ortogonal al eje de esta rotación. Si $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, φ es la *simetría central* de centro O .

2. Si $v(f) = 2$, utilicemos la descomposición $\varphi = \psi \circ \tau = \tau \circ \psi$ dada por el teorema II.11.4. Entonces ψ es una isometría cuyo conjunto de puntos fijos es un plano \mathcal{P} de \mathcal{E}_3 ; es pues una *simetría* respecto a este plano (véase prop. II.11.1) y τ es una traslación de vector nulo o paralelo a \mathcal{P} (véase la figura 12).

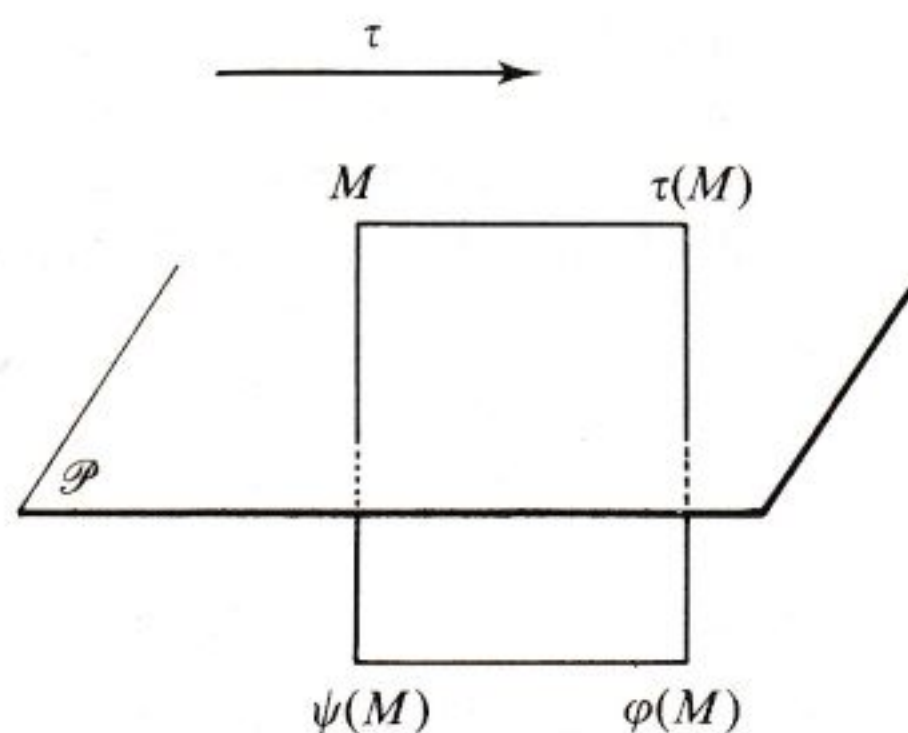


Figura 12.

Si φ admite por lo menos un punto fijo y si $v(f) = 2$, se tiene $\varphi = \psi$ y φ es una simetría respecto a un plano.

§ II.12 GENERADORES DE LOS GRUPOS $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ Y $\text{Dep}(\mathcal{E}_n)$

En este §, vamos a completar los teoremas XIII.10.5 y XIII.11.1 del tomo 1. Supondremos $n \geq 3$ y adoptaremos los mismos convenios respecto a la notación que en el § 11.

Descomposición de traslaciones

Haremos uso de la propiedad elemental siguiente, cuya demostración es inmediata:

*Designemos por $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ dos variedades afines no vacías paralelas de dimensión $p \leq n - 1$, por \vec{v} el vector ortogonal a \mathcal{V}_1 tal que $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 + \vec{v}$ y por s_i ($i = 1, 2$) la simetría respecto a \mathcal{V}_i . Entonces, la compuesta $s_2 \circ s_1$ es la **traslación de vector $2\vec{v}$** .*

Recíprocamente, sea τ una traslación de vector \vec{v} , \mathcal{V}_1 una variedad afín cualquiera ortogonal a \vec{v} y \mathcal{V}_2 la variedad $\mathcal{V}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}$. Se tiene entonces:

$$\tau = s_2 \circ s_1,$$

donde s_i ($i = 1, 2$) es la simetría respecto a \mathcal{V}_i .

Generadores de $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$

● En lo que sigue, adoptaremos el convenio (habitual) de que el producto de *cero* elemento de un grupo es el elemento neutro de este grupo.

Seguiremos designando por $v(\varphi)$ la dimensión de la variedad de los puntos fijos de una isometría φ y empezaremos recordando un resultado del tomo 1 (véase demostración del teorema XIII.11.1) de donde resulta que las simetrías respecto a los hiperplanos de \mathcal{E}_n constituyen un sistema de generadores del grupo $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$.

Teorema II.12.1

*Toda isometría φ de \mathcal{E}_n es producto al menos de una familia de p **simetrías** respecto a hiperplanos con $p \leq n - v(\varphi)$. Además, se pueden elegir estos hiperplanos de tal manera que contengan a la variedad afín de los puntos fijos de φ .*

Se puede demostrar que la cota superior $n + 1$ no puede ser mejorada: por ejemplo, si $n = 3$, un desplazamiento helicoidal que no se reduzca ni a una traslación, ni a una rotación, no puede descomponerse en menos de 4 simetrías respecto a hiperplanos de \mathcal{E}_3 .

Generadores de Dep (\mathcal{E}_n)

Vamos a reemprender ahora, por otro método, el estudio iniciado en el teorema XIII.10.5 del tomo 1.

Teorema II.12.2 ⁽¹⁾

Suponiendo $n \geq 3$, sea φ un desplazamiento de \mathcal{E}_n que tiene por lo menos un punto fijo Ω . Entonces φ es el producto al menos de una familia de p **simetrías axiales** con ejes que pasan por Ω , verificando el número p las condiciones

$$p \leq n - v(\varphi) \quad \text{y} \quad p \leq n - 1.$$

Demostración. La demostración se basa en el hecho de que para todo desplazamiento φ de \mathcal{E}_n que admita por lo menos un punto fijo, el entero $n - v(\varphi)$ es *par* (esto es consecuencia de II.11.5, ya que aquí $v(f) = v(\varphi)$).

Primer caso: $v(\varphi) \geq 1$. Basta entonces establecer que φ es el producto de p simetrías radiales, con $p \leq n - v(\varphi)$. Haremos un razonamiento por recurrencia sobre el entero

$$q = \frac{1}{2}[n - v(\varphi)],$$

ya que el caso en que $q = 0$ (o sea $v(\varphi) = n$) es trivial, por ser entonces φ la aplicación idéntica de \mathcal{E}_n (véase el convenio antes establecido).

Suponiendo que la propiedad enunciada se cumple hasta el orden $q - 1$, es decir para

$$v(\varphi) \geq n - 2q + 2, \quad \text{con} \quad q \geq 1,$$

vamos a ver que se cumple también para el orden q , es decir para $v(\varphi) = n - 2q$.

Supongamos pues $v(\varphi) = n - 2q$, con $q \geq 1$, y sea \mathcal{F} la variedad de los puntos fijos de φ . Según las hipótesis se tiene $\dim(\mathcal{F}) = v(\varphi) = n - 2q < n$. Existe por lo tanto al menos un punto

⁽¹⁾ Se observará que este enunciado deja de cumplirse para $n = 2$, ya que las simetrías axiales de \mathcal{E}_2 son las simetrías centrales, y el producto de simetrías centrales en número cualquiera es una simetría central o una traslación.

$A \in \mathcal{E}_n$ tal que $\varphi(A) \neq A$. Pongamos $B = \varphi(A)$: entonces \mathcal{F} está contenida en el hiperplano mediodor \mathcal{H}_1 del segmento $[A, B]$ y $\Omega \in \mathcal{H}_1$.

Vamos a demostrar que existe un par (σ_1, σ_2) de simetrías axiales tales que el producto $\sigma_1 \circ \sigma_2$ lleva a B sobre A y deja fijos todos los puntos de \mathcal{F} .

Para ello, elijamos un hiperplano \mathcal{H}_2 que contenga a \mathcal{F} y B , después un hiperplano \mathcal{H} , perpendicular a \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , que pase por Ω . La existencia de \mathcal{H}_2 resulta de la desigualdad $\dim(\mathcal{F}) \leq n - 2$, y la de \mathcal{H} de la hipótesis $n \leq 3$ (véase la figura 13).

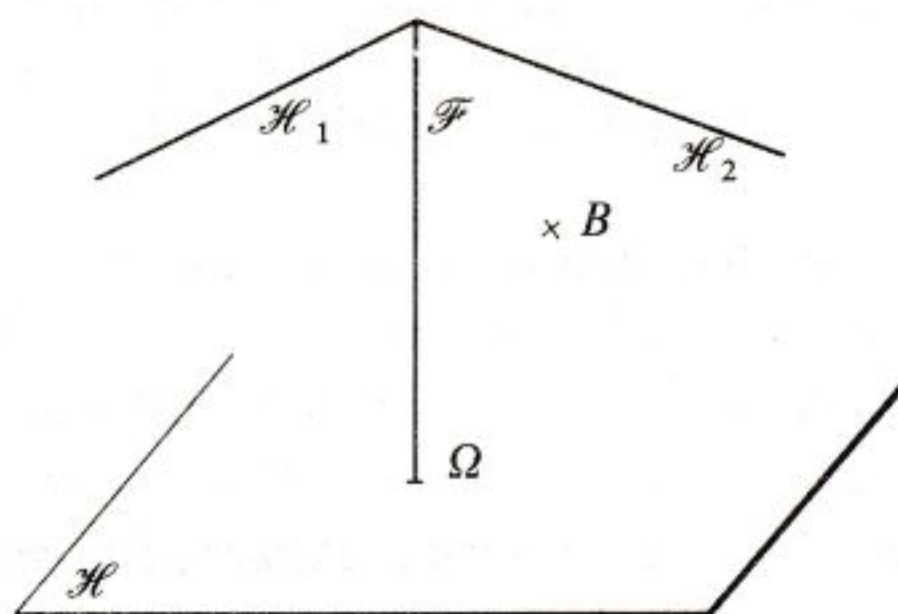


Figura 13.

Designemos por h, h_1, h_2 las simetrías respectivas respecto a los hiperplanos $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, y pongamos:

$$\sigma_1 = h_1 \circ h, \quad \sigma_2 = h \circ h_2 \quad \text{de donde} \quad \sigma_1 \circ \sigma_2 = h_1 \circ h_2.$$

Entonces (al ser \mathcal{H} perpendicular a \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2), σ_1 y σ_2 son *simetrías axiales* de ejes respectivos $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1, \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_2$, que pasan por Ω , y se tiene

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(B) = h_1 \circ h_2(B) = h_1(B) = A.$$

Además, σ_1, σ_2 y h tienen la misma restricción sobre \mathcal{F} ; la restricción de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ sobre \mathcal{F} es por lo tanto la misma que la de $h \circ h$; se trata de la aplicación idéntica de \mathcal{F} .

El desplazamiento $\psi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \varphi$ deja, por lo tanto, fijo el punto A , así como cada uno de los puntos de \mathcal{F} ; se tiene pues $v(\psi) \geq \dim(\mathcal{F}) + 1 = v(\varphi) + 1$. Pero, teniendo en cuenta que los enteros $n - v(\varphi)$ y $n - v(\psi)$ son pares, se deduce que $v(\psi) - v(\varphi)$ es un entero *par* que verifica $v(\psi) - v(\varphi) \geq 2$, de donde $v(\psi) \geq n - 2q + 2$.

De acuerdo con la hipótesis de recurrencia, existe por lo tanto una familia de r simetrías axiales, s_1, s_2, \dots, s_r , con ejes que pasan por Ω , siendo $r \leq 2(q - 1)$, y que verifican

$$\psi = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_r;$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} \varphi &= (\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1} \circ \psi = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \psi \\ &= \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ s_1 \circ \dots \circ s_r. \end{aligned}$$

Por lo tanto φ es el producto de una familia de $p = r + 2$ simetrías axiales, con ejes que pasan por Ω , siendo $p \leq 2q = n - v(\varphi)$; de donde el resultado.

Segundo caso: $v(\varphi) = 0$. Es el caso en que φ admite a Ω como único punto fijo. Sea entonces A un punto cualquiera de \mathcal{E}_n , distinto de Ω , y sea $B = \varphi(A)$. El hiperplano mediador \mathcal{H} del segmento $[A, B]$ pasa por Ω . Por ser $n \geq 3$, existe una variedad afín \mathcal{V} , de dimensión $n - 2$, contenida en \mathcal{H} , que pasa por Ω y por el punto medio del segmento $[A, B]$. La simetría axial σ de eje \mathcal{V} permuta A con B ; por lo tanto el desplazamiento $\psi = \sigma \circ \varphi$ deja invariantes a Ω y A , y se tiene la desigualdad $v(\psi) \geq 1$. Pero, lo mismo que antes, se sabe que el entero $v(\psi) - v(\varphi) = v(\psi)$ es par. Se tiene pues efectivamente $v(\psi) \geq 2$.

Por el estudio del primer caso, se sabe entonces que existe una familia de r simetrías axiales s_1, \dots, s_r , con ejes que pasan por Ω , siendo $r \leq n - 2$, tales que $\psi = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_r$. De esto, se deduce que $\varphi = \sigma \circ \psi = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_r$ es el producto de $p = r + 1$ simetrías axiales con ejes que pasan por Ω , siendo $p \leq n - 1$, de donde el resultado.]

Mediante un razonamiento análogo, se establecería fácilmente que *todo desplazamiento φ de \mathcal{E}_n ($n \geq 3$) es el producto de una familia de p simetrías axiales, con $p \leq n$. Basta considerar una simetría axial σ tal que $\sigma \circ \varphi$ tenga por lo menos un punto fijo y aplicar II.12.2 a $\sigma \circ \varphi$. De esto resulta que el grupo $\text{Dep}(\mathcal{E}_n)$ es engendrado por el conjunto de las simetrías axiales. En realidad, se tiene el resultado más preciso que sigue:*

Teorema II.12.3

|| Sea φ un desplazamiento cualquiera en \mathcal{E}_n con $n \geq 3$. Entonces φ es el producto al menos de una familia de p simetrías axiales, con $p \leq n - 1$.

Demostración. Puesto que el caso en que φ admite por lo menos un punto fijo ya ha sido tratado, supondremos que φ carece de punto fijo. Entonces (según II.11.4) φ admite una descomposición de la forma

$$\varphi = \tau \circ \psi$$

donde ψ designa un desplazamiento tal que $v(\psi) \geq 1$ y τ una traslación de vector no nulo \vec{v} paralelo a la variedad \mathcal{F} constituida por los puntos fijos de ψ . Sea \mathcal{D} una recta de \mathcal{F} paralela al vector \vec{v} y sea \mathcal{H} un hiperplano ortogonal a \mathcal{D} que corta a \mathcal{D} en un punto Ω . Un tal hiperplano \mathcal{H} es estable en ψ según II.10.1 y la restricción ψ' de ψ sobre \mathcal{H} es un desplazamiento de \mathcal{H} que tiene a Ω como punto fijo. Según el teorema II.12.1, existen variedades afines $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_q$, de dimensión $n - 2$, contenidas en \mathcal{H} y que pasan por Ω , en número de $q \leq n - 1$, tales que se tiene $\psi' = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_q$, designando por σ_i la simetría de hiperplano \mathcal{V}_i en \mathcal{H} . Por ser ψ' un desplazamiento, el entero q es par. Se puede uno limitar al caso $q > 0$, ya que el caso en el que φ es una traslación es evidente (véase el comienzo de este §).

Sea s_i la simetría axial de eje \mathcal{V}_i en \mathcal{E}_n : si se pone $\zeta = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_q$, la restricción de ζ sobre \mathcal{H} es ψ' y su restricción sobre \mathcal{D} es la identidad (puesto que

la restricción de cada s_i sobre \mathcal{D} es la simetría central de centro Ω , y q es par). Se tiene por lo tanto $\zeta = \psi$. Dicho esto, \mathcal{V}_1 es ortogonal al vector \vec{v} de la traslación τ . Se puede pues poner:

$$\tau = \rho \circ s_1, \text{ donde } \rho \text{ es la simetría radial de eje } \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

De donde:

$$\varphi = \tau \circ \psi = \rho \circ s_1 \circ (s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_q) = \rho \circ (s_1 \circ s_1) \circ s_2 \circ \cdots \circ s_q,$$

o sea (puesto que $s_1 \circ s_1 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$).

$$(1) \quad \varphi = \rho \circ s_2 \circ \cdots \circ s_q.$$

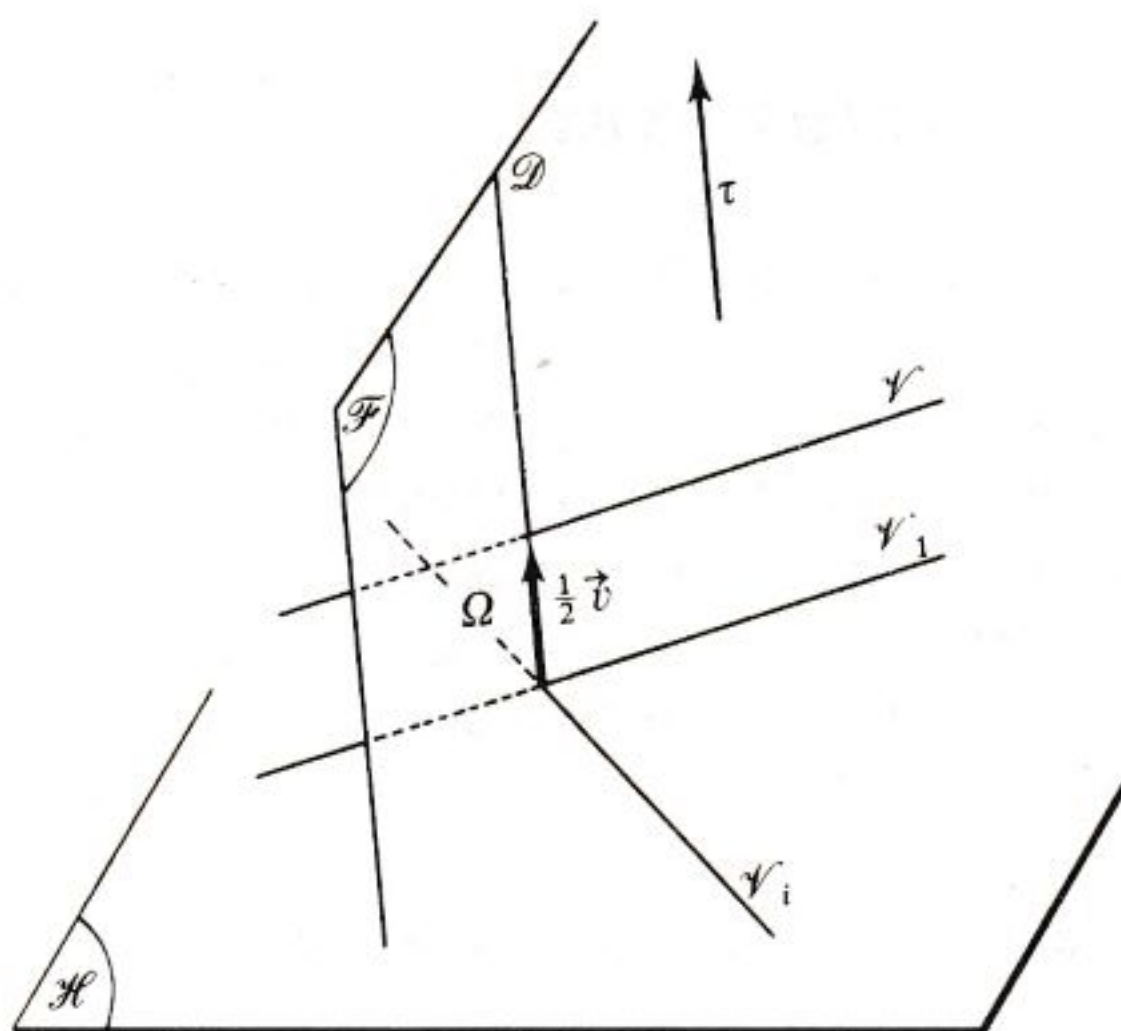


Figura 14.

La relación (1) es una descomposición de φ en q simetrías axiales, y se tiene $q \leq n-1$ (véase la figura 14).]

Observaciones

1. Coloquémonos en el caso en que φ no admite punto fijo; entonces según el teorema II.12.1, en el razonamiento que antecede, basta introducir un número q de simetrías σ_i inferior o igual a:

$$(n-1) - v(\psi') = (n-1) - (v(\psi) - 1) = n - v(\psi).$$

Designando por f la parte lineal de φ , se tiene: $v(f) = v(\varphi)$. De donde se deduce:

— Si φ no admite punto fijo, existen simetrías axiales, en número inferior o igual a $n - v(f)$, de las cuales φ es el producto. (En este caso, necesariamente $v(f) \geq 1$.)

— Si φ admite por lo menos un punto fijo, existen simetrías axiales, en número inferior o igual a $n - v(\varphi)$, de las cuales φ es el producto.

2. La descomposición de un desplazamiento en simetrías radiales constituye un instrumento muy potente, a veces más ventajoso que II.11.4, o que la descomposición en simetrías respecto a hiperplanos.

Para $n = 3$, se vuelve a encontrar el resultado conocido: todo desplazamiento de \mathcal{E}_3 , que no se reduce a una simetría axial, es producto de *dos* simetrías axiales.

§ II.13 SEMEJANZAS. INVERSIONES

En E_n , se da el nombre de **semejanza vectorial** a todo automorfismo $g = \lambda f$, donde $\lambda \in \mathbf{R}^*$ designa una constante y f un *automorfismo ortogonal* de E_n ; en otros términos, una semejanza vectorial es el producto de una *homotecia vectorial* de razón λ no nula y de un *automorfismo ortogonal*.

Cambiando si es preciso f por $-f$, se puede suponer siempre que el número λ es positivo, y se dice entonces que g es una **semejanza de razón λ** .

La razón de una semejanza queda definida de manera única. En efecto, se tiene, con las notaciones que anteceden:

$$(1) \quad \det(g) = \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f); \text{ por otra parte, } \det(f) = \pm 1,$$

de donde, si $\lambda > 0$:

$$\lambda^n = |\det(g)| \quad \text{y} \quad \lambda = |\det(g)|^{1/n},$$

Se observará que una *homotecia vectorial* de razón $k \neq 0$ es una semejanza de razón $|k|$ ⁽¹⁾.

Para que un automorfismo g de E_n sea una semejanza de k ($k > 0$), es necesario y suficiente que verifique una de las condiciones equivalentes que siguen:

⁽¹⁾ Se tendrá en cuenta que la razón de la homotecia vectorial $h: \vec{V} \mapsto \lambda \cdot \vec{V}$, es λ . Pero si se considera a h como una semejanza, la razón de esta semejanza es $|\lambda|$. Tenemos pues con el mismo nombre dos conceptos distintos que no se deben confundir. En la práctica, el mismo contexto impedirá cualquier ambigüedad. (En cuanto a la terminología, nos hemos remitido al uso habitual.)

- a) $(\forall \vec{v} \in E_n) \quad \|g(\vec{v})\| = k \|\vec{v}\|.$
 b) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in E_n) \quad g(\vec{u}) \cdot g(\vec{v}) = k^2 \vec{u} \cdot \vec{v}.$

Las semejanzas vectoriales de E_n constituyen un subgrupo $GL(E_n)$, que designaremos por $\mathcal{S}(E_n)$. Las semejanzas vectoriales de determinante > 0 constituyen un subgrupo de índice 2 de $\mathcal{S}(E_n)$, que nosotros designaremos por $\mathcal{S}_+(E_n)$; se les da el nombre de *semejanzas directas*. Los elementos de $\mathcal{S}(E_n) \setminus \mathcal{S}_+(E_n)$ reciben el nombre de *semejanzas indirectas*.

Según la relación (1), toda semejanza g se escribe de manera única en la forma:

$$g = \lambda f \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbf{R}_+^* \quad \text{y} \quad f \in O(E_n),$$

siendo entonces λ la razón de g .

En particular, g es directa si, y sólo si, $f \in SO(E_n)$, y g es indirecta si, y sólo si $f \in O(E_n) \setminus SO(E_n)$.

Se puede precisar la situación introduciendo dos homomorfismos de grupos:

1. El homomorfismo $\rho : \mathcal{S}(E_n) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ que, a toda semejanza g , asocia su razón λ_g ;
2. El homomorfismo $\omega : \mathcal{S}(E_n) \rightarrow O(E_n)$ que, a g , asocia el único elemento $f_g \in O(E_n)$, tal que $g = \lambda_g \cdot f_g$.

Se ve fácilmente que ω es suprayectivo y que $\text{Ker}(\omega)$ es igual al grupo $H_+(E_n)$ de las homotecias de razón > 0 . De donde resulta un isomorfismo natural

$$\mathcal{S}(E_n)/H_+(E_n) \cong O(E_n) \quad (H_+(E_n) \text{ distinguido en } \mathcal{S}(E_n)).$$

Es claro igualmente que $\text{Ker}(\rho) = O(E_n)$; ρ es suprayectivo, ya que si $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ la homotecia $h : \vec{V} \mapsto \lambda \cdot \vec{V}$ verifica $\rho(h) = \lambda$. De donde se deduce un isomorfismo natural

$$\mathcal{S}(E_n)/O(E_n) \cong \mathbf{R}_+^* \quad (O(E_n) \text{ siendo distinguido en } \mathcal{S}(E_n)).$$

Restringiendo ρ a $\mathcal{S}_+(E_n)$, se ve igualmente que $SO(E_n)$ es un subgrupo distinguido de $\mathcal{S}_+(E_n)$ y que se tiene un isomorfismo natural de grupos:

$$\mathcal{S}_+(E_n)/SO(E_n) \cong \mathbf{R}_+^*.$$

Las semejanzas de E_n están caracterizadas por la siguiente propiedad:

II.13.1 *Para que un endomorfismo no nulo g de E_n sea una semejanza, es necesario y suficiente que las imágenes de dos vectores ortogonales cualesquiera de E_n sea vectores ortogonales.*

Demostración. La condición es evidentemente necesaria, ya que si g es una semejanza de razón k , se tiene:

$$g(\vec{u}) \cdot g(\vec{v}) = k^2 \vec{u} \cdot \vec{v},$$

y la relación $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ implica que $g(\vec{u}) \cdot g(\vec{v}) = 0$.

Recíprocamente, supongamos cumplida esta condición. Al ser fijo el vector no nulo \vec{v} , el núcleo de la forma lineal

$$\vec{u} \mapsto g(\vec{u}) \cdot g(\vec{v})$$

contiene entonces al núcleo de la forma $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$. Existe, por lo tanto un escalar $\lambda(\vec{v})$, que depende solamente del vector \vec{v} , tal que

$$(\forall \vec{u} \in E_n) \quad g(\vec{u}) \cdot g(\vec{v}) = \lambda(\vec{v}) (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Intercambiando los papeles de \vec{u} , \vec{v} , se ve que la relación $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$ implica

$$\lambda(\vec{u}) = \lambda(\vec{v}).$$

Si se tiene $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ o con $\vec{u} \neq 0$ y $\vec{v} \neq 0$, existe un vector \vec{w} tal que $\vec{u} \cdot \vec{w} \neq 0$ y $\vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$ (por ejemplo $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$). Se tiene por lo tanto:

$$\lambda(\vec{u}) = \lambda(\vec{w}) = \lambda(\vec{v}).$$

Se sigue que la función $\vec{u} \mapsto \lambda(\vec{u})$ se reduce a una constante en $E_n \setminus \{0\}$. Designando a esta constante por C , se tiene $C > 0$, ya que existe un \vec{u} que satisface $g(\vec{v}) \neq 0$ y $\|g(\vec{u})\|^2 = C\|\vec{u}\|^2$. De donde:

$$(\forall \vec{u}, \vec{v} \in E_n \setminus \{0\}) \quad g(\vec{u}) \cdot g(\vec{v}) = C \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Esto demuestra que g es una semejanza de razón $k = \sqrt{C}$.

Corolario

|| Las semejanzas de E_n son los únicos endomorfismos de E_n que conservan el ángulo de dos vectores cualesquiera.

Semejanzas afines**Definición II.13.1**

En \mathcal{E}_n , se da el nombre de **semejanza** (afín), a toda biyección φ de \mathcal{E}_n cuya parte lineal u_φ es una semejanza vectorial de E_n . Se dice que la semejanza φ es **directa** (resp. **indirecta** o **inversa**) si u_φ es directa (resp. indirecta). Se dice finalmente, que la razón de u_φ es la **razón** de φ .

Sigamos designando por $L : \text{GA}(\mathcal{E}_n) \rightarrow \text{GL}(E_n)$ al homomorfismo fundamental que asocia su parte lineal a toda biyección afín de \mathcal{E}_n . Por definición, el conjunto de las semejanzas de \mathcal{E}_n es la imagen recíproca de $\mathcal{S}(E_n)$ por L ; es pues, un subgrupo de $\text{GA}(E_n)$, denominado *grupo de las semejanzas* de \mathcal{E}_n , que nosotros designaremos por $\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)$. Igualmente, el conjunto de las semejanzas *directas* es la imagen recíproca de $\mathcal{S}_+(E_n)$ por L , y es por lo tanto un subgrupo de $\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)$, denominado *grupo de las semejanzas directas*, al cual nosotros designaremos por $\mathcal{SA}_+(\mathcal{E}_n)$. Es claro que $\mathcal{SA}_+(\mathcal{E}_n)$ es un subgrupo de índice 2 (por lo tanto distinguido) de $\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)$.

Sea $H(E_n)$ el grupo de las homotecias de E_n .

Del hecho de ser $H(E_n)$, $O(E_n)$, $H_+(E_n)$ y $SO(E_n)$ grupos distinguidos de $\mathcal{S}(E_n)$, se deduce, por aplicación del teorema de isomorfismo sobre los grupos (véase tomo 1, p. 75) las propiedades siguientes:

— El grupo $\text{HT}(\mathcal{E}_n)$ de las homotecias y traslaciones es un subgrupo distinguido de $\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)$, y se tiene un isomorfismo natural

$$\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)/\text{HT}(\mathcal{E}_n) \cong \mathcal{S}(E_n)/H(E_n).$$

El conjunto $\text{HT}_+(\mathcal{E}_n)$ de las traslaciones y de las homotecias de razón > 0 es un subgrupo distinguido de $\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)$, y se tiene un isomorfismo natural

$$\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)/\text{HT}_+(\mathcal{E}_n) \cong O(E_n).$$

— El conjunto $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ es un subgrupo distinguido de $\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)$ y se tiene un isomorfismo natural

$$\mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)/\text{Is}(\mathcal{E}_n) \cong \mathbf{R}_+^*.$$

— el conjunto de $\text{Dep}(\mathcal{E}_n)$ es un subgrupo distinguido de $\mathcal{SA}_+(\mathcal{E}_n)$, y se tiene un isomorfismo natural

$$\mathcal{SA}_+(\mathcal{E}_n)/\text{Dep}(\mathcal{E}_n) \cong \mathbf{R}_+^*.$$

Una caracterización de la semejanza

II.13.2 Sea $f: \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ una aplicación cualquiera. Para que f sea una semejanza, es necesario y suficiente que exista $k \in \mathbf{R}_+^*$ tal que, para todos los $A, B \in \mathcal{E}_n$, se tenga

$$(2) \quad \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = k \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Demostración

a) Si f es una semejanza, la existencia de k resulta inmediata, y k es la razón de la semejanza f .

b) Recíprocamente, supongamos que la aplicación $f: \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ y el real $k > 0$ verifican (2) para todos los $A, B \in \mathcal{E}_n$. Sea g una semejanza de razón k^{-1} (tal semejanza existe: basta por ejemplo tomar $g = \text{Id}_{\mathcal{E}_n}$ si $k = 1$, o g igual a una homotecia de razón k^{-1} si $k \neq 1$).

Para todos los $A, B \in \mathcal{E}_n$, se tiene entonces

$$\|\overrightarrow{g(A)g(B)}\| = k^{-1} \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Poniendo $h = g \circ f$, se deduce, con ayuda de (2):

$$\forall A \in \mathcal{E}_n, \quad \forall B \in \mathcal{E}_n \quad \|\overrightarrow{h(A)h(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Por lo tanto h es una *isometría*, y sabemos que una isometría es afín (véase el comienzo del § 10); de $h \in \text{Is}(\mathcal{E}_n)$, se deduce $h \in \mathcal{SA}(\mathcal{E}_n)$, de donde

$$f = g^{-1} \circ h \in \mathcal{SA}(\mathcal{E}_n).$$

Puntos fijos de una semejanza

Sabemos que una biyección afín de un espacio afín que admite un punto fijo se reduce a una biyección lineal del espacio vectorial asociado (véase § 1.5, p. 23).

El teorema que sigue nos hace ver pues que las semejanzas de razón $\neq 1$ se reducen a semejanzas vectoriales.

II.13.3 || En \mathcal{E}_n toda semejanza φ de razón $k \neq 1$ admite un punto fijo único.

Este punto fijo recibe el nombre de **centro** de la semejanza φ .

Demostración. Sea f la parte lineal de φ . Según I.6.5, basta demostrar que el real 1 no es valor propio de f . Ahora bien, existe $g \in O(E_n)$ tal que $f = kg$. Para todo vector $\vec{V} \in E_n$, se tiene pues

$$\|f(\vec{V})\| = k \|g(\vec{V})\| = k \|\vec{V}\|.$$

Por lo tanto todo valor propio λ de f verifica $|\lambda| = k$, de donde $\lambda \neq 1$, ya que $k \neq 1$.]

Las *semejanzas de razón 1*, no son sino las *isometrías* que ya hemos estudiado. La estructura de las semejanzas de razón $\neq 1$ se deduce fácilmente de la de los automorfismos ortogonales de E_n , teniendo en cuenta II.13.3.

Transformaciones conformes

Definición II.13.2

Dados dos abiertos U, V de \mathcal{E}_n , una aplicación conforme de U sobre V es un difeomorfismo de U sobre V cuya diferencial, en cada punto de U , es una semejanza ⁽¹⁾.

Utilizando la proposición II.13.1, se ve que un difeomorfismo φ de U sobre V es conforme si, y solamente si, verifica la propiedad siguiente:

(C) para cada par γ_1, γ_2 de arcos regulares ⁽²⁾ contenidos en U que tienen un punto común M , el ángulo de las tangentes a $\varphi(\gamma_1), \varphi(\gamma_2)$ en el punto $\varphi(M)$ es igual al ángulo de las tangentes a γ_1, γ_2 en M .

Abreviadamente: *un difeomorfismo conforme es un difeomorfismo que conserva el ángulo de dos arcos regulares cualesquiera.*

⁽¹⁾ Señalemos aquí que un difeomorfismo cuya diferencial en cada punto es una isometría de \mathcal{E}_n , es necesariamente una *isometría* (véase [13] ejercicio III.5).

⁽²⁾ Para el concepto de arco regular véase el capítulo V.

Inversiones

Definición II.13.3

~ Dado un punto O de \mathcal{E}_n y un número $k \neq 0$, se da el nombre de **inversión** de polo O y de potencia k a la biyección $\varphi : M \mapsto M'$ de $\mathcal{E}_n \setminus \{O\}$ sobre sí mismo definida por

$$\overrightarrow{OM'} = k \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}.$$

El punto $M' = \varphi(M)$ queda pues definido mediante las dos condiciones siguientes:

- i) O, M, M' están alineados.
- ii) Dando a la recta (O, M) una orientación cualquiera, se cumple $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$

Se puede demostrar que la diferencial de φ en el punto M es la semejanza $s = \sigma \circ h$, donde h designa la homotecia vectorial de razón

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{k}{\|\overrightarrow{OM}\|^2},$$

y σ la simetría respecto al hiperplano vectorial ortogonal a la recta (OM) , por lo que φ es un *difeomorfismo conforme* de $\mathcal{E}_n \setminus \{O\}$ en sí mismo.

Resulta de ello que toda transformación que se pueda descomponer en un *producto de inversiones* es conforme en su conjunto de definición.

Recíprocamente, se puede demostrar que, para $n \geq 3$, todo difeomorfismo conforme φ de un abierto de \mathcal{E}_n sobre otro es el producto de un número finito de *inversiones* y de *simetrías* respecto a hiperplanos: este teorema, que fue establecido por Liouville en 1850 suponiendo φ de clase C^3 no fue demostrado hasta 1958 de un modo general ⁽¹⁾ (o sea suponiendo φ de clase C^1). Se trata, en efecto, de un teorema de Análisis extremadamente difícil. Para una demostración elemental relativa al caso en que φ es de clase C^2 (véase [13] ejercicio III.12).

Para $n = 2$, existen otros difeomorfismos conformes distintos de los productos de inversiones: en efecto toda biyección holomorfa (o antiholomorfa) de un abierto de \mathbf{C} sobre un abierto de \mathbf{C} es conforme (véase tomo 4, cap. VIII).

⁽¹⁾ P. Hartman ha dado una demostración general en la revista «Mathematische Zeitschrift»; esta demostración exige técnicas muy difíciles de Análisis. Este resultado ha sido por otra parte mejorado después por Y. G. Reshetnyak y G. W. Gehring, utilizando una definición más general de aplicaciones conformes.

Señalemos que los productos de inversiones están caracterizados por la propiedad de transformar las rectas y círculos de \mathcal{E}_n en rectas o círculos.

Designemos por $\tilde{\mathcal{E}}_n$ el espacio que se obtiene al añadir a \mathcal{E}_n un «punto en el infinito» (único) designado por ∞ . Toda inversión φ de polo O de \mathcal{E}_n se prolonga en una biyección involutiva de $\tilde{\mathcal{E}}_n$ sobre sí mismo poniendo

$$\varphi(O) = \infty, \quad \varphi(\infty) = O.$$

Mediante este convenio, los productos de inversiones y de simetrías respecto a hiperplanos constituyen un grupo, denominado *grupo de Möbius de $\tilde{\mathcal{E}}_n$* .

Capítulo III

Estudio elemental de algunos conjuntos

Introducción

Vamos a estudiar en este capítulo algunas «curvas» y «superficies» de un espacio afín (o afín euclídeo) \mathcal{E} de dimensión 2 ó 3, desde un punto de vista *conjuntista*: las palabras «curva» y «superficie» designarán pues aquí *partes* de \mathcal{E} . Se podrán definir estos conjuntos mediante una (o varias) **ecuaciones cartesianas** con relación a un sistema de referencia dado \mathcal{R} de \mathcal{E} . Por extensión de la definición I.3.4, pondremos:

Definición

Sea \mathcal{E} un espacio afín de dimensión n y sean f_1, f_2, \dots, f_p funciones numéricas definidas sobre una parte A de \mathbf{R}^n . Entonces el conjunto S de los puntos de A cuyas coordenadas con relación a \mathcal{R} verifican las relaciones

$$(1) \quad f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad f_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_p(x_1, \dots, x_n) = 0$$

recibe el nombre de **conjunto definido por el sistema de ecuaciones cartesianas (1)**.

● Se observará que un mismo conjunto admite varios sistemas de ecuaciones cartesianas. Se dirá entonces que (1) es *un sistema* (y no *el sistema*) de ecuaciones cartesianas de S con relación a \mathcal{R} .

Sin embargo, en ciertos casos puede ocurrir que un conjunto dado S admita

una única ecuación de un tipo particular: por ejemplo, un círculo del plano euclídeo \mathcal{E}_2 admite, respecto a un sistema dado ortonormal de referencia, una única ecuación cartesiana «normal» (véase § 1), y se puede pues hablar de la *ecuación normal* de esta circunferencia.

Los conjuntos considerados pueden definirse también como imágenes de aplicaciones con valores en \mathcal{E} : si existe un conjunto X y una aplicación $f: X \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $S = f(X)$, se dice que la aplicación f es una **parametrización** del conjunto S .

Hablaremos también a veces de parametrizaciones *locales* de S , se trata entonces de parametrizaciones cuyas imágenes son partes de S ; en contraposición a este caso se dirá que son *globales* aquellas parametrizaciones que tienen a S como imagen.

En los capítulos I y II nos hemos encontrado ya con ejemplos de ecuaciones cartesianas y de parametrizaciones.

En los capítulos V y VIII, profundizaremos en las nociones de curva y de superficie parametrizada.

Observación importante. Sea \mathcal{E} un espacio afín de dimensión n y sea S una parte de \mathcal{E} que admite, con relación a un sistema de referencia dado \mathcal{R}_0 , una ecuación cartesiana de la forma

$$(1) \quad P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

donde P designa un *polinomio de grado p* con relación al conjunto de las variables x_i ($1 \leq i \leq n$).

Entonces, en todo sistema de referencia \mathcal{R} de \mathcal{E} , S admite una *ecuación cartesiana de la misma forma polinómica*. Esto resulta inmediatamente del hecho de que las coordenadas (x_i) , referidas a \mathcal{R}_0 , son funciones *afines* de las coordenadas (y_i) referidas a \mathcal{R} , o sea:

$$x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

ya que S admite, en \mathcal{R} , la ecuación cartesiana:

$$P(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0; \quad \text{y} \quad P(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

es un polinomio de grado p respecto al conjunto de las variables y_1, \dots, y_n .

§ III.1 CIRCUNFERENCIAS DEL PLANO EUCLÍDEO

En este §, nos situamos en un *plano afín euclídeo* \mathcal{E}_2 ligado al espacio vectorial E_2 .

Ecuación normal de una circunferencia

Una vez elegido un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, recordemos que la circunferencia de centro I y de radio $R \geq 0$ es el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{E}_2$ cuyas coordenadas (x, y) verifican la ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0,$$

donde (a, b) son las coordenadas de I .

Esta ecuación recibirá el nombre de **ecuación normal** de la circunferencia.

Recíprocamente, si a, b, γ son tres reales, el conjunto Γ definido por la ecuación cartesiana

(1)

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \gamma = 0$$

es una *circunferencia* de radio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma}$ si $a^2 + b^2 - \gamma \geq 0$, y el *conjunto vacío* si $a^2 + b^2 - \gamma < 0$. Si $a^2 + b^2 - \gamma = 0$, Γ se reduce al punto I , de coordenadas (a, b) , y se dice entonces que Γ es una *circunferencia de radio nulo*.

Por lo tanto si se designa por U el abierto de \mathbf{R}^3 formado por las ternas (a, b, γ) tales que

$$a^2 + b^2 - \gamma > 0,$$

se obtiene una biyección de U sobre el conjunto de las circunferencias de radio > 0 de \mathcal{E}_2 , asociando, a cada terna (a, b, γ) , la circunferencia Γ de ecuación (1).

Se obtiene igualmente una biyección del *paraboloide* de ecuación $a^2 + b^2 - \gamma = 0$ (que es la frontera de U) sobre el conjunto de las circunferencias de radio nulo.

Potencia de un punto respecto a una circunferencia

Supongamos dada una terna (a, b, γ) , tal que $a^2 + b^2 - \gamma \geq 0$, y para cada punto $M \in \mathcal{E}_2$, de coordenadas (x, y) , pongamos:

$$\Gamma(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \gamma = 0.$$

Sea Γ la circunferencia de ecuación $\Gamma(M) = 0$. Con las notaciones anteriores, se tiene:

$$\Gamma(M) = IM^2 - R^2,$$

y, en particular:

$$\gamma = \Gamma(O).$$

Para cada punto $M \in \mathcal{E}_2$ el número $\Gamma(M) = IM^2 - R^2$ recibe el nombre de **potencia de M respecto a la circunferencia Γ** (de centro I y radio R).

El conjunto de los puntos M tales que $\Gamma(M) < 0$ [resp. $\Gamma(M) > 0$] se dice que es el *interior* de Γ [resp. el *exterior* de Γ]. El interior de Γ es pues el *disco abierto* de centro I y radio R , y es un conjunto abierto y convexo, cuya frontera es Γ . Su adherencia es el *disco cerrado* de centro I y radio R .

Interpretaciones geométricas de la potencia

a) Sea (A, B) un par cualquiera de puntos *diametralmente opuestos* sobre la circunferencia Γ ; se tiene entonces:

$$\Gamma(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

(Se tiene en efecto:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{IA}\|^2 = IM^2 - R^2.) \end{aligned}$$

b) Si \mathcal{D} es un eje cualquiera que pasa por M y que corta a Γ en los puntos P, Q , se tiene:

$$\Gamma(M) = \overline{MP} \cdot \overline{MQ}.$$

Demostración. Si $P \neq Q$ y si H designa el punto medio del segmento $[PQ]$, la recta IH es la mediatriz de este segmento, y se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{MP} \cdot \overline{MQ} &= MH^2 - HP^2 = MH^2 - (PI^2 - IH^2) \\ &= MH^2 + IH^2 - PI^2 = MI^2 - R^2 = \Gamma(M). \end{aligned}$$

(véase figura 1)

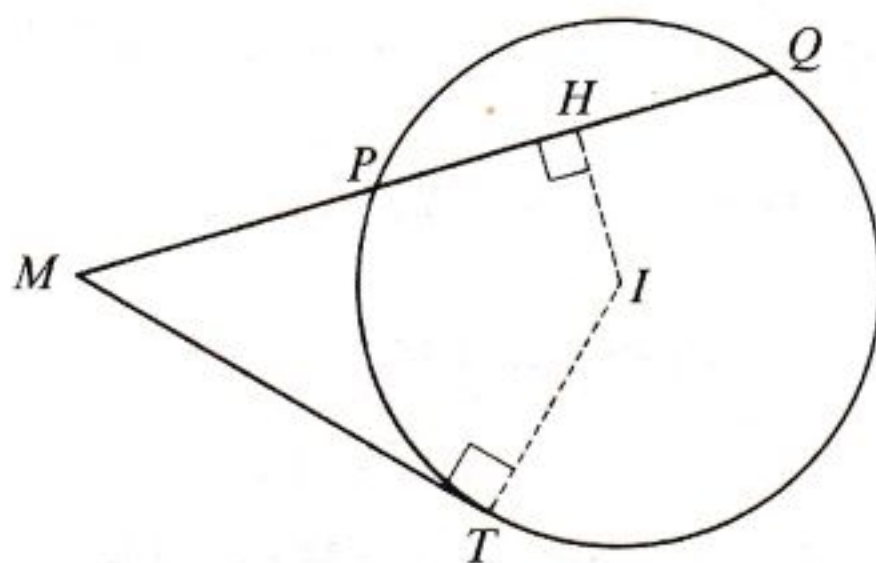


Figura 1.

Si existe una recta \mathcal{D} , que pase por M y corte a Γ en un único punto T , se demuestra directamente (por consideraciones de simetría) que la recta \mathcal{D} es perpendicular en M a la recta IT , lo cual implica que $\Gamma(M) = MT^2$ (véase la figura 1).

La relación $\Gamma(M) = \overline{MP} \cdot \overline{MQ}$ se cumple pues cualesquiera que sean los puntos P, Q (distintos o confundidos) tales que $\Gamma \cap \mathcal{D} = \{P, Q\}$.

Ecuaciones paramétricas de una circunferencia

Sigamos designando por I el punto de coordenadas (a, b) . La circunferencia de centro I y de radio $R > 0$ es la imagen de la aplicación $\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{C}_2, \theta \mapsto I + R\vec{u}(\theta)$ con $\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$.

De ello se deduce una representación paramétrica de Γ :

$$\boxed{x = a + R \cos \theta, \quad y = b + R \sin \theta}.$$

Se obtiene la circunferencia entera para $\theta \in [-\pi, +\pi]$; poniendo $t = \tan \theta/2$, ($\theta \in]-\pi, +\pi[$), se obtiene una biyección de \mathbf{R} sobre Γ sin el punto de coordenadas $(a - R, b)$, definida por:

$$\boxed{x = a + R \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b + R \frac{2t}{1 + t^2}}.$$

Ecuación polar de una circunferencia

Designemos por (r, θ) un sistema de coordenadas polares del punto M en el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$; la ecuación (1) equivale a:

(1bis)

$$\boxed{r^2 - 2lr \cos(\theta - \alpha) + \gamma = 0}$$

designando por (l, α) un sistema de coordenadas polares cualquiera de centro I de Γ . Recíprocamente, si $l^2 \geq \gamma$, la ecuación (1 bis) representa la circunferencia de centro I y de radio $R = \sqrt{l^2 - \gamma}$.

Si $l^2 < \gamma$, no existe ningún punto que verifique (1 bis).

Cuando Γ pasa por O se tiene $\gamma = 0$ y la ecuación (1 bis) se simplifica; para $r \neq 0$ equivale a

(2)

$$r = 2l \cos(\theta - \alpha).$$

De hecho, la curva de ecuación polar (2) contiene el punto O (obtenido para $\theta = \alpha + \pi/2 \pmod{\pi}$); es pues *toda la circunferencia* Γ .

Si se pone $A = 2l \cos \alpha$, $B = 2l \sin \alpha$, la ecuación (2) se escribe

(2bis)

$$r = A \cos \theta + B \sin \theta$$

Recíprocamente si A, B son dos reales al menos uno distinto de cero, la ecuación (2 bis) representa la circunferencia de diámetro OJ , donde J es el punto de coordenadas (A, B) .

Aplicación: inversa de una circunferencia

Comparando (2 bis) con la ecuación polar de una recta (véase § II.6) se ve que *en una inversión cualquiera de polo O , una circunferencia que pasa por O se transforma en una recta que no pasa por O , y recíprocamente.*

Si Γ es una circunferencia que no pasa por O , se ve (utilizando la ecuación (1 bis) o la interpretación b) de la potencia $\gamma = \Gamma(O)$, que *Γ es globalmente invariante en la inversión de polo O y de potencia γ .*

Se deduce de ello que la imagen de Γ en una inversión de polo O y de potencia k , es la circunferencia deducida de Γ por la homotecia de centro O y de razón k/γ (ya que la inversión considerada es el producto de una inversión de potencia γ y de una homotecia de razón k/γ).

La imagen de una circunferencia Γ en una inversión cualquiera es pues una recta o una circunferencia según que el polo de inversión pertenezca o no pertenezca a Γ .

Circunferencia que pasa por tres puntos

Considerando siempre fijo el sistema de referencia ortonormal, sean A_1, A_2, A_3 tres puntos distintos de coordenadas respectivas (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq 3$. La determinación de las circunferencias que pasan por A_1, A_2, A_3 , equivale a la de las ternas $(a, b, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ que verifican

$$a^2 + b^2 - \gamma \geq 0 \quad \text{y}$$

$$(3) \quad 2ax_i + 2by_i - \gamma = x_i^2 + y_i^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Las relaciones (3) constituyen un sistema de tres ecuaciones lineales con las tres incógnitas a, b, γ cuyo determinante es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -1 \\ 2x_2 & 2y_2 & -1 \\ 2x_3 & 2y_3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si $\Delta \neq 0$, este sistema admite una *solución única* (a, b, γ) , y esta solución cumple necesariamente $a^2 + b^2 - \gamma > 0$ (ya que si se tuviera $a^2 + b^2 - \gamma \leq 0$, el conjunto de los puntos que verifican la ecuación (1) sería vacío o quedaría reducido a un punto, contrariamente a las hipótesis).

Se tiene por otra parte $\Delta = 0$ si, y solamente si, los puntos A_i están *alineados* (véase § I.11), y se demuestra fácilmente que ninguna circunferencia contiene tres puntos alineados. Se puede dar pues el enunciado que sigue:

Por tres puntos distintos no alineados de \mathcal{E}_2 , pasa una circunferencia y solo una.

Intersección con una recta

Sea Γ una circunferencia de centro I y de radio $R > 0$, de ecuación normal (1); sea \mathcal{D} una recta afín, de ecuación:

$$ux + vy + h = 0,$$

y sea H la proyección ortogonal de I sobre \mathcal{D} .

Recordemos que un examen fácil de la función $M \mapsto IM^2 = IH^2 + HM^2$, donde M recorre \mathcal{D} , permite estudiar la intersección de Γ y \mathcal{D} , que:

- es vacía si $IH > R$,
- queda reducida a $\{H\}$ si $IH = R$,
- está formada por dos puntos simétricos con relación a H si $IH < R$.

Cuando $IH = R$, se dice que la recta \mathcal{D} es **tangente** a Γ en el punto H y que el punto H es el **punto de contacto** de \mathcal{D} con Γ (estos términos quedarán justificados en el § 11 cuando se dé una definición precisa de *tangente a un conjunto*).

La tangente a Γ en el punto H es pues ortogonal al radio IH :

Utilizando la expresión de la distancia de I a \mathcal{D} dada en el § II.6 y poniendo

$$f(u, v, h) = (ua + vb + h)^2 - R^2(u^2 + v^2),$$

se deducen los resultados siguientes:

- Si $f(u, v, h) > 0$, $\Gamma \cap \mathcal{D}$ es vacío.
- Si $f(u, v, h) = 0$, \mathcal{D} es *tangente* a Γ .
- Si $f(u, v, h) < 0$, \mathcal{D} y Γ tienen dos puntos comunes distintos (se dice entonces, abreviadamente, que \mathcal{D} es *secante* a Γ).

A la relación

(4)

$$(ua + vb + h)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0$$

se le da el nombre de *ecuación tangencial* de Γ (en el sistema de referencia considerado); es, en efecto, una condición necesaria y suficiente para que la recta \mathcal{D} sea *tangente* a Γ .

Para estudiar la intersección de \mathcal{D} y Γ se puede también utilizar una representación paramétrica (afín o baricéntrica) de \mathcal{D} (véase §§ I.7 y I.9). Poniendo en el primer miembro de (1) las expresiones de x e y en función del parámetro elegido se obtiene una ecuación de grado ≤ 2 respecto al parámetro, de la cual se estudian las raíces. El grado de esta *ecuación de las intersecciones* se reduce a 1 solamente en el caso de una representación baricéntrica, cuando uno de los puntos de base elegidos sobre \mathcal{D} pertenece a Γ .

Tangentes desde un punto a una circunferencia

Sigamos con las notaciones anteriores y sea M_0 un punto de \mathcal{E}_2 , de coordenadas (x_0, y_0) . Para todo punto $M_1 \neq M_0$, de coordenadas (x_1, y_1) estudiemos la intersección de Γ con la recta (M_0M_1) utilizando la representación paramétrica baricéntrica de esta recta definida por

$$x = \frac{tx_0 + x_1}{t + 1}, \quad y = \frac{ty_0 + y_1}{t + 1} \quad (t \neq -1).$$

Poniendo:

$$\begin{aligned} P_r(M_0, M_1) &= x_0 x_1 + y_0 y_1 - a(x_0 + x_1) - b(y_0 + y_1) + \gamma \\ &= \overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{IM_1} + \gamma - a^2 - b^2 = \overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{IM_1} - R^2, \end{aligned}$$

se obtiene la *ecuación de las intersecciones*

$$(4) \quad \Gamma(M_0) t^2 + 2 P_r(M_0, M_1) t + \Gamma(M_1) = 0.$$

Primer caso: si $\Gamma(M_0) = 0$, es decir si $M_0 \in \Gamma$, la ecuación (4) es de grado ≤ 1 (en efecto el punto M_0 no se obtiene para ningún valor finito de t). Para que la recta (M_0M_1) sea tangente a Γ es necesario y suficiente que no tenga con Γ ningún punto común distinto de M_0 ; por lo tanto, es necesario y suficiente que la ecuación (4) no tenga *ninguna* raíz, lo cual se cumple si, y solamente si, se tiene:

$$P_r(M_0, M_1) = 0.$$

En este caso la relación $P_T(M_0, M) = 0$ es condición necesaria y suficiente para que el punto M pertenezca a la tangente en M_0 a Γ ; es **una ecuación cartesiana de la tangente a Γ en M_0** .

Segundo caso: Si $M_0 \notin \Gamma$, la ecuación (4) es de grado dos. Para que la recta (M_0M_1) , sea tangente a Γ , es necesario y suficiente que (4) tenga una raíz doble, es decir que se tenga:

$$(5) \quad \boxed{P_T^2(M_0, M_1) - \Gamma(M_0) \Gamma(M_1) = 0}.$$

Para que M_1 sea el punto de contacto de una tangente a Γ que pase por M_0 , es necesario y suficiente que verifique (5) y que $\Gamma(M_1) = 0$. Los puntos de contacto de las tangentes a Γ trazadas desde M_0 son pues los puntos de intersección de Γ con el conjunto definido por la ecuación $P_T(M_0, M) = 0$, o sea:

$$(6) \quad (x_0 - a)x + (y_0 - b)y - ax_0 - by_0 + \gamma = 0.$$

Si M_0 es el centro I de Γ , se tiene

$$(\forall M \in \mathcal{E}_2) \quad P_T(M_0, M) = \gamma - a^2 - b^2 = -R^2,$$

y la ecuación (6) no se verifica nunca.

Si $M_0 \neq I$, la ecuación (6) define una recta ortogonal a la recta IM_0 , esta recta es el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{E}_2$ que verifican $\overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{IM} = R^2$; la distancia del punto I a esta recta es pues R^2/IM_0 . De donde se deduce:

- Si M_0 es *interior* a Γ , por M_0 no pasa *ninguna* tangente a Γ .
- Si $M_0 \in \Gamma$, la única tangente a Γ que pasa por M_0 es la tangente a Γ en M_0 , y es la recta de ecuación (6).
- Si M_0 es *exterior* a Γ , pasan por M_0 *dos* tangentes distintas a Γ , cuyos puntos de contacto son los puntos de intersección de Γ con la recta de ecuación (6). En este caso, la *reunión* de estas tangentes es el conjunto de los puntos M que verifican la ecuación:

$$P_T^2(M_0, M) - \Gamma(M_0) \Gamma(M) = 0.$$

Poniendo $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $a' = a - x_0$, $b' = b - y_0$ (lo cual equivale a utilizar el sistema de referencia $(M_0; \vec{i}, \vec{j})$ de origen M_0), esta ecuación se escribe:

$$(\Gamma(M_0) - a'^2) x'^2 - 2a'b'x'y' + (\Gamma(M_0) - b'^2) y'^2 = 0.$$

Encontramos de nuevo el tipo de ecuaciones estudiado en el § II.7.

§ III.2 PUNTOS CONJUGADOS RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Sigamos designando por Γ una circunferencia de radio $R > 0$, con centro en el punto I . La función $P_\Gamma : \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida en el § que antecede verifica

$$(\forall M_0 \in \mathcal{E}_2, \forall M_1 \in \mathcal{E}_2) P_\Gamma(M_0, M_1) = \overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{IM_1} - R^2 = P_\Gamma(M_1, M_0).$$

Poniendo siempre $\Gamma(M) = IM^2 - R^2 = P_\Gamma(M, M)$, se tiene también:

$$P_\Gamma(M_0, M_1) = 2 \Gamma(\tfrac{1}{2} \cdot M_0 + \tfrac{1}{2} \cdot M_1) - \tfrac{1}{2} \Gamma(M_0) - \tfrac{1}{2} \Gamma(M_1)$$

designando por $\tfrac{1}{2} \cdot M_0 + \tfrac{1}{2} \cdot M_1$ el punto medio del segmento $M_0 M_1$ (véase § I.8).

Se dice que dos puntos M_0, M_1 de \mathcal{E}_2 son **conjugados** respecto a Γ si se tiene $P_\Gamma(M_0, M_1) = 0$. Se establece así una relación binaria simétrica en \mathcal{E}_2 .

El conjunto de los conjugados de un punto M_0 recibe el nombre de **polar** de M_0 respecto a Γ . Según el estudio que antecede (final del § 1) este conjunto es *vacío* si $M_0 = I$ y si $M_0 \neq I$, es la *recta* de ecuación

$$(1) \quad \overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{IM} = R^2.$$

Si M_0 es exterior a Γ , esta recta pasa por los puntos de contacto de las tangentes a Γ trazadas desde M_0 (véase la figura 2).

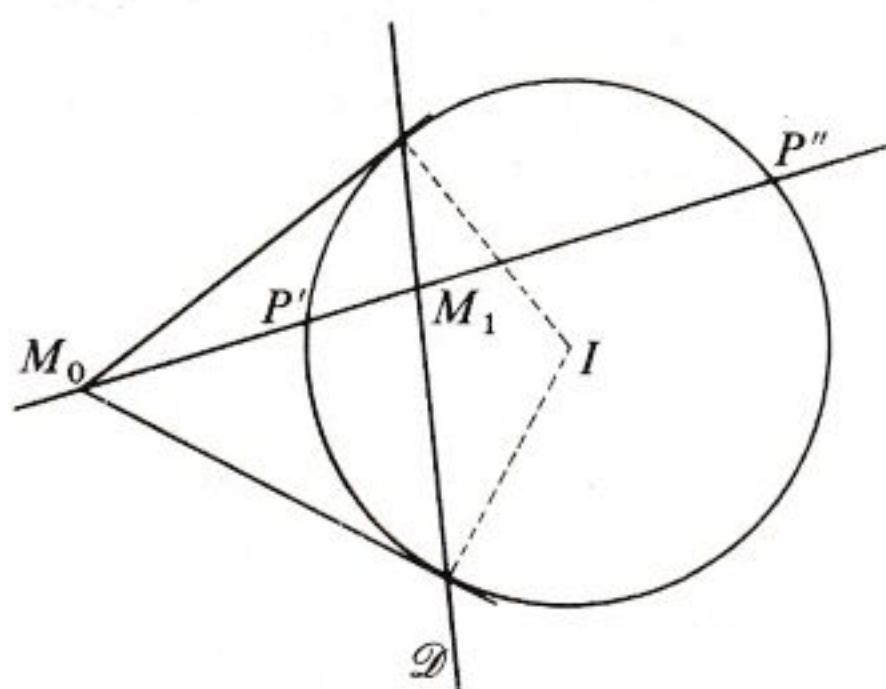


Figura 2.

Se tiene evidentemente $P_\Gamma(M_0, M_0) = \Gamma(M_0)$: por lo tanto el punto M_0 pertenece a su polar si, y solamente si, pertenece a Γ ; su polar es entonces la tangente en M_0 a Γ .

Según las definiciones, la relación « M_0 pertenece a la polar de M_1 » equivale a « M_1 pertenece a la polar de M_0 ». Esta propiedad recibe el nombre de *polaridad recíproca*.

Polo de una recta

Si se refiere el plano a un sistema ortonormal $(I; \vec{i}, \vec{j})$ de origen I , se tiene para todo punto M de coordenadas (x, y) : $\Gamma(M) = x^2 + y^2 - R^2$; de donde, si M_0 es el punto de coordenadas (x_0, y_0) :

$$P_r(M, M_0) = xx_0 + yy_0 - R^2.$$

Para que la recta \mathcal{D} , de ecuación

$$ux + vy + h = 0$$

en este sistema de referencia, sea la polar de M_0 , es necesario y suficiente que exista un real $k \neq 0$ tal que

$$(2) \quad x_0 = ku, \quad y_0 = kv, \quad -R^2 = kh.$$

Estas relaciones definen un punto único M_0 si $h \neq 0$, es decir si \mathcal{D} no pasa por I . Este punto M_0 recibe entonces el nombre de **polo** de \mathcal{D} . Si \mathcal{D} pasa por I , el sistema (2) es incompatible.

En conclusión: si a cada punto M_0 de \mathcal{E}_2 se asocia su polar respecto a γ , se obtiene una biyección de $\mathcal{E}_2 \setminus \{I\}$ sobre el conjunto de las rectas de \mathcal{E}_2 que no pasan por el centro de γ .

Interpretación geométrica

Vamos a interpretar la relación de ser conjugados dos puntos distintos M_0, M_1 en el caso en que la recta (M_0M_1) es secante de Γ . Para ello utilicemos la parametrización baricéntrica de esta recta definida por

$$t \mapsto \frac{t}{t+1} \cdot M_0 + \frac{1}{t+1} \cdot M_1$$

y la ecuación de las intersecciones antes establecida (ecuación 4 del § 1):

$$\Gamma(M_0) t^2 + 2 P_r(M_0, M_1) + \Gamma(M_1) = 0.$$

Según las hipótesis, esta ecuación admite dos raíces reales distintas t', t'' y la anulación de $P_r(M_0, M_1)$ equivale a $t' + t'' = 0$.

Ahora bien, el parámetro de un punto M de la recta (M_0M_1) , es igual a

$$t = - \frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_0}}.$$

La condición de ser conjugados $P_I(M_0, M_1) = 0$ significa pues que los puntos de intersección $P'P''$ de la recta (M_0M_1) con I verifican

$$\frac{\overrightarrow{P'M_1}}{\overrightarrow{P'M_0}} = - \frac{\overrightarrow{P''M_1}}{\overrightarrow{P''M_0}} ;$$

Dicho de otro modo, los cuatro puntos M_0, M_1, P', P'' forman una *cuaterna armónica* (véase la figura 2).

§ III.3 EJES RADICALES.

HACES DE CIRCUNFERENCIAS

Eje radical de dos circunferencias

Habiendo referido el plano \mathcal{E}_2 a un sistema ortonormal cualquiera $(O; \vec{i}, \vec{j})$, sean I, I' dos circunferencias distintas, de ecuaciones respectivas $I(M) = 0$, $I'(M) = 0$, con

$$I(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \gamma, \quad I'(M) = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + \gamma'.$$

El conjunto de los puntos M que tienen la *misma potencia respecto a las dos circunferencias* I, I' está definido por la ecuación $I'(M) - I(M) = 0$, o sea:

$$(1) \quad 2(a' - a)x + 2(b' - b)y - (\gamma' - \gamma) = 0.$$

Si I y I' son concéntricas, no existe ningún punto que verifique (1). En cualquier otro caso, (1) define una recta denominada **eje radical de I y I'** . La relación (1) hace ver que el eje radical es ortogonal a la recta que pasa por los centros I, I' de I y I' .

El sistema $I(M) = I'(M) = 0$, equivale a: $I(M) = 0$ y $I(M) - I'(M) = 0$. Dicho de otro modo, *la intersección de I y I' es la misma que la intersección de I con el eje radical*. Esto nos conduce de nuevo a la discusión ya vista acerca de la intersección de dos circunferencias.

Centro radical de tres circunferencias

Sea I'' una tercera circunferencia de ecuación $I''(M) = 0$, de centro I'' , suponiéndose que los tres centros I, I', I'' son distintos. Los ejes radicales de las tres circunferencias I, I', I'' tomadas dos a dos quedan definidos respectivamente mediante las ecuaciones $D(M) = 0$, $D'(M) = 0$, $D''(M) = 0$, por

$$D(M) = \Gamma'(M) - \Gamma''(M), \quad D'(M) = \Gamma''(M) - \Gamma(M), \quad D''(M) = \Gamma(M) - \Gamma'(M).$$

Las funciones D , D' , D'' verifican $D + D' + D'' = 0$; por lo tanto *los tres ejes radicales son concurrentes o bien paralelos*. Concurren en un punto único C , si, y solamente si, los centros I , I' , I'' no están alineados. El punto C recibe entonces el nombre de **centro radical de las tres circunferencias**, y es el único punto que tiene la misma potencia respecto a las mismas.

Circunferencias ortogonales

Se dice que dos circunferencias Γ , Γ' de radios > 0 son **ortogonales** si son secantes, y sus tangentes en cada uno de sus puntos comunes A , B , son ortogonales

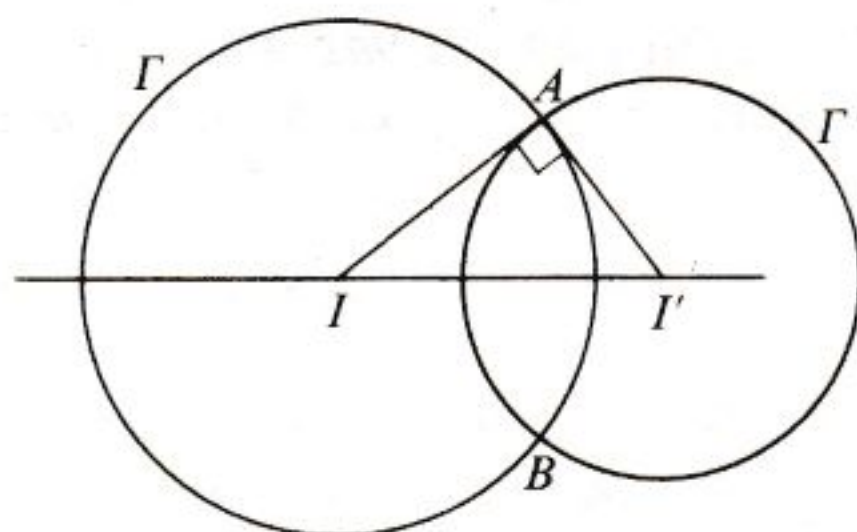


Figura 3.

(véase la figura 3). Esto equivale a decir que los *radios* IA , $I'A$ son ortogonales, designando por I , I' los centros de Γ , Γ' . Se deduce inmediatamente:

Para que dos circunferencias Γ , Γ' , de centros I , I' y de radios respectivos R , R' no nulos sean ortogonales, es necesario y suficiente que verifiquen la relación

$$(2) \quad II'^2 = R^2 + R'^2.$$

En efecto la relación (2) implica $|R - R'| \leq II' \leq R + R'$, lo cual supone que Γ y Γ' son *secantes*, y basta considerar los triángulos IAI' e IBI' .

La relación (2) se escribe de este modo:

$$\Gamma(I') = R'^2, \quad \text{o también:} \quad \Gamma'(I) = R^2.$$

La relación de ortogonalidad es evidentemente *simétrica*.

Si Γ' es una circunferencia de radio nulo, la relación (2) equivale a $I' \in \Gamma$; por extensión, se dirá que Γ' es ortogonal a Γ .

Si Γ y Γ' están definidas mediante las ecuaciones normales:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \gamma = 0, \quad x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + \gamma' = 0,$$

la condición de ortogonalidad (2) equivale a:

$$2(aa' + bb') = \gamma + \gamma'.$$

Haces lineales de circunferencias

Si $\Gamma(M) = 0$ es la ecuación *normal* de una circunferencia Γ , entonces, para todo $k \in \mathbf{R}^*$, la ecuación $k\Gamma(M) = 0$, define la misma circunferencia. Pero no hay que perder de vista que la función $k\Gamma$ representa sólo la potencia respecto a Γ si $k = 1$.

Sean entonces Γ, Γ' dos circunferencias distintas, de ecuaciones respectivas $\Gamma(M) = 0, \Gamma'(M) = 0$. Por definición, el haz lineal de base $\{\Gamma, \Gamma'\}$ es el conjunto de las circunferencias que admiten una ecuación (no necesariamente normal) de la forma:

$$\lambda\Gamma(M) + \lambda'\Gamma'(M) = 0, \quad \text{con } (\lambda, \lambda') \neq (0, 0).$$

Se obtiene evidentemente el mismo haz tomando como base el conjunto $\{\Gamma_1, \Gamma'_1\}$ formado por dos circunferencias distintas cualesquiera del haz considerado.

Designemos por $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ la recta proyectiva (véase tomo 2 p. 30). Nos consideramos las circunferencias de ecuaciones $\Gamma_\lambda(M) = 0$, con

$$\Gamma_\lambda(M) = \lambda\Gamma(M) + \Gamma'(M) \quad (\lambda \in \tilde{\mathbf{R}})$$

conviniendo en que $\Gamma_\infty(M) = \Gamma'(M)$.

a) Si Γ, Γ' tienen el mismo centro I , tomemos un sistema de referencia de origen I . Se tiene entonces:

$$\Gamma(M) = x^2 + y^2 - R^2, \quad \Gamma'(M) = x^2 + y^2 - R'^2$$

de donde

$$\Gamma_\lambda(M) = (1 + \lambda)(x^2 + y^2) - \lambda R^2 - R'^2.$$

Esta ecuación define una circunferencia si, y solamente si, se tiene $\lambda \neq -1$ y

$$(1 + \lambda)(\lambda R^2 + R'^2) \geq 0.$$

Cuando λ recorre el subconjunto de \mathbf{R} así definido, se obtiene una vez, y solamente una vez cada una de las circunferencias de centro I .

Se dice entonces que se trata de un haz de circunferencias concéntricas.

b) Si Γ y Γ' no son concéntricas, tomemos un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tal que el eje Ox sea su *recta de los centros* y el eje Oy su *eje radical* Δ . Se tiene entonces (por ser $\Gamma(O) = \Gamma'(O)$):

$$\Gamma(M) = x^2 + y^2 - 2ax + \gamma, \quad \Gamma'(M) = x^2 + y^2 - 2a'x + \gamma$$

con $a \neq a'$, y todas las circunferencias del haz tienen sus centros sobre la recta Ox . Distinguiremos tres casos:

Primer caso: $\gamma < 0$ (caso en que O es interior a Γ y Γ'). En este caso Γ , Γ' se cortan en dos puntos distintos A , B de la recta $\Delta = (Oy)$ y se tiene:

$$\Gamma_\lambda(M) = (1 + \lambda)(x^2 + y^2) - 2(\lambda a + a')x + (\lambda + 1)\gamma.$$

Para que $\Gamma_\lambda(M) = 0$ sea la ecuación de una circunferencia es necesario y suficiente que se tenga $\lambda \neq -1$, y cuando λ recorre $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, se obtiene una vez, y solo una, cada una de las circunferencias que admiten una ecuación de la forma

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2\mu x + \gamma = 0 \quad (\mu \in \mathbf{R})$$

es decir, cada una de las circunferencias que *pasan por* A y B . Se dice entonces que se trata de un **haz cuyos puntos de base son** A , B (véase la fig. 4).

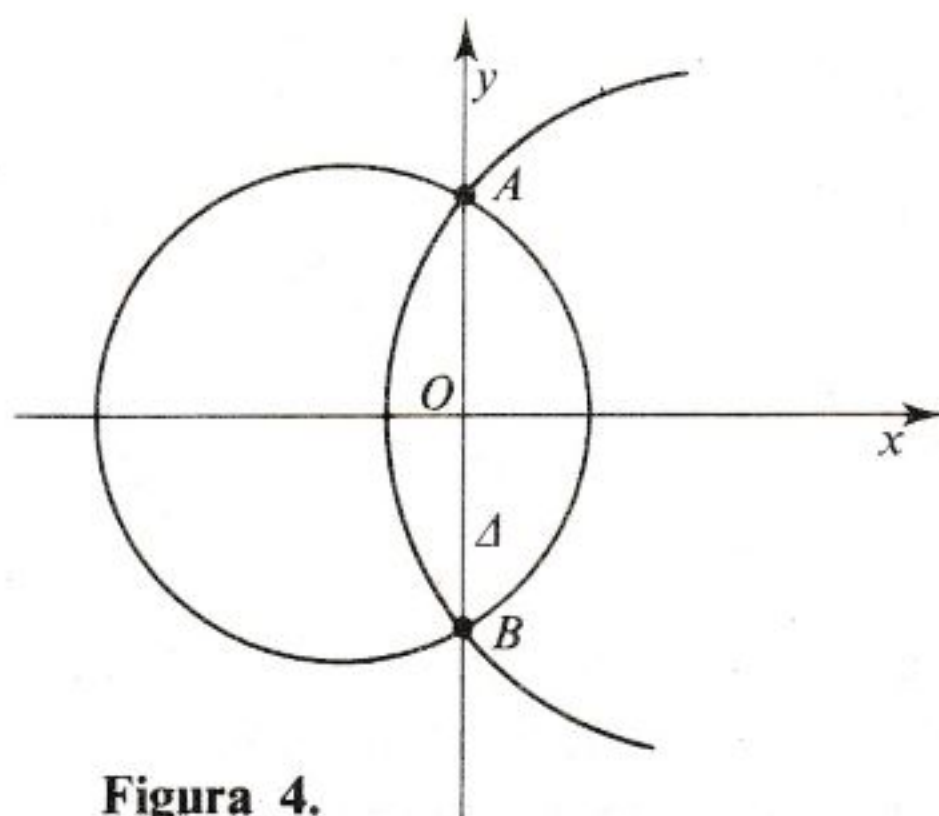


Figura 4.

Segundo caso: $\gamma > 0$ (caso en que Γ y Γ' no tienen puntos comunes). Se tiene entonces, para $\lambda \neq -1$:

$$\Gamma_\lambda(M) = (\lambda + 1) \left[x^2 + y^2 - 2 \frac{\lambda a + a'}{\lambda + 1} x + \gamma \right].$$

Sean U y V los puntos de coordenadas $(l, 0)$ y $(-l, 0)$, donde $l = \sqrt{\gamma}$.

Cuando λ recorre el subconjunto de \mathbf{R} definido por

$$\lambda \neq -1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\lambda a + a'}{\lambda + 1} \right)^2 - \gamma \geq 0,$$

se obtiene una vez, y solo una, cada una de las circunferencias que admiten una ecuación de la forma

$$(4) \quad x^2 + y^2 - 2\mu x + \gamma = 0 \quad (\mu \in \mathbf{R}, \mu^2 \geq \gamma).$$

Para $\mu = \pm\sqrt{\gamma}$ se obtiene las dos *circunferencias reducidas a los puntos* U y V . Se dice entonces que se tiene un **haz de puntos límites** U, V .

Fácilmente se ve que cada una de estas circunferencias es *ortogonal* a cualquier circunferencia que pase por U y V . Por ello, se dice que el haz de puntos de base U, V y el haz de puntos límites U, V son **conjugados** (véase la figura 5).

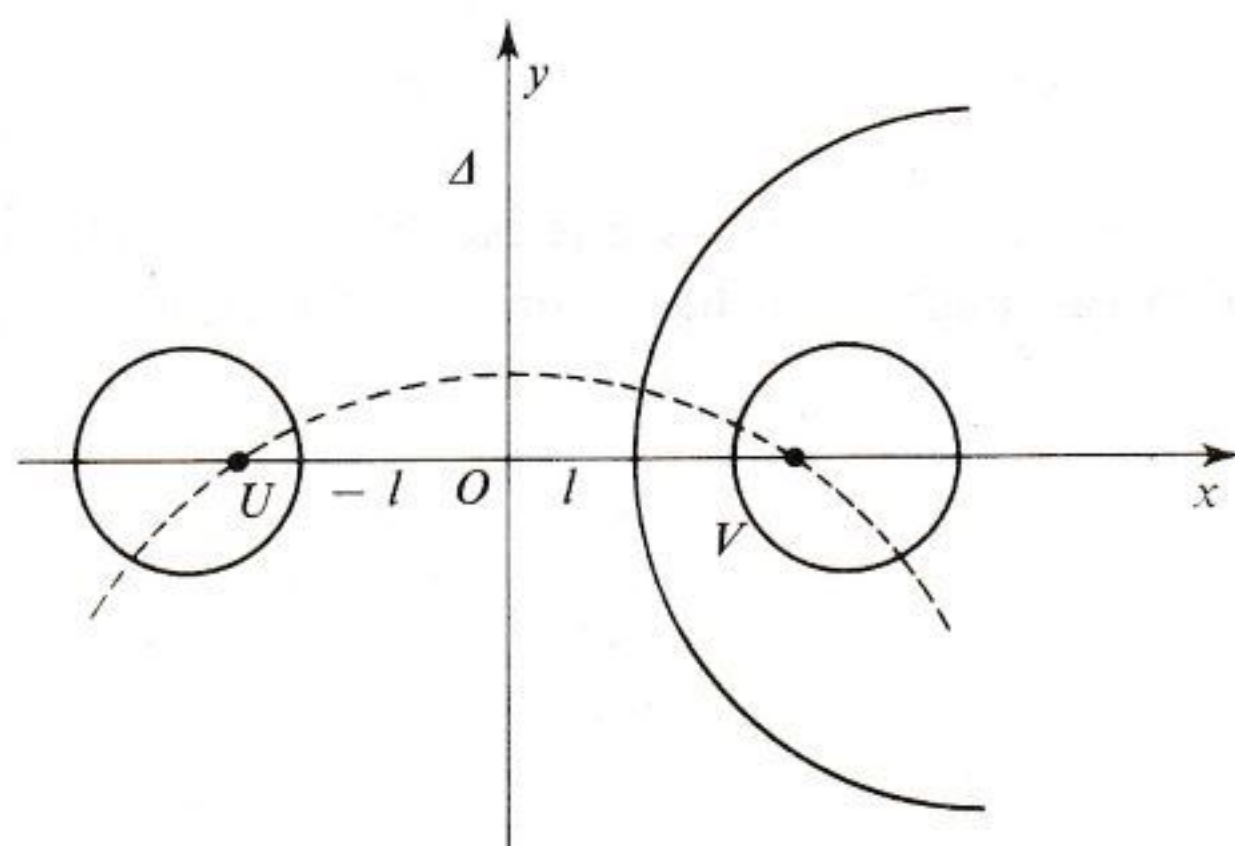


Figura 5.

Observación. Tomando como circunferencias base las dos circunferencias reducidas a los puntos U, V , se ve que la circunferencia de haz de puntos límites U, V son aquéllas que admiten una ecuación de la forma

$$\lambda MU^2 + \lambda' MV^2 = 0 \quad (\lambda, \lambda' = \text{Ctes}) \quad ((\lambda, \lambda') \neq (0, 0))$$

o también:

$$\frac{MV}{MU} = k \quad (k = \text{Cte}).$$

El conjunto de los puntos M de \mathcal{E}_2 cuya razón de distancias a los puntos U, V es una constante k , es pues una circunferencia del haz de puntos de base U, V y, al hacer variar la constante k , se obtienen todas las circunferencias de este haz: estas circunferencias reciben el nombre de *circunferencias de Apolonio de U y V* .

Tercer caso: $\gamma = 0$. Se tiene entonces

$$\Gamma_\lambda(M) = (\lambda + 1)(x^2 + y^2) - 2(\lambda a + a')x;$$

y cuando λ recorre $\tilde{\mathbf{R}} \setminus \{-1\}$, se obtiene una vez, y solo una, cada una de las circunferencias que admiten una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 - 2\mu x = 0 \quad (\mu \in \mathbf{R})$$

es decir a cada circunferencia tangente en O a Δ (véase la fig. 6). Se dice entonces que se tiene un **haz de circunferencias tangentes**.

Cada circunferencia del haz es ortogonal a cada circunferencia tangente en O a Ox . Se dice que estos dos haces de circunferencias tangentes son *conjugados* (véase la figura 6).

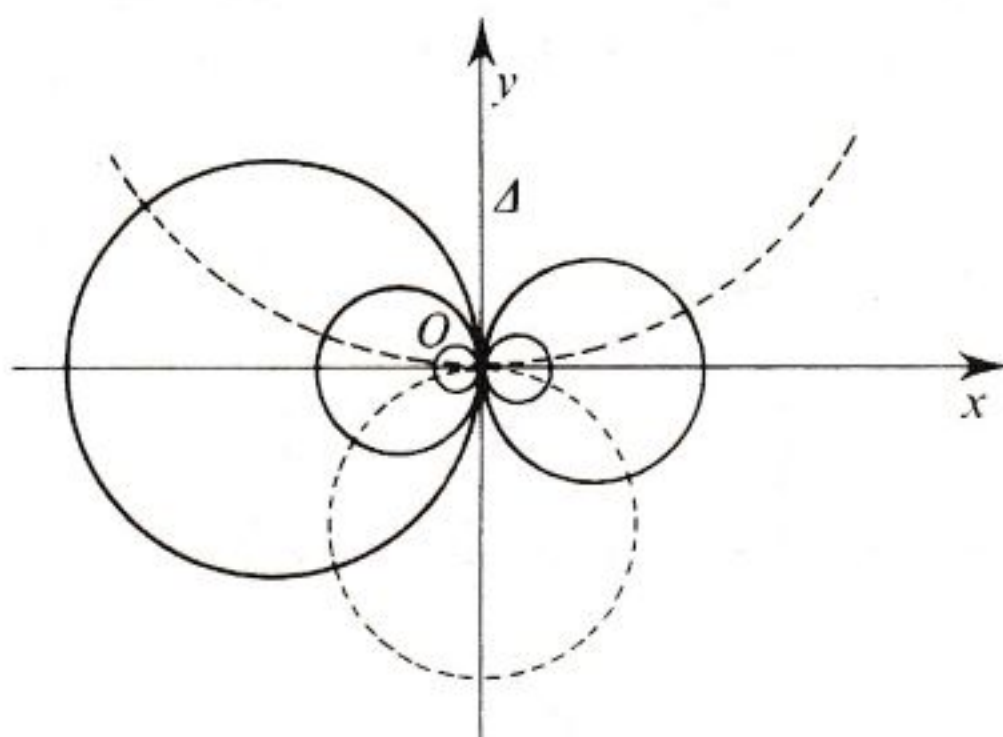


Figura 6.

En los tres casos estudiados, se ve que la ecuación $\Gamma_{-1}(M) = 0$ representa a la recta Δ , eje radical de Γ y Γ' ; esta recta es también el eje radical de dos circunferencias cualesquiera distintas del haz, y se le da el nombre de *eje radical* del haz. De la recta Ox se dice que es la *línea de los centros*.

Si $\Gamma(M) = 0$ es la ecuación normal de una circunferencia cualquiera del haz y si $D(M) = 0$ es una ecuación cartesiana del eje radical Δ , las circunferencias del haz son aquellas cuya ecuación normal es de la forma

$$\Gamma(M) + \mu D(M) = 0 \quad (\mu \in \mathbf{R}).$$

Se puede considerar entonces que el eje radical se obtiene para $\mu = \infty$.

Las propiedades de los haces se recuerdan en los ejercicios. Señalemos la más elemental cuya demostración es inmediata:

Por todo punto exterior al eje radical de un haz de circunferencias no concéntricas, pasa una circunferencia y solamente una de este haz.

§ III.4 ECUACIONES POLARES Y CARTESIANAS DE LAS CÓNICAS

Sigamos designando por \mathcal{E}_2 un plano afín euclídeo, por O un punto de \mathcal{E}_2 , por \mathcal{D} una recta que no pasa por O , y por e un real > 0 .

Recordemos que se da el nombre de **cónica**, de foco O , de directriz \mathcal{D} y de *excentricidad* e al conjunto Γ de los puntos $M \in \mathcal{E}_2$ tales que $MO = eMH$, donde H designa la proyección ortogonal de M sobre \mathcal{D} (véase la figura 7). La recta Δ que pasa por O y es ortogonal a \mathcal{D} , recibe el nombre de *eje mayor* de Γ .

Utilizaremos coordenadas polares respecto a un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tal que \vec{i} sea paralelo a Δ , y designaremos por K al punto común a \mathcal{D} y Δ . Pondremos finalmente $\overline{OK} = h$ (véase la figura 7).

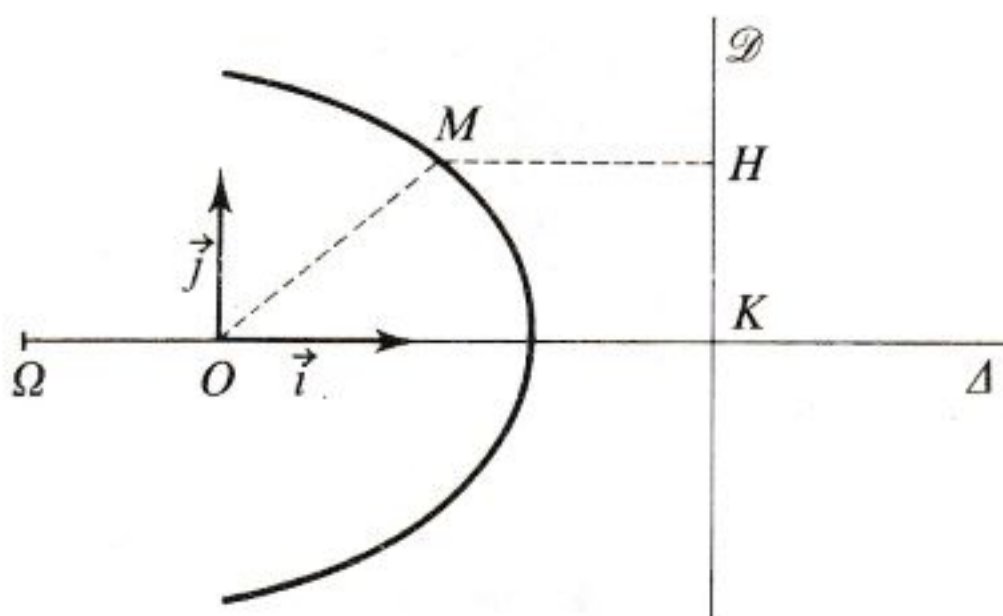


Figura 7.

Para que el punto M , de coordenadas polares (r, θ) verifique la relación $MO = eMH$, es necesario y suficiente que verifique la relación $MO^2 = e^2MH^2$, o sea, explícitamente:

$$r^2 = e^2(h - r \cos \theta)^2.$$

Se tiene por lo tanto: $M \in \Gamma$ si, y solamente si, se cumple una de las relaciones que siguen:

$$(1) \quad r = \frac{eh}{1 + e \cos \theta}$$

$$(2) \quad r = \frac{-eh}{1 - e \cos \theta}.$$

Si (r, θ) es un sistema de coordenadas polares de M que verifica una de las ecuaciones, entonces $(-r, \theta + \pi)$ es un sistema de coordenadas polares que verifica la otra. De ello se deduce que **cada una de las ecuaciones (1) y (2) define a toda la cónica Γ .**

El número positivo $p = |eh|$ recibe el nombre de **parámetro** de Γ , y es la longitud del «radio vector» OM obtenido para $\theta = \pm \pi/2$:

— si $e < 1$ (caso de la elipse), se obtiene una biyección de $[0, 2\pi[$ sobre Γ con ayuda de (1) o de (2) haciendo variar θ en $[0, 2\pi[$;

— si $e = 1$ (caso de la parábola), se obtiene una biyección de $] -\pi, \pi[$ sobre Γ con ayuda de (1), cuando θ recorre $] -\pi, \pi[$;

— si $e > 1$ (caso de la hipérbola), sea θ_0 el real único de $]0, \pi[$ tal que $\cos \theta_0 = -1/e$. Haciendo variar θ en $] -\theta_0, \theta_0[$, la ecuación (1) define una biyección de $] -\theta_0, \theta_0[$ sobre la parte de Γ contenida en el semiplano limitado por \mathcal{D} y que contiene a O (esta parte es una de las dos componentes conexas de Γ , denominadas «ramas» de Γ).

Haciendo variar θ en $[\theta_0, 2\pi - \theta_0[$, la ecuación (1) define una biyección de $[\theta_0, 2\pi - \theta_0[$ sobre la otra rama de Γ . El estudio de los recíprocos es evidente.

Destaquemos que se puede tomar siempre el vector \vec{i} de manera que se tenga $h > 0$ (ello equivale a orientar el eje mayor Δ de O hacia \mathcal{D}).

Orientemos ahora \mathcal{E}_2 de manera que la base (\vec{i}, \vec{j}) sea directa, sometiendo el sistema de referencia a una rotación de centro O y de ángulo α cualquiera, podemos enunciar lo siguiente:

Toda cónica de foco O y de excentricidad e admite una ecuación polar de la forma:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos (\theta - \alpha)}, \quad \text{con } p > 0.$$

La misma cónica admite también la ecuación polar

$$r = \frac{-p}{1 - e \cos (\theta - \alpha)}.$$

El número α es entonces una determinación del *ángulo polar* del eje mayor Δ , orientado desde O hacia \mathcal{D} , o sea $(Ox, \Delta) = \alpha \pmod{2\pi}$.

Recíprocamente, si p, A, B son tres reales tales que $p \neq 0$ y $(A, B) \neq (0, 0)$ la ecuación polar

$$(3) \quad r = \frac{p}{A \cos \theta + B \sin \theta + 1}$$

define una cónica de foco O , de excentricidad $e = \sqrt{A^2 + B^2}$, cuyo eje mayor es la recta de ecuación cartesiana $Bx - Ay = 0$.

Observación. En los intervalos en que está definida la función $\frac{p}{1 + e \cos \theta}$ introducidos antes, r mantiene un signo constante. Se deduce fácilmente que los puntos de Γ situados sobre el eje mayor corresponden:

- si $e < 1$, al máximo y al mínimo absolutos del radio vector OM cuando M describe Γ ;
- si $e = 1$, al mínimo absoluto de OM ;
- si $e > 1$, al mínimo absoluto de OM en cada rama (uno por rama).

Esta observación es de importancia en el estudio del movimiento de los planetas (véase cap. XI).

Ecuaciones cartesianas

Manteniendo las mismas notaciones, designemos por Ω un punto cualquiera del eje mayor de Γ y pongamos:

$$\gamma = \overline{\Omega O}, \quad \delta = \overline{\Omega K} = \gamma + h.$$

Para que un punto M , de coordenadas (x, y) en el sistema de referencia $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ pertenezca a Γ es necesario y suficiente que se tenga:

$$(4) \quad (x - \gamma)^2 + y^2 = e^2(x - \delta)^2.$$

a) Si $e = 1$, la ecuación (4) se reduce a:

$$(5) \quad y^2 = 2(\gamma - \delta)x + \delta^2 - \gamma^2 = -2hx + h(\gamma + \delta).$$

Si se toma como Ω el punto medio del segmento $[O, K]$, se tiene $\delta = -\gamma = h/2$, y la ecuación (5) se reduce a

$$y^2 = -2hx.$$

Finalmente (permutando si es preciso i por $-\vec{i}$) se puede suponer $h < 0$, de donde $h = -p$, y se obtiene la ecuación clásica de una **parábola** de vértice Ω y de eje mayor Ωx :

(6)

$$\boxed{y^2 = 2px}.$$

Recíprocamente, si el número $p > 0$ es dado, la ecuación (6) define evidentemente una parábola que admite por foco el punto de coordenadas $(0, p/2)$ y como directriz la recta de ecuación $x = -p/2$.

b) Si $e \neq 1$, la curva Γ corta a su eje mayor Ox en dos puntos A, A' (denominados **vértices**) definidos por

$$\overline{OA} = \frac{eh}{1+e} \quad \overline{OA'} = \frac{-eh}{1-e}.$$

Si se toma como Ω el punto medio del segmento $[A, A']$, la ecuación (4) se reduce a:

$$(7) \quad y^2 + (1 - e^2)x^2 - \frac{e^2 h^2}{1 - e^2} = 0.$$

De esto se deduce que el punto Ω , así elegido, es un *centro de simetría* de Γ . De donde resulta la existencia de un segundo punto O' y de una segunda recta \mathcal{D}' tales que Γ es la cónica de foco O' , de directriz \mathcal{D}' y de excentricidad e .

Se escribe en general la ecuación (7) en la forma

$$(8) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0} \quad a > 0, \quad b > 0$$

con $\varepsilon = +1$ si $e < 1$ y $\varepsilon = -1$ si $e > 1$.

El número $2a = \|\overrightarrow{AA'}\|$ recibe el nombre de *longitud del eje mayor de Γ* , y el número $2b$ es la *longitud del eje menor*. Se tiene:

$$a = \frac{p}{|1-e^2|}, \quad b = \frac{p}{|1-e^2|^{1/2}}.$$

Inversamente, si a, b son dos números > 0 dados y si se toma $\varepsilon = -1$, se comprueba que la ecuación (8) define una *hipérbola* que tiene como focos a los puntos O, O' de abscisas $\overline{OQ} = c, \overline{OQ'} = -c$, con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, de excentricidad $e = c/a$ y de parámetro $p = b^2/a$.

Si se toma $\varepsilon = +1$, y si $a \neq b$, la ecuación (8) define una *elipse* que tiene por focos los puntos O, O' de abscisas $\overline{OQ} = c, \overline{OQ'} = -c$, con

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

de excentricidad $e = c/a$ y de parámetro $p = b^2/a$.

Si $\varepsilon = +1$ y $a = b$, la ecuación (8) es la de una circunferencia de centro Ω .

● En lo que sigue las circunferencias serán consideradas como elipses particulares,

de excentricidad nula (considerándose entonces que la directriz se encuentra situada «en el infinito»).

Recordemos que la cónica definida por (8) es también el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{E}_2$ que verifican:

$$(9) \quad |MO + \varepsilon MO'| = 2a.$$

Ecuación general

El estudio que antecede permite, con una discusión fácil, establecer el resultado que sigue:

*Dado un sistema de referencia ortonormal cualquiera $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{E}_2 , las cónicas que admiten a la recta Ωx como **eje mayor** son los conjuntos **no vacíos** que admiten una ecuación cartesiana de la forma*

$$(10) \quad y^2 = Ax^2 + 2Bx + C, \quad \text{con} \quad AC - B^2 \neq 0.$$

Cónicas referidas a un sistema de referencia afín cualquiera

Designemos ahora por $\mathcal{R} = (0; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un **sistema de referencia afín cualquiera** (no necesariamente ortonormal) de \mathcal{E}_2 . A partir de (10) se ve que toda cónica admite, con relación a este sistema de referencia, una ecuación cartesiana de la forma

$$(11) \quad f(x, y) = 0,$$

donde f designa un polinomio de grado 2 de dos variables reales. Esto resulta inmediatamente del hecho de que las coordenadas de un punto M en un sistema de referencia son funciones afines de sus coordenadas en otro sistema (véase introducción p. 156).

Inversamente, supongamos dado un *polinomio de grado 2* de dos variables reales, o sea:

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

con $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, e investiguemos la naturaleza del conjunto Γ definido mediante la ecuación cartesiana $f(x, y) = 0$ en el sistema de referencia \mathcal{R} .

Para ello introduzcamos la *forma cuadrática* Q definida en E_2 mediante

$$Q(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2;$$

y denotemos por F la función definida en \mathcal{E}_2 por $F(M) = f(x, y)$, designando por (x, y) las coordenadas de M en \mathcal{R} .

Según el teorema II.1.1, existe una **base ortonormal** (\vec{i}, \vec{j}) de E_2 formada por vectores propios del operador simétrico de E_2 asociado a Q y un par (λ, μ) de reales tales que:

$$(\forall X, Y \in \mathbf{R}) \quad Q(X\vec{i} + Y\vec{j}) = \lambda X^2 + \mu Y^2.$$

Denotemos por \mathcal{R}_0 el sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Las coordenadas (x, y) de un punto M respecto a \mathcal{R} son evidentemente funciones lineales de sus coordenadas (X, Y) respecto a \mathcal{R}_0 (ya que los dos sistemas de referencia tienen el mismo origen), y existen dos números ρ, σ independientes de M tales que se tiene:

$$Dx + Ey = \rho X + \sigma Y.$$

Por otra parte, con estas mismas notaciones, se tiene:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = Q(\overrightarrow{OM}) = \lambda X^2 + \mu Y^2,$$

de donde:

$$f(x, y) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\rho X + 2\sigma Y + F.$$

El conjunto Γ_f estudiado es, por lo tanto, el conjunto de los puntos M cuyas coordenadas (X, Y) respecto al sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ verifican la ecuación $\varphi(X, Y) = 0$ con

$$\varphi(X, Y) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\rho X + 2\sigma Y + F.$$

A partir de aquí, distinguiremos dos casos:

Primer caso: $\lambda\mu = 0$. Al no poder ser a la vez iguales a cero los dos números λ, μ , supongamos, para fijar ideas, $\lambda = 0$ y $\mu \neq 0$, y sea Ω el punto de coordenadas $(0, -\sigma/\mu)$ en \mathcal{R}_0 . Para que un punto M , de coordenadas (x', y') en el sistema de referencia ortonormal $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ pertenezca a Γ_f , es necesario y suficiente que se verifique:

$$\mu y'^2 + 2\rho x' + F - \frac{\sigma^2}{\mu} = 0.$$

De ello resulta que Γ_f es una *parábola* si (y solamente si) se tiene $\rho \neq 0$.

Si $\rho = 0$, Γ_f es el *conjunto vacío*, la *recta* $y' = 0$ o un *par de rectas paralelas*, según que se tenga:

$$\mu F - \sigma^2 > 0, \quad \mu F - \sigma^2 = 0 \quad \text{o} \quad \mu F - \sigma^2 < 0.$$

Segundo caso: $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$. Sea entonces Ω el punto de coordenadas $(-\rho/\lambda, -\sigma/\mu)$ en \mathcal{R}_0 . Para que un punto M , de coordenadas (x', y') en el sistema de referencia ortonormal $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ pertenezca a Γ_f , es necesario y suficiente que se verifique:

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + F - \frac{\rho^2}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{\mu} = 0.$$

● Si $\Omega \notin \Gamma_f$, se deduce que Γ_f es una *cónica con centro* (elipse o hipérbola) o el *conjunto vacío*.

● Si Ω pertenece a Γ_f , entonces Γ_f es la reunión de dos rectas que pasan por Ω , o el conjunto $\{\Omega\}$.

Para interpretar esta discusión, designemos por DF_M la diferencial de la función F en el punto M de coordenadas (X, Y) respecto a \mathcal{R}_0 , que es la aplicación lineal definida, en la base (\vec{i}, \vec{j}) , por:

$$\begin{aligned} DF_M(dX\vec{i} + dY\vec{j}) &= \varphi'_X(X, Y) dX + \varphi'_Y(X, Y) dY \\ &= 2(\lambda X + \rho) dX + 2(\mu Y + \sigma) dY. \end{aligned}$$

Si se supone $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$, la diferencial de F se anula en el único punto $M = \Omega$ de coordenadas $(X = -\rho/\lambda, Y = -\sigma/\mu)$.

Si se supone $\lambda = 0$ y $\mu \neq 0$, la diferencial de F solamente se anula si $\rho = 0$, y el conjunto de los ceros es entonces la recta de ecuación $\mu Y + \sigma = 0$.

En conclusión:

— Para que el conjunto Γ_f sea una *cónica con centro*, es necesario y suficiente que sea *no vacío* y que la diferencial de F se anule en un punto único Ω que no pertenezca a Γ_f . Este punto es entonces el *centro* de la cónica.

— Para que el conjunto Γ_f sea una *parábola* es necesario y suficiente que la diferencial de F no se anule en ningún punto.

Vuelta al sistema de referencia inicial

Volviendo al polinomio dado f , se ve que la diferencial de F queda definida, en el sistema de referencia inicial \mathcal{R} , mediante:

$$DF_M(dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2) = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$$

y la anulación de DF_M equivale al sistema $f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0$. De esto se deduce:

— Para que el conjunto Γ_f sea una *cónica con centro*, es necesario y suficiente que sea *no vacío*, y que el sistema lineal:

$$(11) \quad Ax + By + D = 0, \quad Bx + Cy + E = 0$$

tenga una *solución única* (x_0, y_0) que verifique $f(x_0, y_0) \neq 0$ (lo cual exige

$$AC - B^2 \neq 0),$$

y el centro de Γ_f es entonces el punto Ω de coordenadas (x_0, y_0) .

— Para que el conjunto Γ_f sea una *parábola*, es necesario y suficiente que el sistema (11) *carezca de solución* (lo cual exige $AC - B^2 = 0$).

Finalmente, si Γ_f no es una cónica propiamente dicha, puede ser solamente: el conjunto vacío, un punto, una recta o la reunión de dos rectas. Se dice entonces que es una *cónica degenerada*. Precizando:

● Si el sistema (11) admite una solución única (x_0, y_0) que verifique $f(x_0, y_0) = 0$, y si Ω designa el punto de coordenadas (x_0, y_0) , el conjunto Γ_f admite, respecto al sistema $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (trasladado de \mathcal{R}) la ecuación cartesiana:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Es por lo tanto del tipo estudiado en el § II.

● Si (11) define una recta afín \mathcal{D} , Γ_f está formado por dos rectas paralelas a \mathcal{D} , o se reduce a \mathcal{D} .

Observemos que, si Γ_f es una *cónica*, su naturaleza depende solamente de la forma cuadrática Q : es una cónica con centro si Q es de rango 2, una parábola si Q es de rango 1.

Direcciones principales

Volvamos al caso general y conservemos las notaciones que anteceden. Designemos por Φ el operador simétrico de E_2 asociado a Q . Por definición, se da el nombre de *dirección principal* de Γ_f a toda *recta vectorial formada por vectores propios de Φ* (véase p. 83).

Al ser Φ simétrica, existe por lo menos un par de direcciones principales ortogonales. Precizando:

a) Si existe un real ρ tal que $\forall \vec{V} \in E_2, \Phi(\vec{V}) = \rho \|\vec{V}\|^2$, toda dirección es principal (en este caso, cuando Γ_f es una cónica esta cónica es una circunferencia);

b) Si Φ no es proporcional a la forma cuadrática $\vec{V} \mapsto \|\vec{V}\|^2$, existe entonces un par y solo uno de direcciones principales ortogonales que reciben el nombre de **direcciones principales** de Γ_f . Este caso es aquél en que Φ admite dos valores propios distintos; entonces, cuando Γ_f es una parábola (lo cual supone que Q es de rango 1), las direcciones principales son la dirección del eje de simetría y su di-

rección ortogonal, y cuando Γ_f es una cónica con centro (lo cual supone que Q es de rango 2), las direcciones principales son las direcciones de los ejes de simetría de Γ_f .

Direcciones asintóticas

Si Γ_f admite direcciones asintóticas, éstas se definen mediante

$$Q(\overrightarrow{OM}) = 0, \text{ o sea } Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

§ III.5 CILINDROS, CONOS Y CONOIDES

● En este §, designamos por \mathcal{E} un espacio afín de *dimensión* 3 y por E el espacio vectorial asociado. La palabra «superficies» designará ciertos conjuntos de \mathcal{E} . Posteriormente, tendremos que profundizar en el concepto de superficie abandonando este enfoque «conjuntista» (véase cap. VIII).

Cilindros

Diremos que una parte \mathcal{S} de \mathcal{E} es una **superficie cilíndrica** o, simplemente, un **cilindro**, si existe un sistema de referencia $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} y una función numérica diferenciable f , definida sobre un abierto de \mathbf{R}^2 , tales que \mathcal{S} sea el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{E}$ cuyas coordenadas (x, y, z) respecto a \mathcal{R}_0 verifican la ecuación

$$f(x, y) = 0.$$

Dicho de otro modo: \mathcal{S} es la reunión de las rectas paralelas al vector \vec{k} , que cortan a la curva C del plano $z = 0$ definida por la ecuación $f(x, y) = 0$.

Estas rectas reciben el nombre de **generatrices** del cilindro, y de la curva C se dice que es **una base** del cilindro (véase fig. 8).

Por cada punto de \mathcal{S} pasa una generatriz y sólo una. Por otra se comprueba fácilmente que toda sección de \mathcal{S} por un plano no paralelo al vector \vec{k} es también una base de \mathcal{S} .

Consideremos ahora un sistema de referencia afín *cualquiera* \mathcal{R} ; las coordenadas (x, y, z) de un punto M respecto a \mathcal{R}_0 son funciones afines de sus coordenadas (ξ, η, ζ) respecto a \mathcal{R} . En particular, existen dos funciones afines P, Q tales que se tiene:

$$x = P(\xi, \eta, \zeta), \quad y = Q(\xi, \eta, \zeta),$$

y los planos de ecuaciones $P = 0$, $Q = 0$ se cortan según el eje Oz . En el sistema de referencia \mathcal{R} , el cilindro \mathcal{S} queda pues definido mediante la ecuación:

$$(2) \quad \boxed{f(P, Q) = 0}$$

Recíprocamente, sean P , Q dos funciones afines sobre \mathbf{R}^3 , tales que los planos de ecuaciones $P = 0$, $Q = 0$ en un sistema de referencia afín \mathcal{R} sean *no paralelos*, y sea f una función numérica diferenciable sobre un abierto de \mathbf{R}^2 . Entonces en \mathcal{R} , la

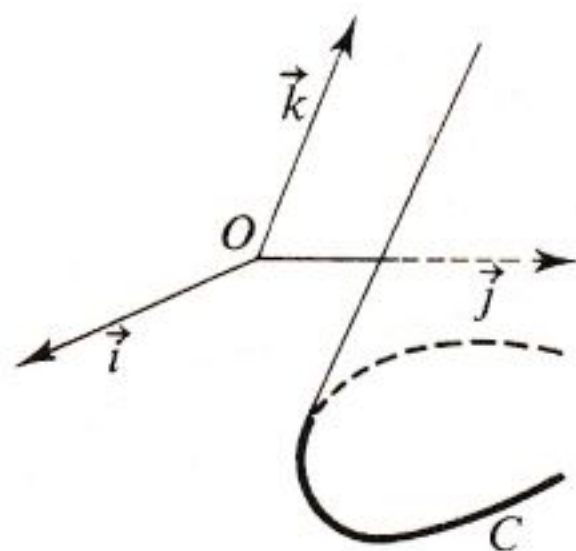


Figura 8.

ecuación (2) define un cilindro cuyas generatrices son paralelas a la intersección de los planos de ecuaciones $P = 0$, $Q = 0$.

En un sistema de referencia cualquiera se reconoce pues un cilindro en que puede ser definido mediante una ecuación de la forma (2).

Ejemplo

En un sistema de referencia afín cualquiera, la ecuación

$$(x + y + 1)^2 = z$$

define un cilindro cuyas generatrices son paralelas a la recta de ecuaciones $x + y + 1 = 0$, $z = 0$, que son las rectas dirigidas por el vector $(1, -1, 0)$. Una *base* de este cilindro es la curva del plano $x = 0$ definida por $z = (y + 1)^2$.

Hojas cilíndricas

En el capítulo VIII, llamaremos *hoja parametrizada cilíndrica* a toda aplicación de la forma:

(3)

$$I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \lambda) \mapsto M(t) + \lambda \vec{u}$$

donde I designa un intervalo de \mathbf{R} , \vec{u} un vector *constante no nulo* y $t \mapsto M(t)$ una aplicación derivable de I en \mathcal{E} .

La imagen de la aplicación (3) es evidentemente la reunión de las rectas de \mathcal{E} paralelas a \vec{u} y que cortan al soporte del arco parametrizado $\gamma : t \mapsto M(t)$. Estas rectas reciben el nombre de **generatrices** de la hoja considerada, y se dice que el arco γ es una **directriz** de la misma (véase la figura 9).

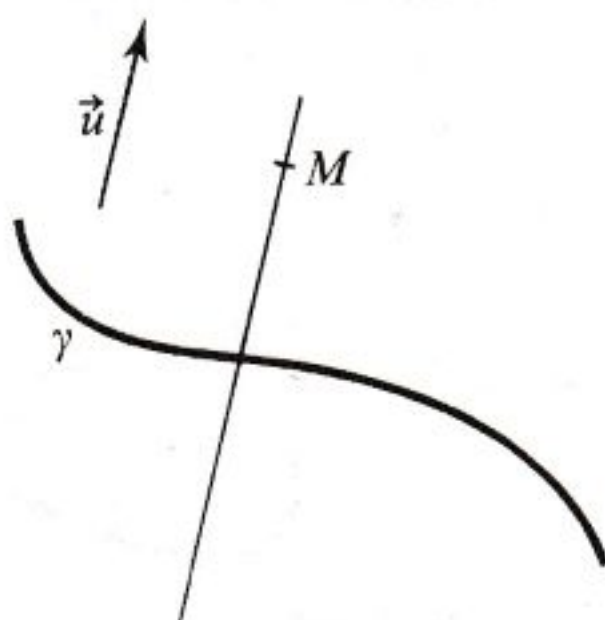


Figura 9.

Cuando los datos son suficientemente regulares, resulta fácil ver que las nociones de *superficie cilíndrica* y de *hoja parametrizada cilíndrica* pueden identificarse localmente. Para fijar ideas, supondremos en lo que sigue que todas las funciones que intervienen son de clase C^1 .

En efecto, consideremos en primer lugar el *cilindro* \mathcal{S} de ecuación (1), y sea $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ tal que se tenga:

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0).$$

Para fijar ideas, supongamos $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Según el teorema IV.3.2 del tomo 2 existen, entonces, un entorno V del punto (x_0, y_0) en \mathbf{R}^2 y una función numérica φ de clase C^1 sobre un intervalo I de \mathbf{R} , tales que la relación $((x, y) \in V$ y $f(x, y) = 0)$ es equivalente a: $(x \in I$ y $y = \varphi(x))$. La parte del cilindro \mathcal{S} definida por la restricción de f a V es entonces la imagen de la *hoja parametrizada cilíndrica* definida por la aplicación $(t, \lambda) \mapsto P(t, \lambda)$, donde $P(t, \lambda)$ designa el punto de coordenadas $(x = t, y = \varphi(t), z = \lambda)$.

Inversamente, consideremos la hoja parametrizada cilíndrica definida por (3), y sea $t_0 \in I$ tal que el vector derivado $dM/dt(t_0)$ sea *no paralelo* a \vec{u} ; elijamos un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que $\vec{k} = \vec{u}$. En este sistema de referencia la aplicación (3) queda definida mediante ecuaciones de la forma:

$$(4) \quad x = a(t), \quad y = b(t), \quad z = c(t) + \lambda \quad (t \in I, \quad \lambda \in \mathbf{R})$$

y se tiene, por hipótesis: $(a'(t_0), b'(t_0)) \neq (0, 0)$.

Según la teoría de la eliminación (véase tomo 2 p. 298) existe entonces un subintervalo abierto I_0 de I , tal que el soporte del arco plano definido por la parametrización.

$$x = a(t), \quad y = b(t) \quad (t \in I_0)$$

admite una ecuación cartesiana de la forma $f(x, y) = 0$, siendo la función f de clase C^1 sobre un entorno del punto $(a(t_0), b(t_0))$. La subhoja cilíndrica definida por la restricción de (3) a $I_0 \times \mathbf{R}$, admite entonces como imagen la *superficie cilíndrica* de ecuación $f(x, y) = 0$.

En los ejercicios III.26 a III.28, veremos la manera de determinar una ecuación cartesiana local de un cilindro conociendo una directriz y la dirección de sus generatrices, y veremos también como se pueden definir los cilindros *circunscritos* a una superficie dada.

Superficies cónicas

Recordemos que un **cono simétrico** de E es una parte S de E tal que las relaciones $\vec{u} \in S$ y $\lambda \in \mathbf{R}^*$ implican $\lambda \vec{u} \in S$: un tal conjunto S puede contener o no el origen (véase tomo 2, § VI.2). Diremos para abreviar que una función numérica f es **homogénea** si su conjunto de definición U es un cono simétrico de E y si existe un entero $r \in \mathbf{Z}$ que verifica:

$$(\forall \vec{u} \in U, \forall \lambda \in \mathbf{R}^*), \quad f(\lambda \vec{u}) = \lambda^r f(\vec{u})$$

Siendo esto así, diremos que una parte \mathcal{S} de \mathcal{E} es una **superficie cónica**, o simplemente un **cono**, si existe un punto O de \mathcal{E} y una función derivable y homogénea $f: U \rightarrow \mathbf{R}$, donde U es un cono abierto simétrico de E , tales que \mathcal{S} sea el conjunto de los puntos M de \mathcal{E} que verifican

$$(5) \quad f(\overrightarrow{OM}) = 0.$$

Al punto O se le da el nombre de **vértice** del cono. Es evidente que \mathcal{S} es una reunión de rectas que pasan por O (de las que eventualmente se ha excluido el punto O): estas rectas reciben el nombre de **generatrices** del cono.

Elijamos un sistema de referencia $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de origen O y pongamos:

$$f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \varphi(x, y, z).$$

En el sistema de referencia \mathcal{R}_0 , el cono \mathcal{S} viene definido mediante la ecuación cartesiana

$$(6) \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

siendo la función φ derivable y homogénea sobre un cono abierto simétrico de \mathbf{R}^3 .

Sea entonces \mathcal{R} un sistema de referencia afín cualquiera; las coordenadas (x, y, z)

de un punto M respecto a \mathcal{R}_0 son funciones afines de sus nuevas coordenadas (ξ, η, ζ) respecto a \mathcal{R} , o sea:

$$x = P(\xi, \eta, \zeta), \quad y = Q(\xi, \eta, \zeta), \quad z = R(\xi, \eta, \zeta),$$

de donde la ecuación de \mathcal{S} respecto a \mathcal{R} es

(7)

$$\boxed{\varphi(P, Q, R) = 0}.$$

Recíprocamente, sean P, Q, R funciones *afines* tales que los planos de ecuaciones $P = 0, Q = 0, R = 0$ tengan un punto común único Ω , y sea φ una función numérica homogénea y derivable sobre un cono abierto simétrico de \mathbf{R}^3 . Mediante un cambio apropiado del sistema de referencia, se ve que el conjunto definido, en un sistema de referencia cualquiera \mathcal{R} por la ecuación cartesiana (7), es una *superficie cónica* de vértice Ω .

En un sistema de referencia cualquiera \mathcal{R} , se reconoce pues una superficie cónica en que admite una ecuación cartesiana de la forma (7), siendo la función φ homogénea.

Observemos que si los planos de ecuaciones $P = 0, Q = 0, R = 0$ tuvieran una recta común, el conjunto definido por (7) sería una *superficie cilíndrica*.

Sea como antes \mathcal{S} una superficie cónica de vértice O . Todo plano \mathcal{P} que no pasa por O y que corta a todas las generatrices de \mathcal{S} recibe el nombre de *plano de base* del cono, y la sección Γ de \mathcal{S} por un tal plano \mathcal{P} (si tal sección existe) recibe el nombre de *base* del cono \mathcal{S} . Entonces \mathcal{S} es la reunión de las rectas que pasan por O y que cortan a Γ (de las que eventualmente se considera excluido el punto O) (véase la figura 10).

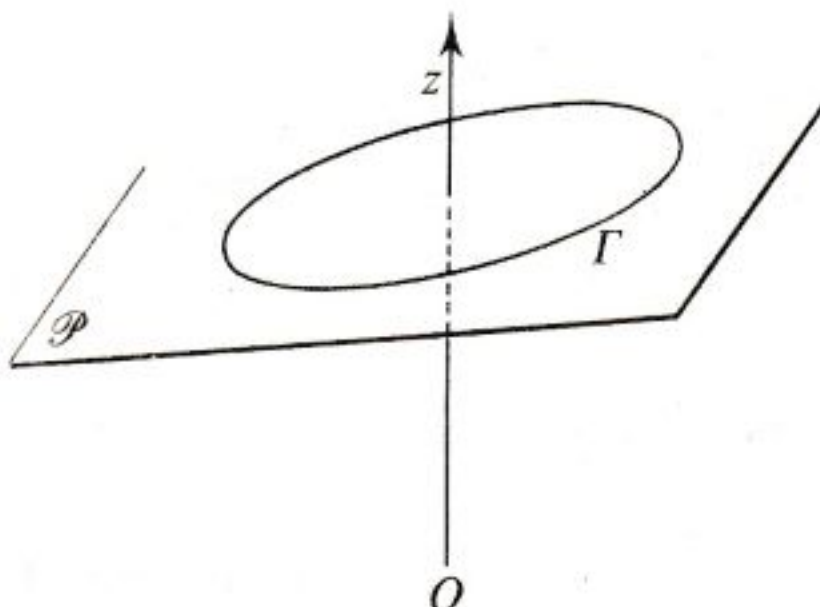


Figura 10.

Si \mathcal{P} es un plano de base de \mathcal{S} , existe un sistema de referencia de origen O en el cual \mathcal{P} es el plano de ecuaciones $z = 1$; si \mathcal{S} está definido, con relación a este

sistema de referencia, mediante la ecuación cartesiana (6), entonces la base correspondiente Γ es la curva de ecuaciones $z = 1$, $\varphi(x, y, 1) = 0$.

Observemos que una superficie cónica dada no tiene por qué admitir planos de base; pero se la puede considerar siempre como reunión de superficies cónicas que admiten planos de base.

Hojas cónicas

Por definición, una *hoja parametrizada cónica* es una aplicación de la forma

$$I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \lambda) \mapsto O + \lambda \vec{u}(t)$$

donde I designa un intervalo de \mathbf{R} , O un punto fijo de \mathcal{E} y $t \mapsto \vec{u}(t)$ una función derivable en I , con valores en $E \setminus \{O\}$.

La curva γ definida mediante la parametrización $t \mapsto O + \vec{u}(t)$ recibe el nombre de **directriz** de la hoja, y el punto O es el **vértice** de la hoja (véase la figura 11).



Figura 11.

Haciendo el mismo tipo de razonamiento que en el caso de los cilindros, se puede demostrar que, con ciertas condiciones de regularidad, la imagen de una hoja cónica es una reunión de superficies cónicas, e inversamente, toda superficie cónica es una reunión de imágenes de hojas cónicas.

En particular, sea \mathcal{S} una superficie cónica de vértice O que admite un plano de base, tal que la base correspondiente Γ pueda ser parametrizada globalmente, entonces \mathcal{S} es la imagen de una hoja cónica parametrizada de vértice O y de directriz Γ . En este caso los dos puntos de vista coinciden. Veremos que así ocurre para superficies cónicas de *segundo grado*, definidas mediante una ecuación cartesiana de la forma (6), donde φ designa una forma cuadrática de rango 3 sobre \mathbf{R}^3 no definida (ni positiva, ni negativa).

En los ejercicios III.27 y III.28 veremos como se puede determinar una ecuación cartesiana local de la superficie cónica de vértice y de directriz dados, y de la superficie cónica de vértice dado *circunscrita* a una superficie dada.

Conoides

Una parte \mathcal{S} de \mathcal{E} se dirá que es un **conoide**, si existe un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en el cual \mathcal{S} esté definida mediante una ecuación cartesiana de la forma:

$$(8) \quad f(x, y, z) = 0,$$

donde $f: U \times I \rightarrow \mathbf{R}$ designa una función numérica derivable definida sobre el producto de un cono simétrico U de \mathbf{R}^2 por un intervalo de I de \mathbf{R} , tal que, para cada $z \in I$, la función $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ sea *homogénea* en U .

Si en la ecuación (8) se puede despejar z , se obtiene una ecuación de la forma

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ó} \quad z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

según que se suponga $x \neq 0$ o $y \neq 0$.

Sea (x_0, y_0, z_0) una terna que verifique (8). Entonces, para todo $\lambda \in \mathbf{R}^*$, la terna $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ sigue verificando (8), y si se supone $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, se deduce que la recta de ecuaciones paramétricas

$$x = \lambda x_0, \quad y = \lambda y_0, \quad z = \lambda z_0 \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

está contenida en \mathcal{S} , y por lo tanto \mathcal{S} es la reunión de una familia de rectas, a las que se denomina **generatrices** del conoide. Por cada punto de \mathcal{S} no situado en Oz , pasa una generatriz y sólo una. Las generatrices de \mathcal{S} son paralelas al plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$ y cortan al segmento $(x = y = 0, z \in I)$ del eje Oz . La recta Oz recibe el nombre de *eje* del conoide (véase la figura 12).

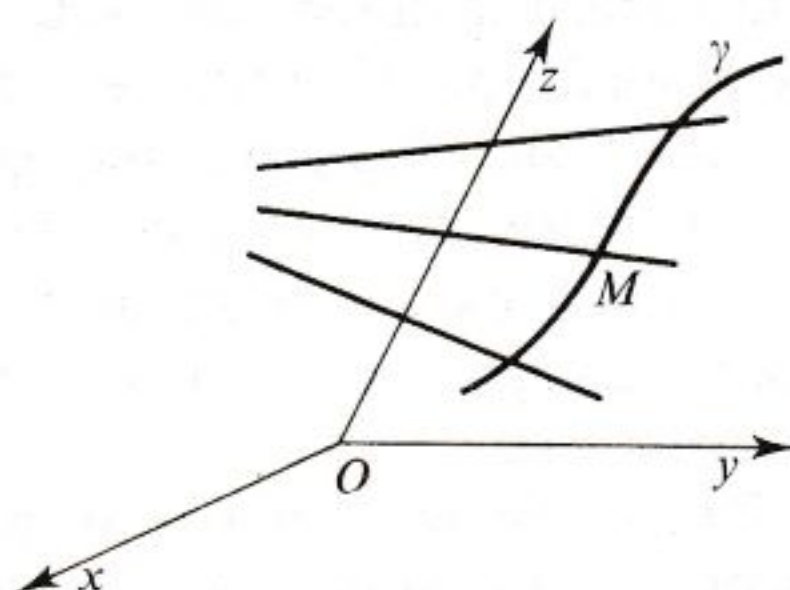


Figura 12.

Si \mathcal{E} se halla provisto de una estructura euclídea y si existe un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que verifique las condiciones enunciadas, se dice que el conoide es **recto**.

Ejemplos

1. En un sistema de referencia ortonormal, la ecuación

$$z(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$$

define un conoide recto, denominado **conoide de Plücker**. Su eje es la recta Oz .

2. En un sistema de referencia afín, la ecuación $z = xy$ define una superficie que se puede considerar como un conoide de dos maneras, según que se la considere como reunión de las rectas de ecuaciones

$$x = \lambda, \quad z = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

o de las rectas de ecuaciones

$$y = \lambda, \quad z = \lambda x \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Más adelante veremos que esta superficie es un *paraboloide hiperbólico*.

Volvamos al caso general de un conoide definido mediante la ecuación (8) en un sistema de referencia \mathcal{R}_0 . En un sistema de referencia afín cualquiera \mathcal{R} , este conoide viene definido mediante una ecuación de la forma

$$(9) \quad f(P, Q, R) = 0$$

donde P, Q, R designan funciones *afines* tales que los planos de ecuaciones $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ tienen un punto común único.

Recíprocamente, toda ecuación de la forma (9) donde f designa una función numérica derivable, homogénea respecto a las dos primeras variables, define un conoide.

Hojas conoides

Supongamos dados una recta \mathcal{D} de \mathcal{E} , un plano \mathcal{P} no paralelo a \mathcal{D} y un arco parametrizado γ de \mathcal{E} definido mediante $t \mapsto M(t)$, ($t \in I$). Resulta fácil construir una parametrización del conjunto \mathcal{S} formado por la reunión de las rectas paralelas al plano \mathcal{P} y que cortan a \mathcal{D} y γ (véase la figura 12).

En efecto, tomemos un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que \mathcal{D} sea la recta

de ecuaciones $x = y = 0$ y que \mathcal{P} sea el plano $z = 0$. Si $(a(t), b(t), c(t))$ son las coordenadas del punto $M(t)$ en este sistema de referencia, se ve que \mathcal{S} es la imagen de la aplicación $I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}$, que aplica el par (t, λ) sobre el punto de coordenadas:

$$(10) \quad x = \lambda a(t), \quad y = \lambda b(t), \quad z = c(t).$$

La aplicación (10) recibe el nombre de *hoja conoide* definida por γ , \mathcal{D} y \mathcal{P} ; la curva γ se dice que es una *directriz* de esta hoja.

Lo mismo que para los cilindros y los conos, se puede demostrar que los conceptos de *superficie conoide* y *hoja conoide* se reducen localmente uno a otro cuando se dan ciertas condiciones de regularidad.

§ III.6 ESFERAS (EN DIMENSIÓN 3)

● A partir de ahora y hasta el fin de este capítulo, designamos por \mathcal{E}_3 un **espacio afín euclídeo** de dimensión 3 y por E_3 el espacio vectorial asociado.

El estudio de las *esferas* de \mathcal{E}_3 es análogo al de las circunferencias del plano euclídeo; no lo vamos a repetir en detalle sino que nos limitaremos a indicar los resultados más útiles en la práctica.

Ecuaciones de una esfera

En un sistema de referencia ortonormal, la esfera de centro I y de radio $R \geq 0$ se define mediante la ecuación cartesiana llamada *normal*:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \gamma = 0$$

donde (a, b, c) son las coordenadas de I y donde se ha puesto:

$$\gamma = a^2 + b^2 + c^2 - R^2.$$

Recíprocamente, si a, b, c, γ son cuatro reales que verifican $a^2 + b^2 + c^2 - \gamma \geq 0$, la ecuación (1) define una esfera que se reduce a una *esfera-punto* si (y solamente si) $a^2 + b^2 + c^2 - \gamma = 0$.

Consideremos el caso en el que (1) es la ecuación normal de una esfera Σ de centro I y de radio R y pongamos para todo punto M de coordenadas (x, y, z) :

$$S(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \gamma = IM^2 - R^2.$$

El número $S(M)$ (que es independiente del sistema de referencia elegido) recibe el nombre de **potencia del punto M** respecto a la esfera Σ . Admite interpretaciones geométricas análogas al caso plano (véase § 1).

Recordemos por otra parte que la esfera Σ admite la parametrización definida por las ecuaciones:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= R \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, & y &= R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= R \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \end{aligned}$$

los números (θ, φ) reciben el nombre de *coordenadas esféricas* (o geográficas) del punto M : θ es su *colatitud*, φ es su *longitud*.

Esfera que pasa por cuatro puntos

Razonando lo mismo que en el § 1 se ve que *por cuatro puntos no coplanares de \mathcal{E}_3 pasa una esfera y solo una.*

Intersección con un plano

La intersección de la esfera Σ definida mediante la ecuación (1) y el plano \mathcal{P} definido por la ecuación

$$ux + vy + wz + h = 0$$

se estudia exactamente de la misma manera que la de una circunferencia y una recta de \mathcal{E}_2 , calculando la distancia de I a \mathcal{P} .

- si $(ua + vb + wc + h)^2 - R^2(u^2 + v^2 + w^2) > 0$, entonces $\Sigma \cap \mathcal{P}$ es vacío;
- si $(ua + vb + wc + h)^2 - R^2(u^2 + v^2 + w^2) \leq 0$, el conjunto $\Sigma \cap \mathcal{P}$ es la circunferencia de centro H y de radio $\sqrt{R^2 - d^2}$, donde H designa la proyección ortogonal de I sobre \mathcal{P} y $d = IH$ la distancia de I a \mathcal{P} .

Observemos que la intersección de Σ con un plano que pasa por I es una circunferencia de centro I y de radio R . De una tal circunferencia se dice que es una *circunferencia máxima* de Σ .

- si $(ua + vb + wc + h)^2 - R^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$,

el conjunto $\Sigma \cap \mathcal{P}$ se reduce a un punto A y la recta IA es ortogonal a \mathcal{P} ; se dice entonces que el plano \mathcal{P} es **tangente** a Σ en el punto A . Este término se justificará más adelante (§ 11) cuando se defina el plano tangente a un conjunto.

Intersección con una recta

Para estudiar la intersección de la esfera Σ con una recta \mathcal{D} , se utiliza una representación paramétrica de \mathcal{D} , ya sea baricéntrica, ya sea afín. Sustituyendo en (1) la parametrización de \mathcal{D} se obtiene una ecuación de grado 2 (o de grado ≤ 1 en casos particulares) respecto al parámetro.

La determinación de los puntos comunes a \mathcal{D} y Σ se reduce a la de los puntos comunes a \mathcal{D} y a la circunferencia máxima sección de Σ por un plano que contiene a I y \mathcal{D} . Designando por d la distancia de I a \mathcal{D} , se ve así que \mathcal{D} corta a Σ en dos puntos distintos si $d < R$, en un solo punto si $d = R$ y que $\mathcal{D} \cap \Sigma$ es vacío si $d > R$.

Cuando \mathcal{D} y Σ tienen un solo punto común A , la recta \mathcal{D} es ortogonal en A al radio IA , y se dice entonces que \mathcal{D} es una *tangente* a Σ en A , pudiendo justificarse este término mediante una definición general de las tangentes a un conjunto (§ 11).

Cuando se utiliza una parametrización de \mathcal{D} se reconoce que \mathcal{D} es tangente a Σ en que la ecuación en las intersecciones tiene una *raíz doble*.

Si solamente se está interesado en la naturaleza del conjunto $\mathcal{D} \cap \Sigma$, se puede también calcular d con ayuda de las técnicas expuestas en el § II.8.

Tangentes trazadas desde un punto a una esfera

Sea como siempre Σ la esfera de ecuación normal (1) y sea \mathcal{D} la recta definida mediante la parametrización baricéntrica

$$x = \frac{tx_0 + x_1}{t + 1}, \quad y = \frac{ty_0 + y_1}{t + 1}, \quad z = \frac{tz_0 + z_1}{t + 1}$$

(recta que une el punto M_0 , de coordenadas (x_0, y_0, z_0) con el punto M_1 , de coordenadas (x_1, y_1, z_1)).

La ecuación en las intersecciones de \mathcal{D} y Σ se escribe entonces:

$$(3) \quad S(M_0) t^2 + 2 P_{\Sigma}(M_0, M_1) t + S(M_1) = 0$$

donde se ha puesto:

$$(4) \quad P_{\Sigma}(M_0, M_1) = x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1 - a(x_0 + x_1) - b(y_0 + y_1) - c(z_0 + z_1) + \gamma = \overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{IM_1} - R^2.$$

Se ve que la recta \mathcal{D} es tangente a Σ si, y solamente si, se tiene:

$$P_{\Sigma}^2(M_0, M_1) - S(M_0) S(M_1) = 0.$$

Los puntos de contacto de Σ con las tangentes trazadas desde M_0 son los puntos M que verifican

$$(5) \quad S(M) = 0 \quad \text{y} \quad P_{\Sigma}(M_0, M) = 0.$$

Lo mismo que en el caso plano, se ve que el número $P_{\Sigma}(M_0, M_1)$ depende sólo de M_0 , M_1 y Σ y no del sistema de referencia elegido; se tiene en efecto:

$$\begin{aligned} P_{\Sigma}(M_0, M_1) &= \overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{IM_1} - R^2 \\ &= 2 S(\tfrac{1}{2} \cdot M_0 + \tfrac{1}{2} \cdot M_1) - \tfrac{1}{2} S(M_0) - \tfrac{1}{2} S(M_1). \end{aligned}$$

Si $M_0 \neq I$, la ecuación $P_{\Sigma}(M_0, M) = 0$ define un plano ortogonal a la recta IM_0 denominado **plano polar** de M respecto a Σ . La distancia de I a este plano es $d = R^2/IM_0$, de donde la discusión siguiente:

a) Si $M_0 = I$, se tiene $P_{\Sigma}(M_0, M) = -R^2$ para todo punto M y no existe ningún punto M que verifique (5).

b) Si $M_0 \neq I$ y si M_0 es interior a Σ , su plano polar no corta a Σ .

No existe por lo tanto ninguna tangente a Σ que pase por un punto interior a Σ .

c) Si $M_0 \in \Sigma$, su plano polar es tangente a Σ en M_0 . En este caso las únicas tangentes trazadas desde M_0 a Σ son las rectas que pasan por M_0 y están contenidas en el plano tangente a Σ en M_0 .

d) Si M_0 es exterior a Σ , su plano polar corta a Σ según una circunferencia Γ de radio no nulo y toda recta que una M_0 con un punto de Γ es tangente a Σ : las tangentes a Σ que pasan por M_0 forman un cono de ecuación:

$$(6) \quad P_{\Sigma}^2(M_0, M) - S(M_0) S(M) = 0,$$

y el conjunto de los puntos de contacto es la circunferencia Γ . Se trata de un cono de segundo grado. Veremos más adelante que se trata de un cono de revolución de eje IM_0 . Este cono se dice que es *circunscrito* a Σ a lo largo de Γ (véase la figura 13).

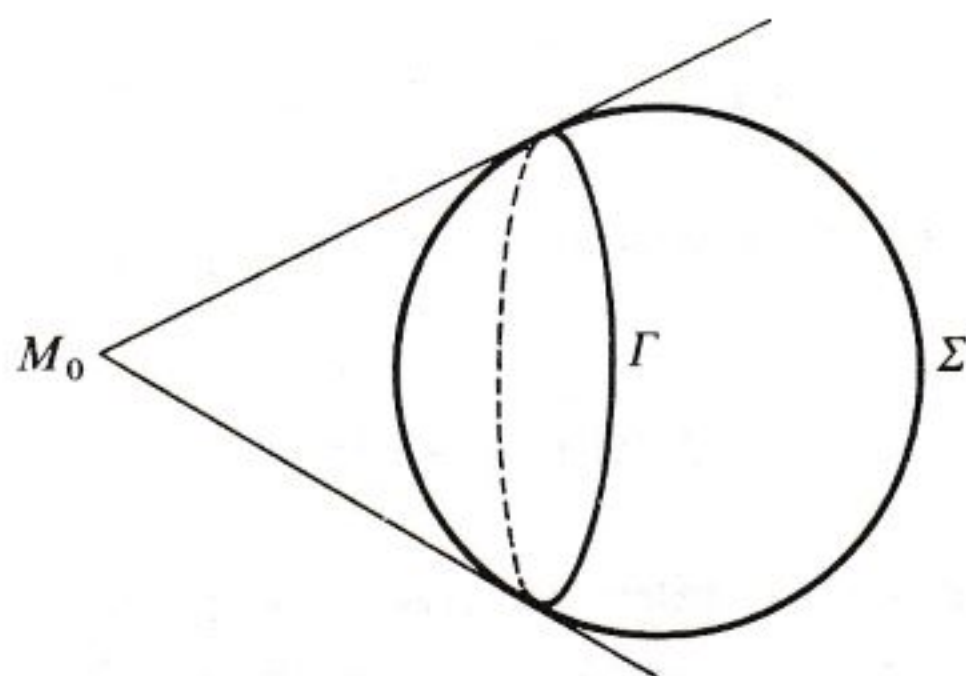


Figura 13.

Puntos conjugados

Se dice que dos puntos M_0, M_1 son **conjugados** respecto a la esfera Σ si se tiene

$$P_{\Sigma}(M_0, M_1) = 0.$$

Si $M_0 = I$, el conjunto de los puntos conjugados de M_0 es vacío. Si $M_0 \neq I$, el conjunto de los puntos conjugados de M_0 es su *plano polar*.

Cuando la recta (M_0M_1) corta a Σ en dos puntos distintos P, Q , la relación « M_0 y M_1 son conjugados respecto a Σ » equivale a: «la cuaterna (M_0, M_1, P, Q) es *armónica*».

Rectas polares

Sea \mathcal{D} una recta cualquiera que no pase por I , definida mediante una parametrización afín $t \mapsto M(t) = M_0 + t\vec{u}$ ($t \in \mathbf{R}$), y para cada $t \in \mathbf{R}$, sea $\mathcal{P}(t)$ el plano polar del punto $M(t)$. Se ve fácilmente que los planos $\mathcal{P}(t)$ forman un *haz lineal* de planos que tienen una recta Δ común. La recta Δ es entonces la intersección de los planos polares de dos puntos cualesquiera de \mathcal{D} , y es el conjunto de los puntos de \mathcal{E}_3 que son *conjugados de todos los puntos de \mathcal{D}* .

Esta propiedad hace ver que la relación entre \mathcal{D} y Δ es *simétrica*. Los planos polares de los puntos de Δ constituyen pues un haz de eje \mathcal{D} .

Se dice que las rectas \mathcal{D} y Δ son *polares* la una respecto de la otra, o que son *polares recíprocas*.

Plano radical, eje radical, centro radical

Sean Σ y Σ' dos esferas distintas de ecuaciones normales respectivas:

$$S(M) = 0, \quad S'(M) = 0.$$

Los puntos M que tienen la *misma potencia* respecto a Σ y Σ' son los que verifican

$$(7) \quad S(M) - S'(M) = 0.$$

Si Σ y Σ' son concéntricas, tales puntos no existen. Si Σ y Σ' *no son concéntricas*, la ecuación (7) define un plano perpendicular a la recta de los centros I, I' , denominado **plano radical** de Σ y Σ' .

Sea Σ'' una tercera esfera de ecuación normal $S''(M) = 0$, tal que los centros I, I', I'' de las esferas $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ no estén alineados. Los planos de ecuaciones respectivas

$$S' - S'' = 0, \quad S'' - S = 0, \quad S - S' = 0$$

pertenecen a un haz de planos no paralelos, cuyo eje Δ recibe el nombre de **eje radical** de las tres esferas $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$. Esta recta Δ es ortogonal al plano \mathcal{P} que contiene los centros de las esferas y corta a \mathcal{P} en el centro radical de las circunferencias $\mathcal{P} \cap \Sigma, \mathcal{P} \cap \Sigma', \mathcal{P} \cap \Sigma''$. La recta Δ es el conjunto de los puntos que tienen *igual potencia* respecto a las tres esferas, $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$.

Finalmente, sea Σ''' una cuarta esfera tal que los centros de las cuatro esferas sean *no coplanares*. Existe entonces un punto único Ω que tiene la misma potencia respecto a las cuatro esferas, es decir que verifica:

$$S(\Omega) = S'(\Omega) = S''(\Omega) = S'''(\Omega).$$

Este punto recibe el nombre de **centro radical** de las cuatro esferas. Es la intersección de los seis planos radicales de estas esferas tomadas dos a dos, o de los cuatro ejes radicales de estas esferas tomadas tres a tres.

Esferas ortogonales

Se dice que dos esferas Σ, Σ' de centros I, I' son **ortogonales**, si son secantes y si en cada uno de sus puntos comunes M , sus planos tangentes son perpendiculares. Equivale a decir que las rectas (IM) e $(I'M')$ son ortogonales, y esto tiene lugar si, y solamente si, los radios R, R' de estas esferas verifican

$$II'^2 = R^2 + R'^2.$$

Se tiene inmediatamente: para que dos esferas Σ, Σ' sean *ortogonales*, es necesario y suficiente que, para todo punto $M \in \Sigma \cap \Sigma'$, el plano tangente a Σ en M [resp. el plano tangente a Σ' en M] pase por I' [resp. pase por I].

Si se designan por

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \gamma = 0$$

y por

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + \gamma' = 0$$

las ecuaciones normales de dos esferas, una condición necesaria y suficiente de ortogonalidad es:

$$2(aa' + bb' + cc') = \gamma + \gamma'.$$

Haces y redes de esferas

a) Sean Σ_1, Σ_2 dos esferas distintas, de ecuaciones normales respectivas

$$S_1(M) = 0, \quad S_2(M) = 0.$$

El **haz** de esferas engendrado por S_1 y S_2 es el conjunto de las esferas que admiten una ecuación cartesiana de la forma:

$$\lambda_1 S_1(M) + \lambda_2 S_2(M) = 0 \quad (\lambda_1 \in \mathbf{R}, \lambda_2 \in \mathbf{R}) \quad \text{con} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$$

b) Sea Σ_3 una tercera esfera, de ecuación normal $S_3(M) = 0$.

La **red** de esferas engendrada por $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ es el conjunto de las esferas que admiten una ecuación cartesiana de la forma:

$$\lambda_1 S_1(M) + \lambda_2 S_2(M) + \lambda_3 S_3(M) = 0 \quad \text{con} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0).$$

El estudio de los haces y de las redes de esferas es análogo al de los haces de circunferencias.

Observemos que las esferas ortogonales a todas las esferas de una red [resp. haz] de esferas constituyen un haz [resp. una red] de esferas.

§ III.7 CUÁDRICAS CON CENTRO

Sea O un punto de \mathcal{E}_3 y sea Q una *forma cuadrática* no nula sobre E_3 . Vamos a estudiar ⁽¹⁾ el conjunto \mathcal{S} de los puntos M de \mathcal{E}_3 que verifican

$$(1) \quad Q(\overrightarrow{OM}) = h,$$

donde h designa un real dado. Observaremos en primer lugar que \mathcal{S} tiene al punto O como *centro de simetría*.

Según el teorema II.1.1 se sabe que existe una *base ortonormal* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E_3 y números reales α, β, γ tales que

$$(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \quad Q(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2.$$

En el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ el conjunto \mathcal{S} se halla definido por la ecuación cartesiana

⁽¹⁾ Este estudio ha sido iniciado en el tomo 1 (§ XIII.7) en dimensión n cualquiera.

$$(2) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = h.$$

Si $h = 0$, \mathcal{S} queda reducida a $\{O\}$, o bien es un *cono* de vértice O (véase § 5); este caso se estudiará más adelante.

Suponiendo $h \neq 0$ se limita el estudio al caso en que $h > 0$, y pueden presentarse distintos casos:

a) Si Q es de rango 1, solamente uno de los números α, β, γ es distinto de cero, sea este, para fijar ideas, α . La ecuación (2) se reduce entonces a

$$\alpha x^2 = h.$$

Si $\alpha < 0$, el conjunto \mathcal{S} es vacío; si $\alpha > 0$, \mathcal{S} es la reunión de dos planos paralelos, de ecuaciones respectivas

$$x = \sqrt{\frac{h}{\alpha}}, \quad x = -\sqrt{\frac{h}{\alpha}}.$$

b) Si Q es de rango 2, podemos suponer $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ y $\gamma = 0$. En este caso la ecuación (2) se escribe

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = h$$

y define evidentemente un *cilindro* de generatrices paralelas al vector \vec{k} , o el conjunto vacío (véase § 5). Este caso se estudiará más adelante.

c) Si Q es de rango 3, se tiene $\alpha\beta\gamma \neq 0$ y, mediante un cambio evidente de notaciones, la ecuación (2) se reduce a la ecuación

$$(3) \quad \boxed{\varepsilon_1 \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_3 \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

con $\varepsilon_i = \pm 1$ para $i = 1, 2, 3$ y $a > 0, b > 0, c > 0$.

Lo que queda de este § está consagrado al estudio de este caso:

Definición III.7.1

De una parte \mathcal{S} del espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 se dice que es una **cuádrica con centro O** si es **no vacía** y si existe un sistema de referencia ortonormal de origen O en el cual \mathcal{S} admite una ecuación de la forma (3); un tal sistema de referencia se denomina **sistema de referencia principal de \mathcal{S}** y la ecuación (3) se denomina **ecuación reducida de \mathcal{S}** .

Se ve en efecto fácilmente que dos ecuaciones de la forma (3) sólo pueden definir el mismo conjunto no vacío cuando tienen los mismos coeficientes $a, b, c, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

La discusión que antecede muestra que el conjunto \mathcal{S} definido mediante la ecuación (1) es una cuádrica de centro O si (y solamente si) \mathcal{S} es no vacío, si $h \neq 0$ y si la forma cuadrática Q es de rango 3.

Para todo punto M de coordenadas (x, y, z) en el sistema de referencia principal considerado, pongamos:

$$F(M) = f(x, y, z) = \varepsilon_1 \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_3 \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Se ve entonces que el punto O es el único punto de \mathcal{E}_3 donde se anula la diferencial de F , y al ser $O \notin \mathcal{S}$, se tiene $(f'_x, f'_y, f'_z) \neq (0, 0, 0)$ en todo punto M de \mathcal{S} y por lo tanto \mathcal{S} no admite ningún punto singular (véase tomo 2, § VI.3).

Simetrías

Sea $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia principal de la cuádrica \mathcal{S} ; entonces el punto O es un *centro de simetría* de \mathcal{S} , y resulta fácil ver que es el único. Los ejes de coordenadas son *ejos de simetría* de \mathcal{S} , denominados *ejos principales*, y los planos coordenados son *planos de simetría*, denominados *planos principales*. Pero no son necesariamente los únicos ejes o planos de simetría de \mathcal{S} .

Consideremos en efecto la cuádrica \mathcal{S} , definida por la ecuación (2) con $\alpha\beta\gamma \neq 0, h > 0$ y \mathcal{S} no vacío. Se sabe que los números α, β, γ son los *valores propios* del operador simétrico σ asociado a la forma cuadrática Q y que los vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son vectores propios respectivamente asociados a estos valores propios. Si estos valores propios α, β, γ son *distintos*, los vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ quedan determinados de manera única, salvo el signo y el orden. En este caso, \mathcal{S} admite por lo tanto un único «triedro principal» (formado por sus ejes de simetría).

Si los valores propios α, β, γ no son distintos y si tenemos $\alpha = \beta$ con $\gamma \neq \alpha$, la ecuación (2) se convierte en:

$$\alpha(x^2 + y^2) + \gamma z^2 = h.$$

En este caso el conjunto \mathcal{S} es globalmente invariante en una rotación cualquiera de eje Oz , y se dice que es una **cuádrica de revolución** de eje Oz . Todo sistema de referencia deducido de $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ por una rotación de eje Oz sigue siendo un sistema de referencia principal de \mathcal{S} y la ecuación reducida de \mathcal{S} respecto a un tal sistema de referencia es la misma que en el sistema de referencia \mathcal{R} .

Finalmente, si se tiene $\alpha = \beta = \gamma$, la cuádrica \mathcal{S} se reduce a una *esfera* de

centro O ; en este caso, todo sistema ortonormal de origen O es un sistema principal de \mathcal{S} .

Discusión

El conjunto \mathcal{S} definido por la ecuación (3) es vacío si, y solamente si, se tiene $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. Tenemos pues que considerar tres casos según que entre los números ε_i , haya tres, dos o uno que sean iguales a $+1$.

Observemos que, en todos los casos, el conjunto \mathcal{S} es *cerrado* (ya que el primer miembro de (3) es una función continua de (x, y, z)).

Elipsoide

Cuando se tiene $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$, se dice que la \mathcal{S} definida por la ecuación (3) es un **elipsoide**. La ecuación de un elipsoide respecto a un sistema de referencia principal se escribe por lo tanto:

$$(4) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}.$$

Las secciones de \mathcal{S} por planos paralelos a los planos coordenados son elipses cuando no son vacías o están reducidas a puntos. Por ejemplo, la sección de \mathcal{S} por el plano $z = \lambda$ se halla definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{c^2}.$$

Es una elipse si $|\lambda| < c$, un punto si $|\lambda| = c$ o el conjunto vacío si $|\lambda| > c$.

Si se designa por R al mayor de los números a, b, c , se ve fácilmente que la relación (4) implica: $x^2 \leq R^2, y^2 \leq R^2, z^2 \leq R^2$, luego el conjunto \mathcal{S} está *acotado* y, puesto que es cerrado, es un *compacto* de \mathcal{E}_3 (véase la figura 14).

Esta observación, unida a la discusión del § III.4, permite demostrar que la sección de \mathcal{S} por un plano cualquiera es una elipse cuando no es vacía o está reducida a un punto.

Si a, b, c son distintos, \mathcal{S} sólo admite como planos de simetría los coordenados, que son los únicos *planos principales*, y no admite más ejes de simetría que los coordenados que son los únicos *ejes principales*.

Si dos de los números a, b, c son iguales, se puede (permutando las coordena-

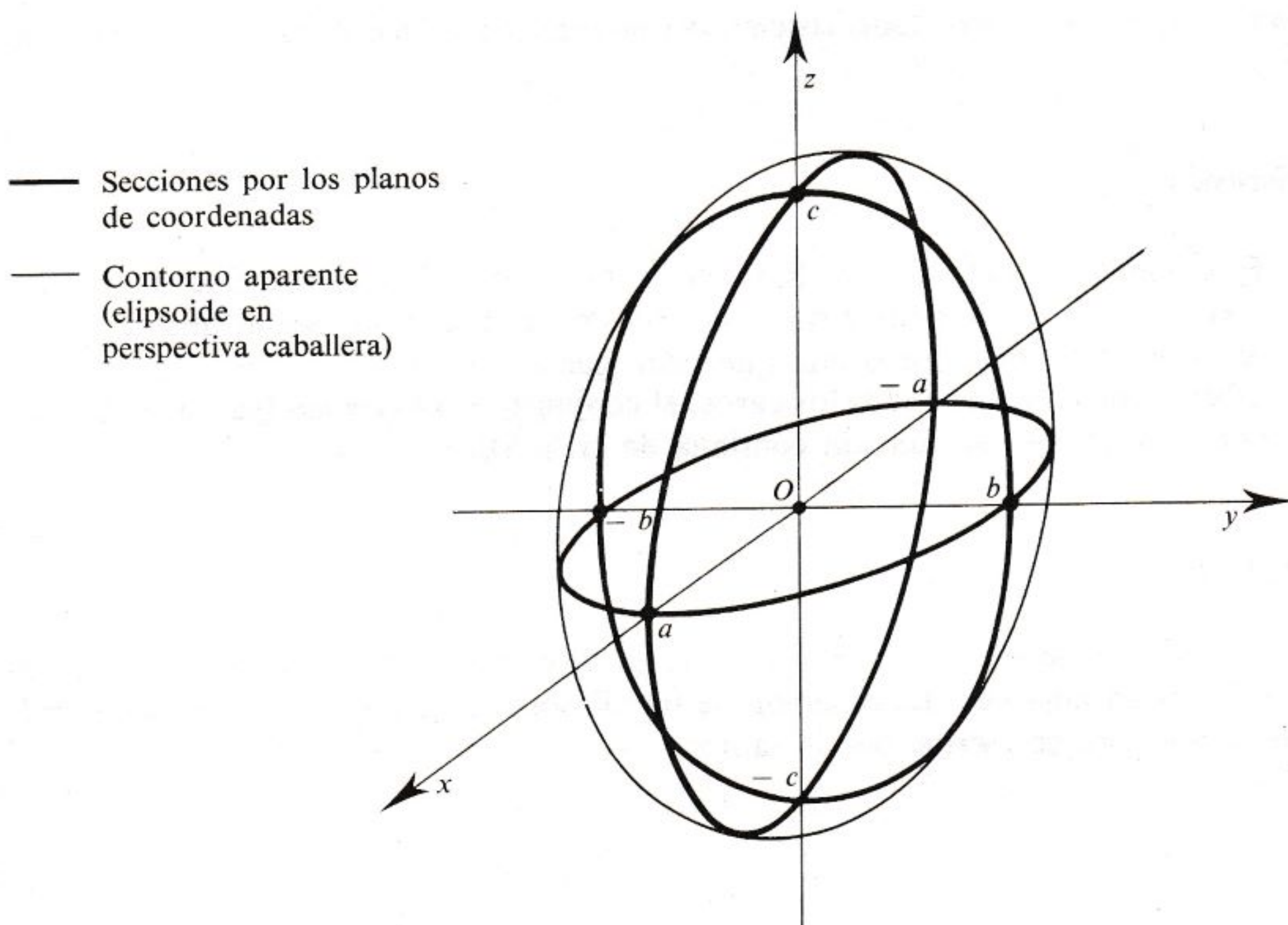


Figura 14.

das) suponer $a = b$ y $c \neq a$. Entonces \mathcal{S} es un *elipsoide de revolución* de eje Oz . Si $c > a$, se dice que es un *elipsoide alargado*; si $c < a$, se dice que es un *elipsoide aplanado* (véanse las figuras 15 y 16).

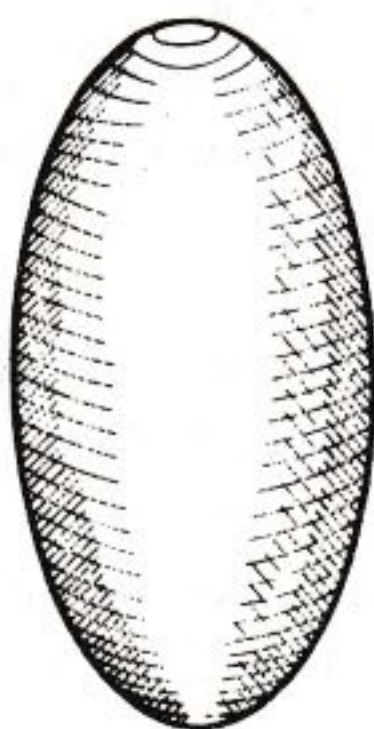


Figura 15.

Elipsoide
de revolución
alargado

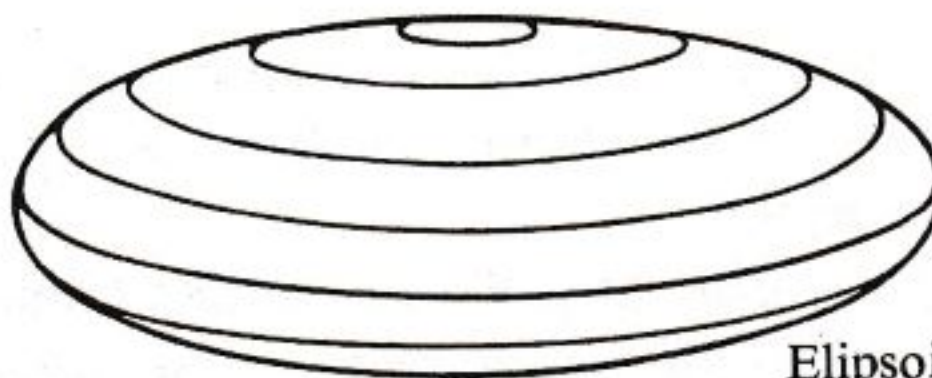


Figura 16.

Elipsoide de
revolución
aplanado

Si $a = b = c$, el elipsoide \mathcal{S} es una esfera de radio a .

Observemos que, en el caso general, el elipsoide de ecuación (4) se deduce de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ por la aplicación afín que asocia el punto de coordenadas (ax, by, cz) al punto M de coordenadas (x, y, z) .

Partiendo de la parametrización de Σ por medio de coordenadas esféricas, se obtiene la parametrización de \mathcal{S} definida por las relaciones:

$$x = a \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = b \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad z = c \cos \theta$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

El elipsoide \mathcal{S} aparece así como la imagen del rectángulo plano $\Delta: 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ por una aplicación continua: se deduce de ello que \mathcal{S} es *conexo* (puesto que Δ lo es), y se encuentra de nuevo el hecho de que \mathcal{S} es compacto (por serlo Δ).

Hiperboloides de dos hojas

Si en la ecuación (3), dos de los números ε_i son iguales a -1 , se dice que el conjunto \mathcal{S} definido por esta ecuación, es un **hiperboloide de dos hojas**. Permutando si es preciso las coordenadas, se puede reducir (3) a la ecuación

$$(5) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1}.$$

La sección de \mathcal{S} por el plano de ecuación $z = \lambda$ es una elipse para $|\lambda| > c$, el conjunto vacío para $|\lambda| < c$, y un punto para $|\lambda| = c$. En particular el plano $z = 0$ no corta a \mathcal{S} , por lo que \mathcal{S} es la reunión de los dos abiertos relativos disjuntos \mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_- constituidos respectivamente por los puntos de \mathcal{S} que verifican $z > 0$ y $z < 0$. De ello resulta que \mathcal{S} *no es conexo*.

Por otra parte, el conjunto \mathcal{S}_+ admite la parametrización:

$$x = a \operatorname{senh} u \cos v, \quad y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad z = c \cosh u \quad (u \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi),$$

mientras que \mathcal{S}_- admite la parametrización

$$x = a \operatorname{senh} u \cos v, \quad y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad z = -c \cosh u$$

Así pues \mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_- son las imágenes, por aplicaciones continuas, del conjunto plano conexo definido por $u \in \mathbf{R}, 0 \leq v \leq 2\pi$: son por lo tanto conjuntos *conexos*.

El conjunto \mathcal{S} admite pues dos componentes conexas \mathcal{S}_+ , \mathcal{S}_- , denominadas *hojas*; de donde el nombre de hiperboloide «de dos hojas» (véase la figura 17).

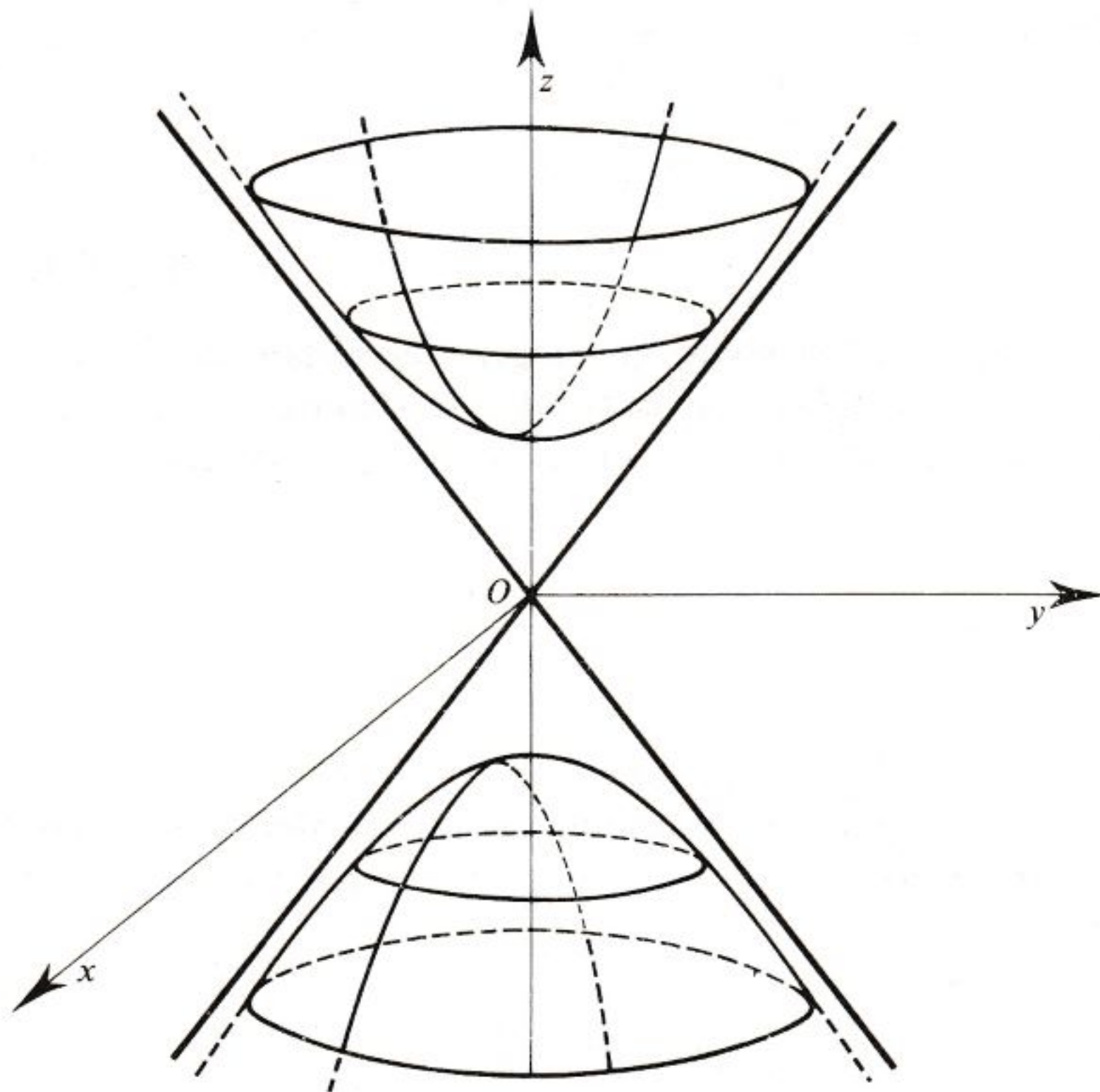


Figura 17.

Si $a \neq b$; \mathcal{S} no admite más planos de simetría que los planos coordenados y no admite más ejes de simetría que los ejes coordenados.

Si $a = b$, \mathcal{S} es una *cuádrica de revolución* de eje Oz .

Hiperboloide de una hoja

Si en la ecuación (3), uno solo de los números ε_i es igual a -1 , se dice que la cuádrica que define es un **hiperboloide de una hoja**. Mediante una permutación de coordenadas, se puede reducir al caso en que (3) es la ecuación:

$$(6) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Aquí, la intersección de \mathcal{S} con todo plano de ecuación $z = \lambda$ es una *elipse*. Las secciones por los planos $x = \text{Cte}$ o $y = \text{Cte}$ son *hipérbolas*.

El conjunto \mathcal{S} definido por (6) admite la parametrización:

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = b \cosh u \sin v, \quad z = c \sinh u \quad (u \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi);$$

es por lo tanto un conjunto *conexo* (véase la figura 18).

Para que \mathcal{S} sea de *revolución*, es necesario y suficiente que se tenga $a = b$.

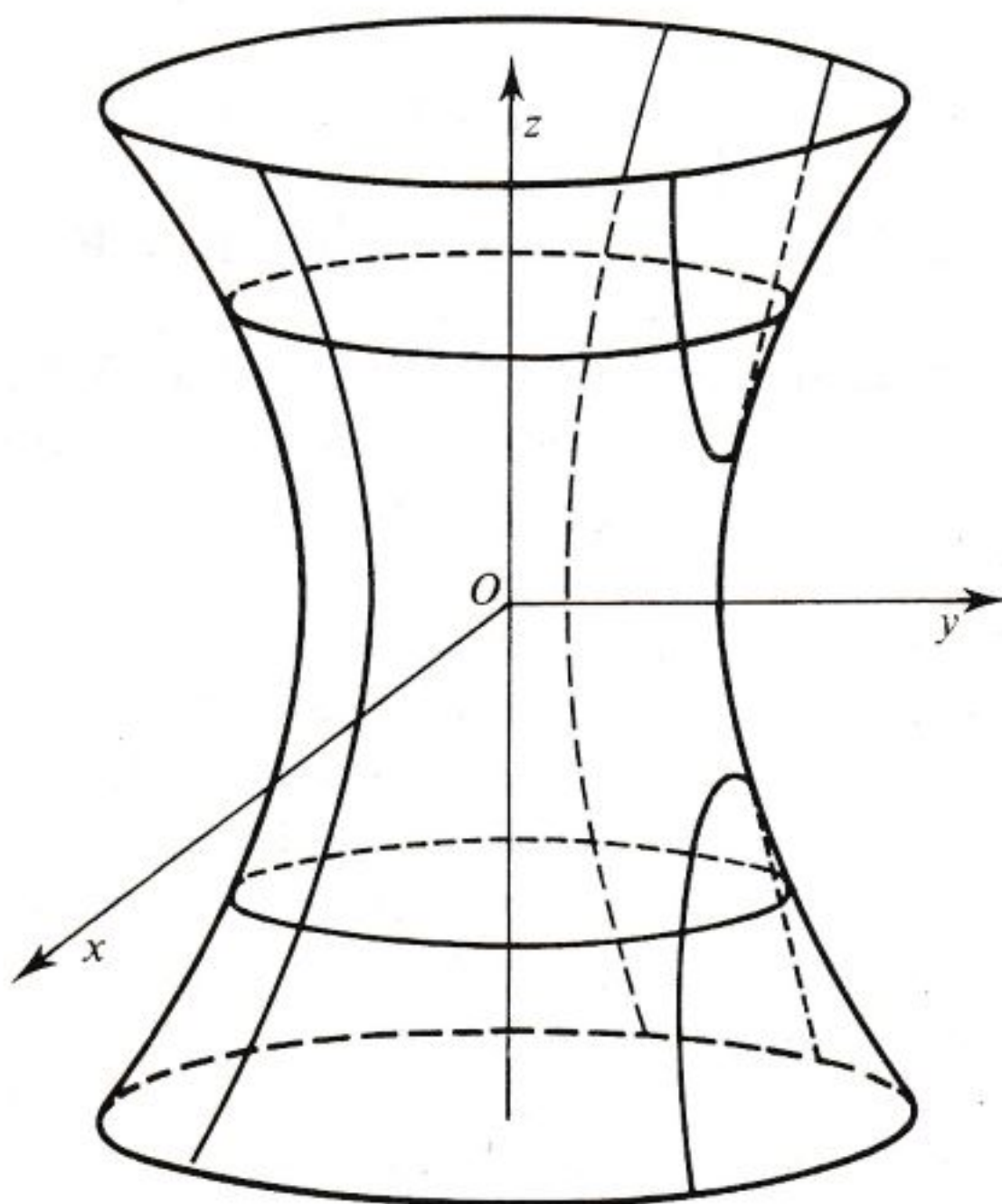


Figura 18.

Generatrices

La ecuación (6) puede ponerse en la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

o sea:

$$(7) \quad PQ = RS, \quad \text{con} \quad P = \frac{x}{a} - \frac{z}{b},$$

$$Q = \frac{x}{a} + \frac{z}{b}, \quad R = 1 - \frac{y}{b}, \quad S = 1 + \frac{y}{b}.$$

Para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ y todo $\mu \in \mathbf{R}$, de cada uno de los sistemas

$$(8) \quad P = \lambda R, \quad S = \lambda Q$$

$$(9) \quad P = \mu S, \quad R = \mu Q$$

se deduce (7). Ahora bien las ecuaciones (8) definen una recta afín \mathcal{D}_λ , y del mismo modo, las ecuaciones (9) definen una recta afín \mathcal{D}'_μ . Las rectas \mathcal{D}_λ y \mathcal{D}'_μ están por lo tanto contenidas en \mathcal{S} .

Están también contenidas en \mathcal{S} las rectas \mathcal{D}_∞ , definida por las ecuaciones $R = 0$, $Q = 0$, y \mathcal{D}'_∞ definida por $S = 0$, $Q = 0$.

Diremos que las rectas \mathcal{D}_λ y \mathcal{D}'_μ , donde $\lambda, \mu \in \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, son **generatrices** de \mathcal{S} .

La teoría de los haces de planos (§ I.14) muestra fácilmente que para todo $\lambda \in \tilde{\mathbf{R}}$ y todo $\mu \in \tilde{\mathbf{R}}$, las rectas \mathcal{D}_λ y \mathcal{D}'_μ son *coplanares*. Por otra parte, si $\lambda \neq \mu$, se demuestra que las rectas \mathcal{D}_λ y \mathcal{D}_μ no son coplanares y que las rectas \mathcal{D}'_λ y \mathcal{D}'_μ tampoco son coplanares.

Las dos familias de rectas $(\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda \in \tilde{\mathbf{R}}}$ y $(\mathcal{D}'_\mu)_{\mu \in \tilde{\mathbf{R}}}$ son por lo tanto distintas.

Cada una de ellas recibe el nombre de **sistema de generatrices** de \mathcal{S} . Dos generatrices distintas del mismo sistema son *no coplanares*, y dos generatrices de sistemas diferentes son *coplanares*. Se demuestra además fácilmente que *por cada punto de \mathcal{S} pasa una generatriz de cada sistema y solo una*. El conjunto \mathcal{S} es por lo tanto la reunión de las generatrices de cada sistema. Finalmente se demuestra con facilidad que \mathcal{S} no contiene otras rectas.

Observemos que una simetría respecto a O permuta los dos sistemas (a cada generatriz de uno de los sistemas, asocia la generatriz paralela del otro sistema). Del mismo modo una simetría respecto a un plano principal permuta los dos sistemas. Finalmente, una simetría respecto a un eje principal conserva cada sistema de generatrices.

En particular, si \mathcal{S} es de revolución (es decir si $a = b$), las generatrices de cada sistema se deducen de una de ellas por una rotación de eje Oz . En este caso \mathcal{S} es *pues la superficie de revolución engendrada por la rotación, alrededor del eje Oz , de una recta no coplanar con este eje* (véase la figura 19).

Superficies de segundo grado

Una parte \mathcal{S} del espacio afín \mathcal{E}_3 se dice que es una *superficie de segundo grado* si existe un sistema de referencia $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 en el cual \mathcal{S} admite una ecuación cartesiana de la forma

$$(10) \quad f(x, y, z) = 0$$

En la figura adjunta, hemos representado algunas generatrices de un hiperboloide de una hoja.

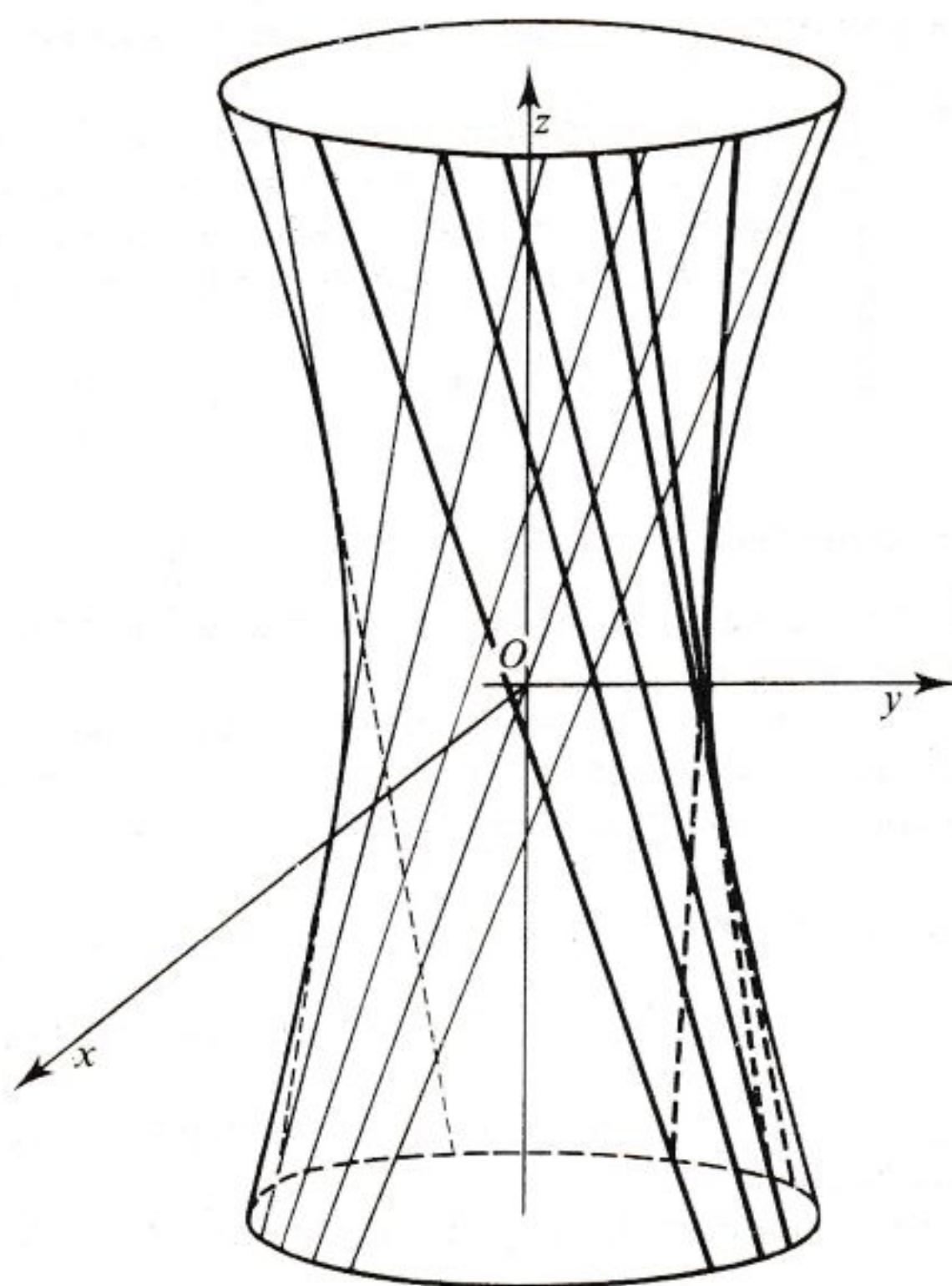


Figura 19.

donde f designa un polinomio de grado dos en el conjunto de las variables x, y, z .

Según la observación del final del § 1, el conjunto \mathcal{S} admite entonces una ecuación de la misma forma en todo sistema afín de referencia de \mathcal{E}_3 .

Para estudiar la naturaleza de \mathcal{S} , descompondremos f en:

$$(11) \quad f(x, y, z) = q(x, y, z) + f_1(x, y, z)$$

donde q designa un polinomio homogéneo de grado dos (por lo tanto una forma cuadrática en \mathbf{R}^3) y f_1 un polinomio de grado ≤ 1 (por lo tanto una función afín en \mathbf{R}^3).

Designemos por F la función numérica definida en \mathcal{E}_3 por $F(M) = f(x, y, z)$, para todo punto M de coordenadas (x, y, z) , e investiguemos si existe un punto Ω de \mathcal{E}_3 tal que F sea de la forma

$$(12) \quad F : M \mapsto Q(\overrightarrow{\Omega M}) - h, \quad \text{con } h = \text{Cte},$$

designando por Q una forma cuadrática en E_3 .

Si tal punto Ω existe, el conjunto \mathcal{S} viene definido por la ecuación

$$Q(\overrightarrow{\Omega M}) = h,$$

que es del tipo que acabamos de estudiar, y Ω es un centro de simetría de \mathcal{S} .

La proposición que sigue proporciona la solución de este problema:

III.7.1 Para que exista una forma cuadrática Q en E_3 tal que la función $M \mapsto F(M) - Q(\overrightarrow{\Omega M})$ se reduzca a una constante, es necesario y suficiente que la **diferencial** de F se **anule** en el punto Ω . Dicho de otro modo, es necesario y suficiente que las coordenadas (x_0, y_0, z_0) de Ω verifiquen el sistema de ecuaciones lineales

$$(13) \quad f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Demostración

a) La condición es evidentemente necesaria puesto que la diferencial de una forma cuadrática Q se anula en el origen.

b) Recíprocamente, sea Ω un punto de \mathcal{E}_3 tal que $DF_\Omega = 0$. Utilizando la expresión de F en el sistema de referencia dado, se ve que esta condición equivale al sistema (13). Aplicando a f la fórmula de Taylor hasta el orden 2, se obtiene (por ser f un polinomio de grado 2):

$$(\forall X, Y, Z \in \mathbf{R}) \quad f(x_0 + X, y_0 + Y, z_0 + Z) = f(x_0, y_0, z_0) + Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + \\ + \frac{1}{2}[X^2 f''_{xx} + Y^2 f''_{yy} + Z^2 f''_{zz} + 2YZf''_{yz} + 2ZXf''_{zx} + 2XYf''_{xy}],$$

habiendo tomado las derivadas de f en el punto (x_0, y_0, z_0) . (Las derivadas segundas son por otra parte constantes.)

Teniendo en cuenta (11) y (13) se deduce para todos los $X, Y, Z \in \mathbf{R}$:

$$f(x_0 + X, y_0 + Y, z_0 + Z) = f(x_0, y_0, z_0) + q(X, Y, Z).$$

con
$$q(X, Y, Z) = \frac{1}{2}[X^2 f''_{xx} + Y^2 f''_{yy} + Z^2 f''_{zz} + 2YZf''_{yz} + 2ZXf''_{zx} + 2XYf''_{xy}].$$

Para todo punto $M \in \mathcal{E}_3$, de coordenadas X, Y, Z en el sistema de referencia trasladado $(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se tiene pues

$$F(M) = F(\Omega) + q(X, Y, Z),$$

o sea

$$F(M) = F(\Omega) + Q(\overrightarrow{\Omega M}),$$

designando por Q la forma cuadrática definida en E_3 por

$$Q(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = q(X, Y, Z);$$

de donde se deduce el resultado. \square

Observación. Si el punto Ω de coordenadas (x_0, y_0, z_0) en \mathcal{R} , verifica (13), la demostración anterior muestra que el conjunto \mathcal{S} está definido, en el sistema de referencia trasladado $(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, por la ecuación cartesiana:

$$q(x, y, z) + f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

donde q designa la suma de los términos de segundo grado del polinomio f .

Discusión

Designemos por S el conjunto de los puntos Ω que verifican $DF_{\Omega} = 0$, es decir el conjunto definido por el sistema de ecuaciones cartesianas (13) en el sistema de referencia dado \mathcal{R} .

La teoría de las ecuaciones lineales muestra que S se reduce a un punto único si la forma cuadrática q es de rango máximo 3. Si q es de rango 2, S es una recta o el conjunto vacío, si q es de rango 1, S es un plano o el conjunto vacío.

Supongamos ahora que \mathcal{E}_3 sea un espacio afín *euclídeo*; una discusión análoga a la que se ha hecho para las cónicas, utilizando los resultados de este § y de los siguientes, permite entonces dar el siguiente enunciado:

● Si q es de rango 3 y si Ω designa el punto único que verifica (13), entonces:

- a) Si $\Omega \notin \mathcal{S}$, \mathcal{S} es el conjunto vacío o una cuádrica (elipsoide o hiperboloide) de centro Ω .
- b) Si $\Omega \in \mathcal{S}$, \mathcal{S} se reduce al punto Ω , o a un cono no degenerado de vértice Ω .

● Si q es de rango 2 y si S es no vacío, entonces S es una recta y:

- a) Si S no está contenido en \mathcal{S} , \mathcal{S} es el conjunto vacío o un cilindro no degenerado (elíptico o hiperbólico) de generatrices paralelas a S .
- b) Si S está contenido en \mathcal{S} , entonces \mathcal{S} se reduce a la recta S o a la reunión de dos planos que pasan por S .

● Si q es de rango 1 y si S es no vacío, entonces S es un plano y:

- a) Si S no está contenido en \mathcal{S} , \mathcal{S} es el conjunto vacío o la reunión de dos planos paralelos a S .
- b) Si S está contenido en \mathcal{S} , entonces \mathcal{S} se reduce al plano S .

Finalmente si S es vacío (es decir si las ecuaciones (13) son incompatibles), entonces \mathcal{S} es no vacío; se pueden distinguir dos casos:

- a) Si q es de rango 2, \mathcal{S} es un paraboloides (véase § 9).
- b) Si q es de rango 1, \mathcal{S} es un cilindro parabólico (véase § 9).

Observación. Por el estudio que antecede, resulta evidente que todo punto Ω de S es un centro de simetría del conjunto \mathcal{S} . Inversamente, se puede demostrar que, si \mathcal{S} es no vacío, todo centro de simetría de \mathcal{S} pertenece a S .

La discusión que acabamos de dar está por lo tanto basada en el estudio del rango de la forma q y de los centros de simetría de \mathcal{S} .

● Se observará que los resultados de esta discusión dependen sólo de la estructura afín de \mathcal{E}_3 y no de su estructura euclídea. De esto resulta que la transformada de una superficie de segundo grado por una biyección afín es un conjunto de la misma naturaleza (elipsoide, hiperboloide, paraboloides, cono, cilindro, etc.).

Para un estudio más sintético y profundo de las superficies de segundo grado hace falta colocarse en el cuadro de la *Geometría proyectiva compleja* (véase [12]).

Aplicaciones prácticas

Si ponemos:

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D,$$

el sistema (13), que determina los centros de simetría de \mathcal{S} , se traduce en las ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + B''y + B'z + C = 0 \\ B''x + A'y + Bz + C' = 0 \\ B'x + By + A''z + C'' = 0 \end{cases}$$

y se tiene:

$$q(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

§ III.8 CILINDROS CON CENTRO Y CONOS DE SEGUNDO GRADO

Volvamos a las notaciones del comienzo del § 7 y consideremos el conjunto \mathcal{S} de los puntos $M \in \mathcal{E}_3$ que verifican

$$(1) \quad Q(\overrightarrow{OM}) = h,$$

donde O designa un punto de \mathcal{E}_3 y Q una forma cuadrática en E_3 . Vamos a estudiar los casos en que \mathcal{S} es no vacío y se reduce a un cilindro o un cono.

Cilindros

Para que \mathcal{S} sea una superficie cilíndrica no reducida a una reunión de planos, es preciso, según la discusión del § 7, que la forma Q sea de *rango* 2.

Inversamente, si Q es de rango 2, existe un sistema de referencia ortonormal

$$\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

y dos reales no nulos α, β tales que \mathcal{S} está definido, relativamente a \mathcal{R} , por la ecuación cartesiana:

$$(2) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = h.$$

Para que el conjunto \mathcal{S} , definido por (2), no quede reducido ni al conjunto vacío, ni a una recta, ni a una reunión de planos, es necesario y suficiente que se tenga $h \neq 0$ y que uno por lo menos de los números $\alpha/h, \beta/h$ sea > 0 .

Mediante un cambio evidente de notaciones, la ecuación (2) se reduce entonces (permutando si es preciso las coordenadas) a:

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad \varepsilon = \pm 1, a > 0, b > 0.$$

Se obtiene por lo tanto el cilindro de generatrices paralelas al vector \vec{k} , tomando como *base* la cónica γ del plano $z = 0$ definida mediante la ecuación (3).

Si γ es una elipse (caso en que $\varepsilon = 1$), se dice que \mathcal{S} es un *cilindro elíptico*: en este caso toda sección de \mathcal{S} por un plano no paralelo a sus generatrices es una *elipse*.

Si γ es una hipérbola (caso en que $\varepsilon = -1$), se dice que \mathcal{S} es un *cilindro hiperbólico* y en este caso toda sección de \mathcal{S} por un plano no paralelo a sus generatrices es una *hipérbola*.

Finalmente, si $a = b$ y si $\varepsilon = +1$, se obtiene el *cilindro de revolución* de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$.

Veremos más adelante que existe otra clase de cilindros de segundo grado: los *cilindros parabólicos*, cuya sección por todo plano no paralelo a las generatrices es una *parábola*.

La intersección del cilindro \mathcal{S} , definido por (3), con un plano \mathcal{P} paralelo a sus generatrices o es vacía, o se reduce a una recta, o bien está formada por dos rectas paralelas. Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ se reduce a una recta, se dice que \mathcal{P} es *tangente* a \mathcal{S} a lo largo de esta recta. Se puede demostrar que esta definición se halla de acuerdo con la definición general de plano tangente a un conjunto.

Conos

Para que el conjunto \mathcal{S} definido por la ecuación (1) sea un cono, no reducido a una reunión de planos, es preciso, de acuerdo con la discusión del § 7, que la forma Q sea de rango 3 y que se tenga $h = 0$. Inversamente, si $h = 0$ y si Q es de rango 3, existe un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en el cual \mathcal{S} se halla definido mediante una ecuación de la forma

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \quad \text{con} \quad \alpha\beta\gamma \neq 0,$$

y para que \mathcal{S} no quede reducido a $\{O\}$, es necesario y suficiente que los números α, β, γ no sean del mismo signo.

Si es así, un cambio evidente de notaciones nos lleva (permutando las coordenadas si hace falta) a una ecuación de la forma:

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{con} \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

\mathcal{S} es entonces un *cono* de vértice O , que admite como base cualquiera de las elipses de ecuaciones:

$$z = \lambda, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda^2}{c^2} \quad (\lambda \neq 0).$$

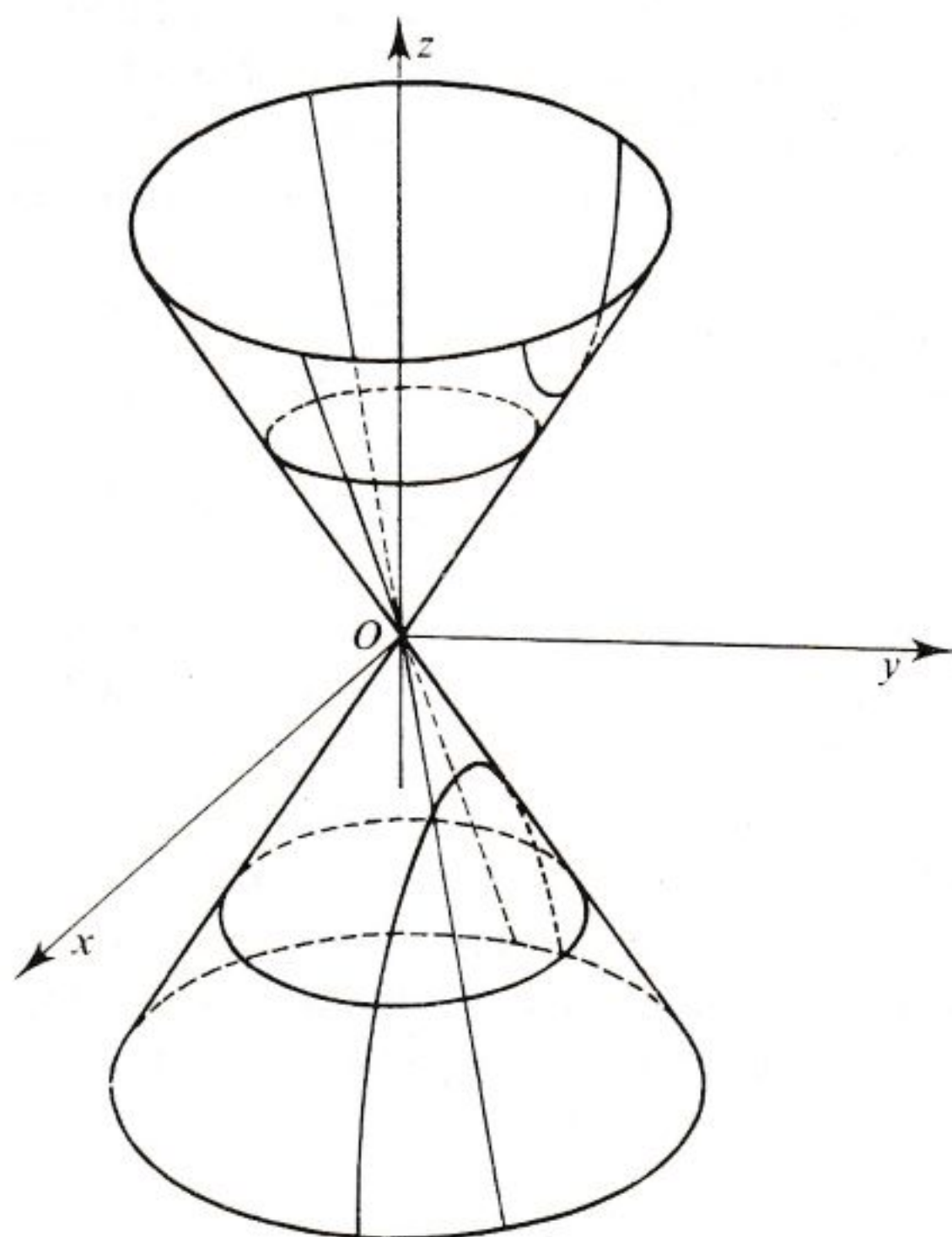


Figura 20.

Las secciones de \mathcal{S} por los planos $x = \text{Cte}$ e $y = \text{Cte}$ que no pasan por O son hipérbolas (véase la figura 20).

La intersección de \mathcal{S} con un plano \mathcal{P} que pase por O queda reducida a $\{O\}$ o a una recta, o está formada por dos rectas. Si $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ se reduce a una recta, se dice que \mathcal{P} es *tangente* a \mathcal{S} a lo largo de esta recta. Esta terminología se halla de acuerdo con la definición general de plano tangente a un conjunto (véase § 11).

El cono \mathcal{S} definido por la ecuación (4) admite la parametrización definida por

$$x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = cu \quad (u \in \mathbf{R}, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

De ello se deduce que es *conexo*.

El cono \mathcal{S} es *de revolución* si, y solamente si, $a = b$. En este caso, \mathcal{S} es la reunión de las rectas que pasan por O y forman con Oz un ángulo α que verifica:

$$(5) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{c}.$$

El número α definido por (5) y por $0 < \alpha < \pi/2$ recibe el nombre de *semiángulo en el vértice del cono*.

Problema

Se considera un cono \mathcal{S} de segundo grado definido, respecto a un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, por la ecuación cartesiana

$$f(x, y, z) = 0,$$

con

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy;$$

decir si este cono es de revolución y, en caso afirmativo, determinar su eje.

Sea u el operador simétrico asociado a la forma cuadrática φ definida por

$$\varphi(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = f(x, y, z).$$

Para que \mathcal{S} sea de revolución, es necesario y suficiente que el polinomio P de u admita una raíz doble; un primer método consistiría pues en escribir que el discriminante de P es nulo. Un método más práctico consiste en hacer uso del hecho de que u es diagonalizable; siendo así, para que P admita a λ como raíz doble, es necesario y suficiente que el operador $u - \lambda \text{Id}$ (donde Id designa el operador identidad) sea de rango ≤ 1 .

Utilizando la matriz de u en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se ve que esta condición se traduce en las relaciones:

$$(6) \quad \begin{cases} (A' - \lambda)(A'' - \lambda) = B^2 \\ (A'' - \lambda)(A - \lambda) = B'^2 \\ (A - \lambda)(A' - \lambda) = B''^2 \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} (A - \lambda)B = B'B'' \\ (A' - \lambda)B' = B''B \\ (A'' - \lambda)B'' = BB' \end{cases}$$

Se comprueba que el sistema (7) implica el (6) siempre que se tenga $BB'B'' \neq 0$. En lo que sigue, nos limitaremos a este caso (el estudio directo del caso en que uno de los números B, B', B'' es nulo no presenta dificultad). Al eliminar λ entre las ecuaciones (7), se obtiene las condiciones buscadas:

$$(8) \quad \boxed{A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{B'B}{B''}}.$$

Si se verifican las relaciones (8) y si el cono \mathcal{S} no se reduce a $\{O\}$, resulta fácil determinar su eje de revolución \mathcal{D} . En efecto, el endomorfismo u admite entonces

como valor propio doble el valor común λ de los tres miembros de la igualdad (8). Existe por lo tanto un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ y un real μ tales que se tiene:

$$(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \quad \varphi(X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}) = \lambda(X^2 + Y^2) + \mu Z^2,$$

y al ser $\mathcal{S} \neq \{O\}$, se tiene $\lambda\mu < 0$. El plano perpendicular en O al eje de revolución de \mathcal{S} es entonces el plano de ecuación $Z = 0$ en el sistema de referencia \mathcal{R}' y es por tanto el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{E}_3$ que verifican $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \lambda(\overrightarrow{OM})$. Volviendo al sistema de referencia inicial se ve que este plano se halla definido por la ecuación

$$(A - \lambda)x + B''y + B'z = 0,$$

o sea, teniendo en cuenta (8) y el valor de λ :

$$\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} = 0.$$

El eje de revolución de \mathcal{S} es pues la recta de ecuaciones

$$Bx = B'y = B''z.$$

Observemos que esta recta está definida incluso si $\mathcal{S} = \{O\}$.

§ III.9 PARABOLOIDES Y CILINDROS PARABÓLICOS

Definición III.9.1

Una parte \mathcal{S} del espacio afín euclídeo se dice que es un **paraboloide** si existe un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 en el cual \mathcal{S} admite una ecuación de la forma

$$(1) \quad z = \alpha x^2 + \beta y^2, \quad \text{con } \alpha \neq 0 \quad \text{y} \quad \beta \neq 0.$$

Se observará que el conjunto definido por la ecuación (1) es siempre *no vacío*. Si $\alpha \neq \beta$, admite como únicos planos de simetría los planos de ecuaciones $x = 0$, $y = 0$, y como único eje de simetría la recta Oz . Carece de centro de simetría. Sus secciones por los planos de ecuación $x = \text{Cte}$ o $y = \text{Cte}$ son *parábolas*.

Paraboloide elíptico

Si en la ecuación (1) α y β son *del mismo signo*, se puede reducir (cambiando si es preciso \vec{k} por $-\vec{k}$) al caso en que α y β son > 0 . Poniendo $\alpha = 1/a^2$ y $\beta = 1/b^2$, ($a > 0$, $b > 0$), se obtiene entonces la ecuación

$$(2) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0}.$$

El paraboloide definido por una ecuación de esta forma se dice que es **elíptico**; su sección por un plano $z = \lambda$, con $\lambda > 0$, es una *elipse*.

Si $a = b$, es una superficie de revolución de eje Oz denominada **paraboloide de revolución**. Todo plano que pase por Oz es entonces un plano de simetría de \mathcal{S} .

Volviendo al caso general, se ve que \mathcal{S} admite la parametrización definida por

$$x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = u \quad (u \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi);$$

es pues un conjunto conexo (véase la figura 21).

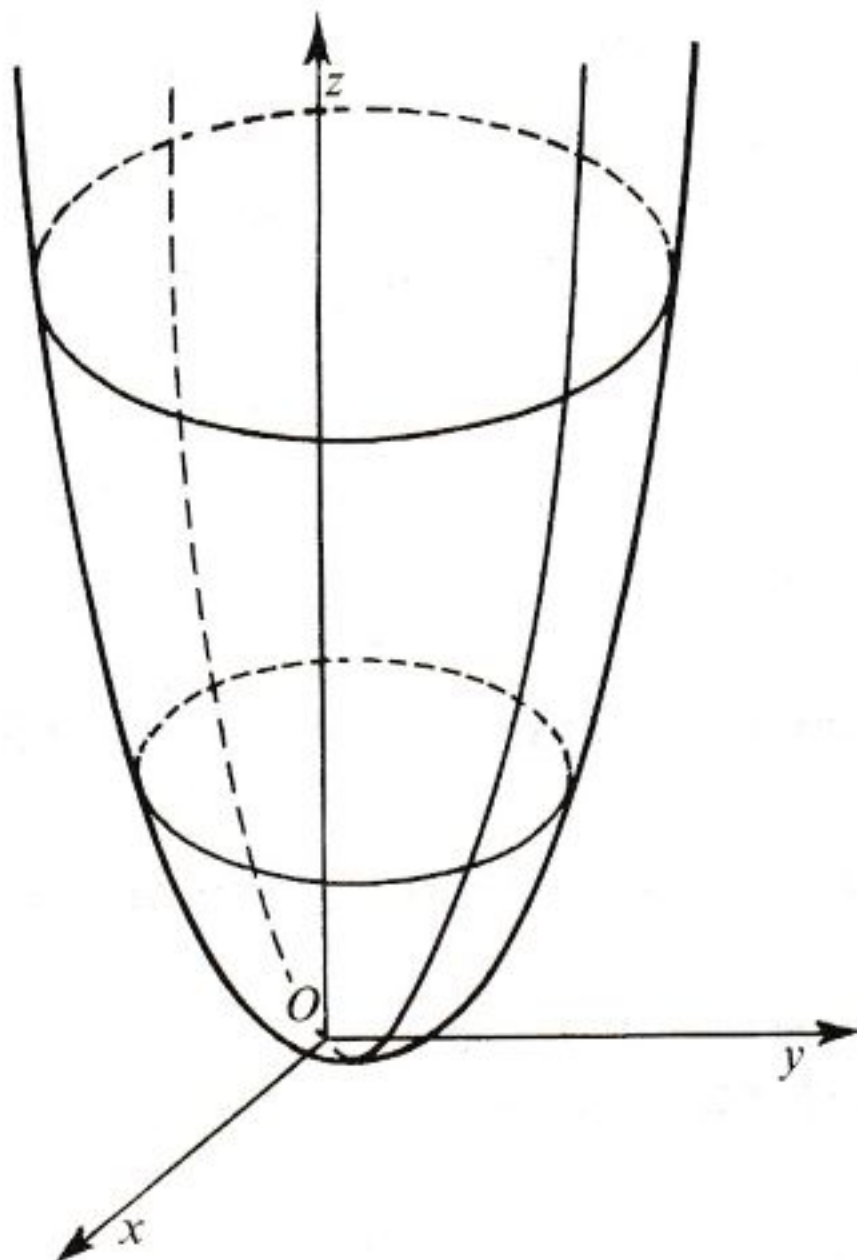


Figura 21.

Paraboloide hiperbólico

Si en la ecuación (1) α y β son de *signos contrarios*, se puede reducir al caso en que $\alpha > 0$ y $\beta < 0$. Poniendo $\alpha = 1/a^2$ y $\beta = -1/b^2$ ($a > 0$, $b > 0$) se obtiene la ecuación:

(3)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0.$$

Un paraboloide definido por una ecuación de esta forma se dice que es *hiperbólico*. Su sección por el plano $z = \lambda$ es una *hipérbola* si $\lambda \neq 0$ y la reunión de dos rectas si $\lambda = 0$. Además, si $\lambda \neq 0$, el eje mayor de la hipérbola sección es paralelo a Ox si $\lambda > 0$ y paralelo a Oy si $\lambda < 0$ (véase la figura 22).

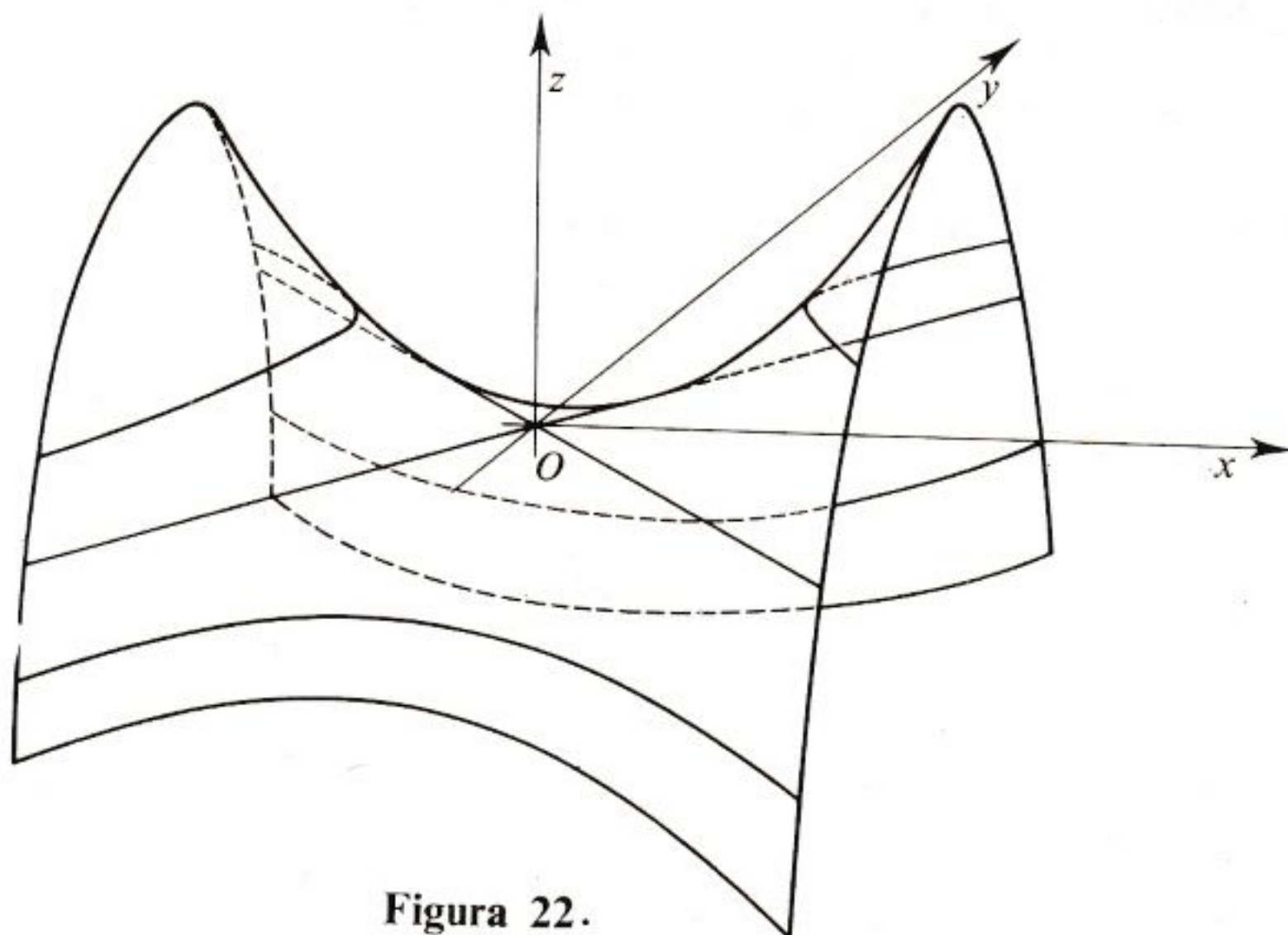


Figura 22.

El paraboloide hiperbólico definido por (3) admite la parametrización:

$$x = au \cosh v, \quad y = bu \sinh v, \quad z = \varepsilon u^2 \quad (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1),$$

es por lo tanto un conjunto conexo.

Admite también la parametrización

$$x = \frac{a}{2}(u + v), \quad y = \frac{b}{2}(v - u), \quad z = uv \quad (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}).$$

Generatrices

Pongamos la ecuación (3) en la forma

$$PQ = z,$$

con

$$P = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad Q = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}.$$

Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, designemos por \mathcal{D}_λ la recta de ecuaciones

$$(4) \quad P = \lambda, \quad z = \lambda Q,$$

y para cada $\mu \in \mathbf{R}$ designemos por \mathcal{D}'_μ la recta de ecuaciones:

$$(5) \quad Q = \mu, \quad z = \mu P.$$

Se ve inmediatamente que las rectas \mathcal{D}_λ y \mathcal{D}'_μ están contenidas en el paraboloide hiperbólico \mathcal{S} definido por (3), y se dice que son *generatrices* de \mathcal{S} . Cada una de las familias $(\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ y $(\mathcal{D}'_\mu)_{\mu \in \mathbf{R}}$ se dice que es un **sistema de generatrices** de \mathcal{S} . Estas familias poseen propiedades análogas a las de las generatrices de un hiperboloide de una hoja. Puntualizando:

- Cada generatriz de uno de los sistemas corta a cada una de las generatrices del otro sistema.

- Dos generatrices distintas de un mismo sistema son siempre *no coplanares*.

- Por cada punto de \mathcal{S} pasa una generatriz de cada sistema y solo una.

- Finalmente \mathcal{S} no contiene más rectas que estas generatrices.

Observemos que las generatrices \mathcal{D}_λ son paralelas al plano de ecuación $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$,

mientras que las generatrices \mathcal{D}'_λ son paralelas al plano de ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

De ello se deduce que \mathcal{S} es, de dos maneras distintas, un *conoide* (véase § 5).

Recíprocamente todo conoide que admite como directriz una recta no coplanar con su eje y no paralela a su plano de base, es un *paraboloide hiperbólico*.

En la figura 23 vemos representadas algunas generatrices de un paraboloide hiperbólico.

Para que \mathcal{S} sea un *conoide recto* es necesario y suficiente que $a = b$. En este caso se dice que \mathcal{S} es un *paraboloide equilátero*. En un sistema de referencia deducido de $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ por una rotación de $\pm \pi/4$ alrededor de Oz , \mathcal{S} queda definido mediante una ecuación de la forma:

$$XY = kZ, \quad \text{con } k \neq 0.$$

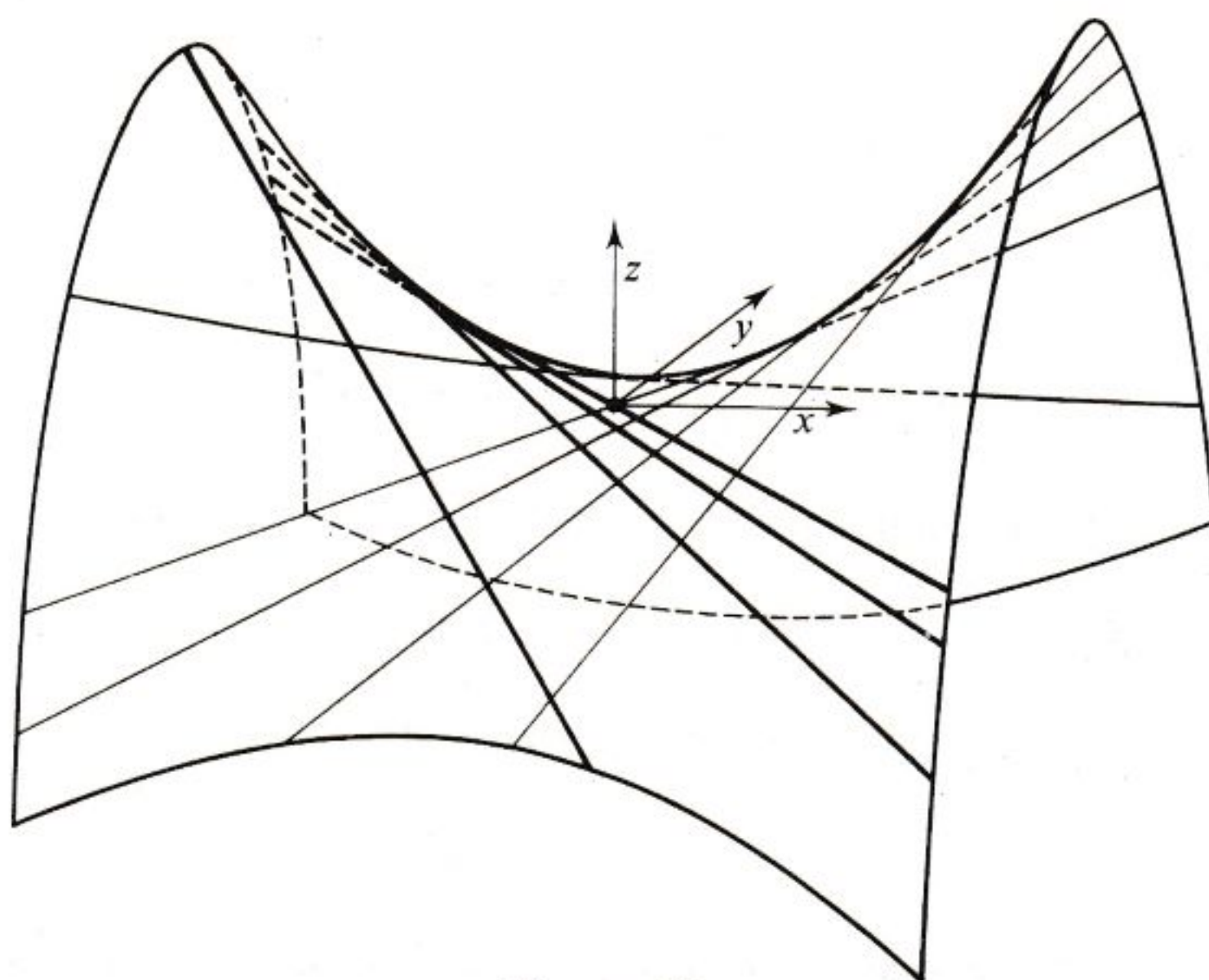


Figura 23.

Cilindros parabólicos

Definición III.9.2

De una parte \mathcal{S} de \mathcal{E}_3 se dice que es un **cilindro parabólico** si existe un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_3 en el cual \mathcal{S} admite una ecuación de la forma:

$$x^2 = 2pz, \quad \text{con } p \neq 0.$$

Se trata pues de un cilindro cuya sección, por un plano perpendicular a sus generatrices, es una *parábola*.

En resumen, el conjunto definido, respecto a un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_3 , por una ecuación de la forma

$$z = \alpha x^2 + \beta y^2 \quad ((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$$

es un *cilindro parabólico* si $\alpha\beta = 0$, un *paraboloide elíptico* si $\alpha\beta > 0$, y un *paraboloide hiperbólico* si $\alpha\beta < 0$.

§ III.10 SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Sea, como siempre, \mathcal{E}_3 un espacio afín euclídeo de dimensión 3. Se dice que una parte no vacía \mathcal{S} de \mathcal{E}_3 admite una recta afín Δ como **eje de revolución** si \mathcal{S} es estable para toda rotación de eje Δ ; se dice entonces que \mathcal{S} es de **revolución** (alrededor de Δ).

Si es así y si M es un punto cualquiera de \mathcal{S} , la circunferencia Γ_M de eje Δ que pasa por M está contenida en \mathcal{S} : esta circunferencia Γ_M recibe el nombre de **paralelo** de M . El conjunto \mathcal{S} es pues la reunión de los paralelos de sus diversos puntos.

Los planos que contienen al eje Δ reciben el nombre de **planos meridianos**, y son planos de simetría de \mathcal{S} . Sus intersecciones con \mathcal{S} son conjuntos que se deducen unos de otros por las rotaciones de eje Δ . De cada uno de ellos se dice que es un **meridiano** de \mathcal{S} . Todo meridiano de \mathcal{S} admite a Δ como eje de simetría.

El conjunto \mathcal{S} queda evidentemente determinado cuando se da el eje Δ y un meridiano. Basta de hecho dar el eje Δ y un *semimeridiano* (sección de \mathcal{S} por un semiplano limitado por Δ).

Nos hemos encontrado ya con conjuntos que admiten un eje de revolución, a saber: los conos de revolución, los cilindros de revolución y las cuádricas (elipsoides, hiperboloides y paraboloides) de revolución.

Toda recta que pase por el centro de una esfera \mathcal{S} es un eje de revolución de \mathcal{S} . A la inversa, se puede demostrar que todo conjunto que admite dos ejes de revolución coplanares y distintos es una reunión de esferas concéntricas (véase ejercicio III.53).

Ecuaciones de una superficie de revolución

Sea $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_3 y sea $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ una función numérica definida en una parte de \mathbf{R}^3 . Para que el conjunto de \mathcal{E}_3 de ecuación cartesiana

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

sea de revolución alrededor de Oz , es necesario y suficiente que la relación (1) implique para todo $\theta \in \mathbf{R}$, la relación

$$f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z) = 0.$$

De ello se deduce inmediatamente:

Todo conjunto de \mathcal{E}_3 que admite una ecuación cartesiana de la forma

$$(2) \quad g(x^2 + y^2, z) = 0,$$

(donde g designa una función numérica definida sobre una parte de \mathbf{R}^2) es de revolución alrededor de Oz .

El meridiano del conjunto \mathcal{S} definido por (2), contenido en el plano $x = 0$, está definido por la ecuación $g(y^2, z) = 0$, y admite Oz como eje de simetría.

● Convendremos en llamar **superficie de revolución de eje Oz** a todo conjunto de revolución alrededor de Oz cuyo meridiano contenido en el plano $x = 0$ admita una ecuación cartesiana de la forma

$$(3) \quad h(y, z) = 0,$$

donde h designa una función de clase C^1 sobre un abierto de \mathbf{R}^2 : los conos, los cilindros y las cuádricas de revolución alrededor de Oz , son superficies de revolución en el sentido de esta definición. Por ejemplo, un meridiano del cono de revolución de ecuación

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(véase § 8) contenido en el plano $x = 0$ es el conjunto (formado por dos rectas) de ecuación

$$c^2 y^2 - a^2 z^2 = 0.$$

Inversamente, sea Γ un conjunto del plano $x = 0$, definido por una ecuación cartesiana de la forma (3), que admite a Oz como eje de simetría, y sea \mathcal{S} la superficie de revolución de eje Oz que admite a Γ como meridiano.

Para que el punto M , de coordenadas (x, y, z) , pertenezca a \mathcal{S} , es necesario y suficiente que exista un número θ tal que el punto de coordenadas

$$(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

pertenezca a Γ , lo cual tiene lugar si, y solamente si, uno de los puntos P, Q de coordenadas respectivas $(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$, $(0, -\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ pertenece a Γ . Pero puesto que Γ tiene a Oz como eje de simetría, la relación $P \in \Gamma$ implica $Q \in \Gamma$. La superficie \mathcal{S} queda por lo tanto definida mediante la ecuación cartesiana

$$(4) \quad \boxed{h(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0}.$$

Una superficie de revolución de eje Oz es pues una superficie que admite una ecuación cartesiana de la forma (4), siendo h de clase C^1 sobre un abierto de \mathbf{R}^2 .

Ecuación referida a un sistema ortonormal cualquiera

Designemos por O un punto cualquiera de \mathcal{E}_3 , por P una función afín no constante sobre \mathcal{E}_3 , y, para todo $M \in \mathcal{E}_3$, pongamos $S(M) = OM^2$. Finalmente, sea F una función numérica definida sobre una parte de \mathbf{R}^2 .

Resulta entonces fácil ver que el conjunto definido por la ecuación

$$(5) \quad F[S(M), P(M)] = 0$$

es de revolución alrededor de la perpendicular trazada por O al plano de ecuación $P(M) = 0$.

Sea en efecto $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal tal que \vec{k} sea ortogonal al plano $P = 0$. En este sistema de referencia, se tiene: $S(M) = x^2 + y^2 + z^2$ y

$$P(M) = az + b$$

con $a, b = \text{Ctes.}$ La ecuación (5) se escribe pues:

$$(6) \quad F(x^2 + y^2 + z^2, az + b) = 0,$$

y el estudio que antecede muestra que \mathcal{S} es de revolución alrededor de Oz ; si, además, F es de clase C^1 , \mathcal{S} es una *superficie de revolución* en el sentido anteriormente definido, su meridiano contenido en el plano $x = 0$ admite en efecto la ecuación cartesiana $h(y, z) = 0$, con

$$h(u, v) = F(u^2 + v^2, av + b).$$

Inversamente, sea \mathcal{S} una superficie de revolución definida por una ecuación de la forma (4). Basta poner $F(u, v) = h(\sqrt{u^2 - v^2}, v)$ para que se reduzca a la ecuación

$$F(x^2 + y^2 + z^2, z) = 0,$$

que es efectivamente de la forma (6). Vamos a enunciar la regla práctica que sigue:

● En un sistema de referencia ortonormal cualquiera se reconoce una superficie de revolución en que admite una ecuación cartesiana de la forma

$$F(S, P) = 0,$$

donde $S = 0$ es la ecuación normal de una esfera y P una función afín no constante.

Ejemplo

En un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sea \mathcal{S} la superficie de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 1.$$

Esta ecuación se escribe:

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x + y + z)^2 = 1.$$

Es de la forma (5), con

$$S(M) = OM^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad P(M) = x + y + z$$

y

$$F(u, v) = \frac{3}{2}u - \frac{v}{2} - 1.$$

La distancia de un punto M al plano $P = 0$, medida algebraicamente según el vector unitario \vec{K} de componentes $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ es igual a $P(M)/\sqrt{3}$. Si se designa por (X, Y, Z) las coordenadas de M respecto a un sistema de referencia de la forma $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, se tiene por lo tanto $P(M) = \sqrt{3} Z$, de donde

$$F(M) = \frac{3}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{3}{2}Z^2 - 1 = \frac{3}{2}(X^2 + Y^2) - 1.$$

En este nuevo sistema de referencia, \mathcal{S} está definido por la ecuación cartesiana:

$$X^2 + Y^2 = \frac{2}{3}.$$

Se trata pues de un *cilindro de revolución* cuyo eje es la recta de ecuaciones $x=y=z$ respecto al sistema de referencia inicial.

Hojas de revolución

Considerando fijo el sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ llamaremos **hoja de revolución de eje Oz** a toda parametrización definida mediante relaciones de la forma:

$$(7) \quad x = a(t) \cos \theta - b(t) \sin \theta, \quad y = a(t) \sin \theta + b(t) \cos \theta, \quad z = c(t) \\ (t \in I, \theta \in \mathbf{R})$$

donde I designa un intervalo de \mathbf{R} , y a, b, c funciones derivables en I .

Designemos por Γ el arco de \mathcal{C}_3 definido por la parametrización

$$x = a(t), \quad y = b(t), \quad z = c(t) \quad (t \in I).$$

Para cada $\theta \in \mathbf{R}$, el arco Γ_θ definido por la parametrización (7) se deduce de Γ por la rotación de eje Oz y ángulo θ (respecto al sistema de referencia considerado). Diremos que la hoja definida por (7) es la **hoja de revolución engendrada por la rotación de Γ alrededor de Oz** .

La imagen \mathcal{S} de la parametrización (7) (denominada *soporte* de la hoja) tiene evidentemente a Oz como eje de revolución. El meridiano de \mathcal{S} contenido en el plano $y = 0$ es el conjunto de los puntos de coordenadas

$$(8) \quad x = a(t) \cos \theta - b(t) \operatorname{sen} \theta, \quad y = 0, \quad z = c(t)$$

donde t y θ tienen que verificar

$$(9) \quad a(t) \operatorname{sen} \theta + b(t) \cos \theta = 0.$$

Eliminando t y θ entre las relaciones (8) y (9) se obtendría una *ecuación cartesiana* de este meridiano.

Si el conjunto plano definido por la ecuación (9) admite una parametrización $u \mapsto [t(u), \theta(u)]$ y si se sustituye esta parametrización en (8), se obtiene una *parametrización* del meridiano.

Inversamente, supongamos dada una superficie de revolución \mathcal{S} de eje Oz cuyo meridiano contenido en el plano $y = 0$ admite una parametrización derivable tal como

$$x = X(u), \quad y = 0, \quad z = Z(u) \quad (u \in I).$$

Se ve entonces inmediatamente que \mathcal{S} es el soporte de la hoja de revolución definida por:

$$x = X(u) \cos \theta, \quad y = Y(u) \operatorname{sen} \theta, \quad z = Z(u) \operatorname{sen} \theta.$$

Observación. Si el arco Γ está contenido en un plano meridiano \mathcal{P} , el meridiano de la superficie de revolución \mathcal{S} engendrada por Γ es la reunión del soporte de Γ y de su simétrico respecto al eje Oz .

Para fijar ideas, supongamos que el soporte de Γ esté definido por las ecuaciones cartesianas:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad h(y, z) = 0.$$

Mediante un estudio análogo al del comienzo de este §, se ve que \mathcal{S} es el conjunto de los puntos cuyas coordenadas (x, y, z) verifican *una* por lo menos de las ecuaciones:

$$(10) \quad h(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \quad h(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Si el soporte de I tiene a Oz como eje de simetría, las dos ecuaciones (10) son equivalentes y el soporte de I es todo el meridiano de \mathcal{S} .

Ejemplo: toro

Tomemos como I la circunferencia de ecuaciones paramétricas:

$$x = 0, \quad y = a + R \cos t, \quad z = R \sin t \quad (t \in \mathbf{R}).$$

La hoja de revolución engendrada por I al girar alrededor de Oz está definida por la parametrización

$$(11) \quad \begin{aligned} x &= (a + R \cos t) \cos \theta, & y &= (a + R \cos t) \sin \theta, \\ z &= R \sin t & (t \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

La circunferencia I es la curva del plano $y = 0$ de ecuación cartesiana

$$(12) \quad (y - a)^2 + z^2 = R^2.$$

Se obtiene pues una ecuación cartesiana de soporte \mathcal{S} de la hoja (11) sustituyendo, en (12), y por $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, o sea:

$$x^2 + y^2 + 2\epsilon a \sqrt{x^2 + y^2} + a^2 + z^2 = R^2.$$

Por lo tanto \mathcal{S} está definido por la ecuación cartesiana:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

o sea, al desarrollar

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(R^2 + a^2)(x^2 + y^2) + 2(R^2 - a^2)z^2 + a^2 - R^2 = 0.$$

La superficie de revolución \mathcal{S} recibe el nombre de **superficie tórica** o **toro** de eje Oz . Su meridiano, contenido en el plano $y = 0$, es la reunión de I y de la circunferencia I' simétrica respecto a Oz (véase la figura 24). Esta superficie tiene el punto O como centro de simetría y el plano $z = 0$ como plano de simetría.

Se puede ver que el conjunto \mathcal{S} es la imagen, en la aplicación definida por (11), del compacto plano definido por $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y es por lo tanto *compacto* y *conexo*.

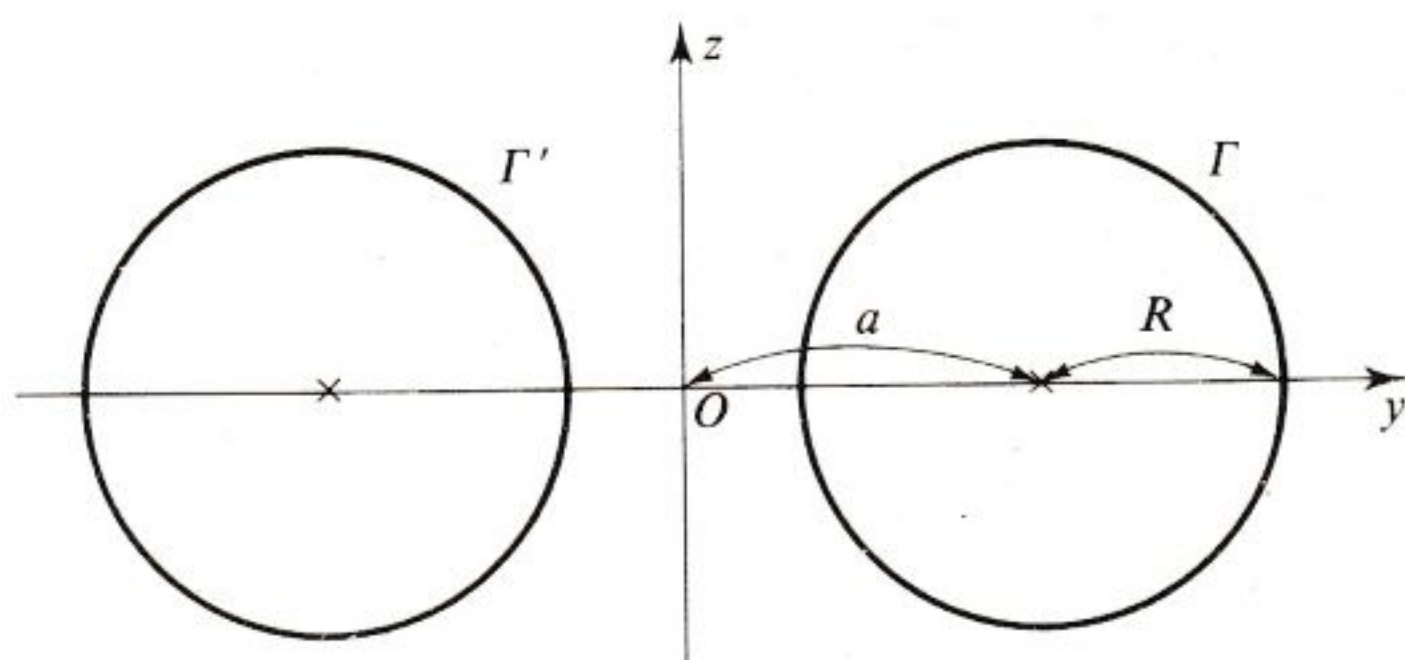


Figura 24.

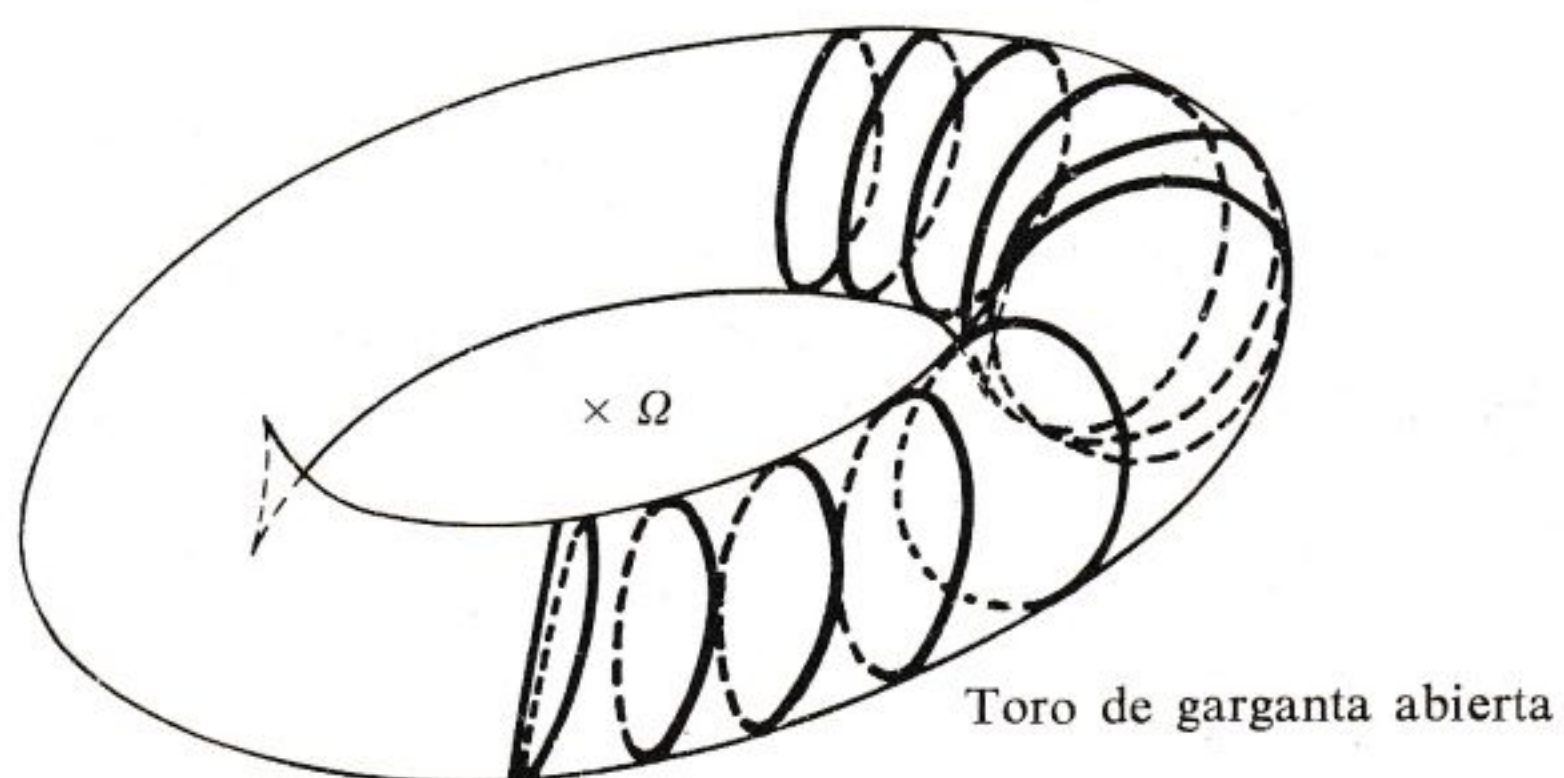
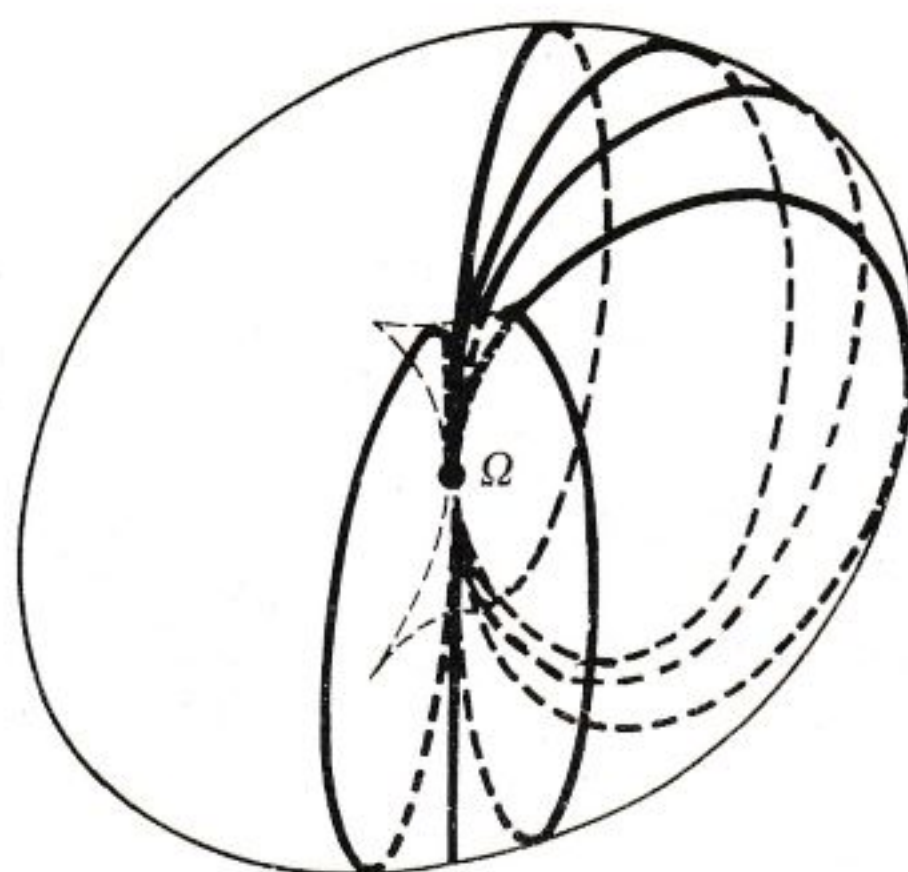


Figura 25.



Toro de garganta cerrada

Figura 26.

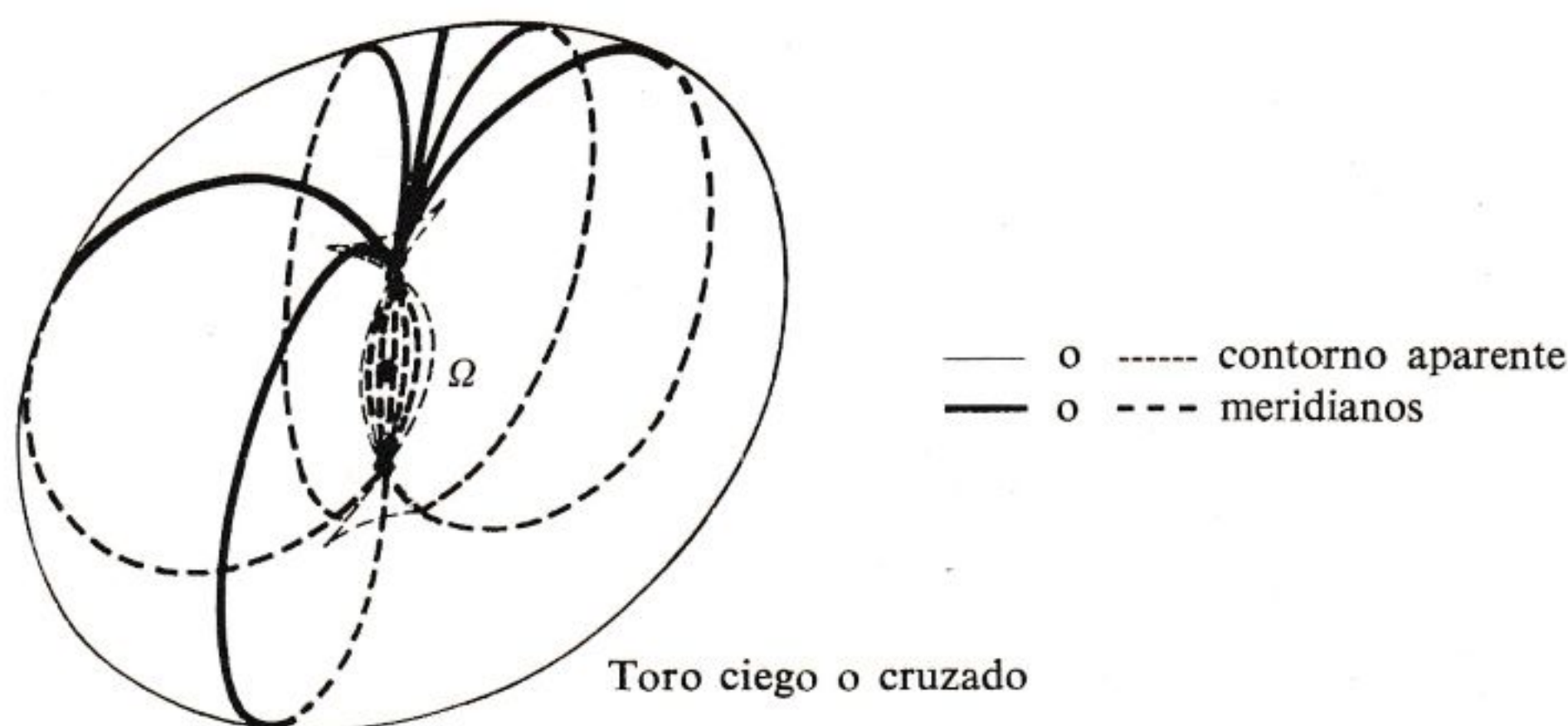


Figura 27.

El toro se dice que tiene *garganta abierta* si $a > R$, que es de *garganta cerrada* si $a = R$ y que es *cruzado* si $a < R$. En las figuras 25, 26 y 27, hemos representado en perspectiva caballera algunos círculos meridianos en cada uno de los tres casos.

Señalemos que un toro de garganta contiene, además de los círculos paralelos y de los círculos meridianos, otras dos familias de círculos, denominados *círculos d'Yvon Villarceau* (véase ejercicio III.52).

Para terminar este § vamos a dar algunos ejemplos que muestran la manera como se puede formar una ecuación cartesiana de una superficie de revolución en un sistema de referencia ortonormal cualquiera $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ejemplo 1

Dada una recta \mathcal{D} definida mediante un punto $A(a, b, c)$ y un vector director $\vec{V}(\alpha, \beta, \gamma)$, formar una ecuación cartesiana del cilindro de revolución de eje \mathcal{D} y de radio R .

El cilindro buscado es el conjunto de los puntos M cuya distancia a \mathcal{D} es igual a R . Ahora bien la distancia de M a \mathcal{D} es: $\frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{V}\|}$ (véase § II.8). Se obtiene por lo tanto la ecuación buscada

$$\|\vec{AM} \wedge \vec{V}\|^2 - R^2 \|\vec{V}\|^2 = 0,$$

o sea, explícitamente

$$[\gamma(y - b) - \beta(z - c)]^2 + [\alpha(z - c) - \gamma(x - a)]^2 + [\beta(x - a) - \alpha(y - b)]^2 - R^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0.$$

Ejemplo 2

Siendo \mathcal{D} la recta del ejemplo 1, formar una ecuación cartesiana del cono de revolución de vértice A y de semiángulo en el vértice θ .

El cono buscado es el conjunto de los puntos M tales que el ángulo de la recta (AM) con \mathcal{D} es igual a θ . Ahora bien, el ángulo θ_M de las rectas (AM) y (\mathcal{D}) verifica

$$\cos^2 \theta_M = \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{V})^2}{\|\overrightarrow{AM}\|^2 \cdot \|\vec{V}\|^2}.$$

La relación buscada es pues

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{V})^2 - (\cos^2 \theta) \|\overrightarrow{AM}\|^2 \cdot \|\vec{V}\|^2 = 0,$$

o sea, desarrollando:

$$[\alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c)]^2 - \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \times [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2] = 0.$$

Ejemplo 3

Se define una recta \mathcal{D} que pasa por O dando un vector director $V(\alpha, \beta, \gamma)$. Se define una recta Δ , no coplanar con \mathcal{D} y no ortogonal a \mathcal{D} mediante la parametrización

$$(12) \quad x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Formar una ecuación del hiperboloide de una hoja engendrado por la rotación de Δ alrededor de \mathcal{D} .

Las hipótesis hechas sobre \mathcal{D} y Δ se traducen por las relaciones $E \neq 0$ y $F \neq 0$, con

$$E = a\alpha + b\beta + \gamma \quad y \quad F = \begin{vmatrix} p & a & \alpha \\ q & b & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{vmatrix}.$$

Para todo punto M de \mathcal{E}_3 , de coordenadas x, y, z , pongamos

$$S(M) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{y} \quad P(M) = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

El estudio hecho en el § 7 muestra fácilmente, mediante un cambio de sistema de referencia, que las cuádricas de revolución de eje \mathcal{D} son las que admiten una ecuación de la forma:

$$(13) \quad AS + BP^2 + CP + D = 0 \quad (A, B, C, D = \text{Ctes, con } A \neq 0).$$

Para que esta cuádrica contenga a Δ es necesario y suficiente que al poner en (13) la parametrización (12) se obtenga una identidad en z . Mediante un cálculo fácil, se obtienen las condiciones

$$(14) \quad \begin{cases} (a^2 + b^2 + 1)A + E^2 B & = 0 \\ (ap + bq)A + E(\alpha p + \beta q)B + EC & = 0 \\ (p^2 + q^2)A + (\alpha p + \beta q)^2 B + (\alpha p + \beta q)C + D & = 0. \end{cases}$$

El sistema (14) es lineal y homogéneo en A, B, C, D , y su rango es 3, ya que el determinante

$$L = \begin{vmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ E(\alpha p + \beta q) & E & 0 \\ (\alpha p + \beta q)^2 & \alpha p + \beta q & 1 \end{vmatrix} \text{ es no nulo.}$$

Admite por lo tanto una solución no nula única (A_0, B_0, C_0, D_0) , definida salvo un factor multiplicativo no nulo, y se ve fácilmente que $A_0 \neq 0$; la ecuación

$$A_0 S + B_0 P^2 + C_0 P + D_0 = 0$$

representa pues una cuádrica, y se trata del hiperboloide buscado.

Estos cálculos siguen siendo válidos si $F = 0$; la ecuación hallada es entonces la del *cilindro de revolución* generado por la rotación de Δ alrededor de \mathcal{D} .

§ III.11 NOCIÓN GEOMÉTRICA DE TANGENTE Y DE PLANO TANGENTE A UN CONJUNTO

Manteniendo el punto de vista «conjuntista» que ha sido el adoptado en este capítulo, resulta interesante poder definir directamente la *tangente* [resp. el *plano tangente*] a una curva [resp. a una superficie], sin recurrir a una parametrización del conjunto considerado.

Vamos a ver en primer lugar de qué manera se puede definir el concepto de *tangente a un conjunto*.

Planteamiento del problema

Designemos por (E, v) un espacio vectorial normado, por Γ una parte de E y por M_0 un punto de acumulación de Γ . Intuitivamente, la tangente a Γ en M_0 es el «límite» (si existe) de la recta (M_0M) cuando M tiende hacia M_0 sobre $\Gamma \setminus \{M_0\}$.

Para dar una significación matemática a este concepto intuitivo de «límite» nos hace falta definir una topología sobre el conjunto de las rectas que pasan por M_0 . Esto equivale a definir una topología sobre el conjunto de las *rectas vectoriales* de E .

Topología sobre el conjunto de las rectas vectoriales de (E, v)

Designaremos por \mathcal{G}_1 el conjunto de las rectas vectoriales de E y por S la *esfera unidad* de E , o sea

$$S = \{ x \in E \mid v(x) = 1 \}.$$

Para cada recta $D \in \mathcal{G}_1$, el conjunto $S \cap D$ está formado por dos puntos diametralmente opuestos de S .

A cada par (D_1, D_2) de rectas vectoriales, vamos a asociar el número

$$(1) \quad d(D_1, D_2) = \inf_{x_1 \in S \cap D_1, x_2 \in S \cap D_2} v(x_1 - x_2),$$

dicho número $d(D_1, D_2)$ es la *distancia* de los conjuntos $S \cap D_1, S \cap D_2$. Es nulo si (y solamente si) $D_1 = D_2$, y se tiene $d(D_2, D_1) = d(D_1, D_2)$. Para demostrar que d es una *distancia* en \mathcal{G}_1 basta con probar que d verifica la *desigualdad triangular*.

Ahora bien, si D, D_1, D_2 son tres rectas vectoriales cualesquiera y si $u \in S \cap D$, se ve fácilmente que existe un punto $u_1 \in S \cap D_1$ y un punto $u_2 \in S \cap D_2$, tales que se tiene

$$d(D, D_1) = v(u - u_1) \quad \text{y} \quad d(D, D_2) = v(u - u_2);$$

de donde

$$d(D_1, D_2) \leq v(u_1 - u_2) \leq v(u - u_1) + v(u - u_2)$$

o sea

$$d(D_1, D_2) \leq d(D_1, D) + d(D_2, D).$$

La función d definida en $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ por la relación (1) es pues efectivamente una *distancia* en \mathcal{G} .

Por otra parte resulta fácil ver que, si se sustituye v por una *norma equivalente* v' , la distancia d viene sustituida por una *distancia equivalente* d' .

En efecto, designemos por S' la esfera unidad correspondiente a la norma v' y sean a, b reales > 0 que verifican:

$$av' \leq v \leq bv'.$$

Supuestas fijas las rectas vectoriales D_1, D_2 , tomemos $x'_1 \in S' \cap D_1$ y $x'_2 \in S' \cap D_2$ tales que

$$d'(D_1, D_2) = v'(x'_1 - x'_2).$$

Pongamos

$$x_1 = \frac{x'_1}{v(x'_1)}, \quad x_2 = \frac{x'_2}{v(x'_2)},$$

de lo cual se deduce $x_1 \in S \cap D_1, x_2 \in S \cap D_2$. Se tiene

$$d(D_1, D_2) \leq v(x_1 - x_2) = v\left(\frac{x'_1}{v(x'_1)} - \frac{x'_2}{v(x'_2)}\right) = v\left(\frac{x'_1 - x'_2}{v(x'_1)} + \left(\frac{1}{v(x'_1)} - \frac{1}{v(x'_2)}\right)x'_2\right),$$

de donde

$$d(D_1, D_2) \leq \frac{1}{v(x'_1)} [v(x'_1 - x'_2) + |v(x'_1) - v(x'_2)|]$$

y como se tiene

$$|v(x'_1) - v(x'_2)| \leq v(x'_1 - x'_2) \quad \text{y} \quad v(x'_1) \geq av'(x'_1) = a,$$

se deduce

$$d(D_1, D_2) \leq \frac{2}{v(x'_1)} v(x'_1 - x'_2) \leq \frac{2b}{a} v'(x'_1 - x'_2) = \frac{2b}{a} d'(D_1, D_2).$$

De análoga manera se establecería la desigualdad:

$$d' \leq \frac{2a}{b} d,$$

con lo cual queda establecida la equivalencia de las distancias d y d' , según se había anunciado.

La topología definida en \mathcal{G}_1 por la distancia d depende solamente de la topología definida por la norma v sobre E . Por otra parte, se puede comprobar que la topología de \mathcal{G}_1 está definida por la condición siguiente: una parte X de \mathcal{G}_1 es *abierta* si (y solamente si) el *cono despuntado* $\bigcup_{D \in \mathcal{G}_1} (D \setminus \{0\})$ es un *abierto* de E .

En particular, si E es de *dimensión finita*, la topología de \mathcal{G}_1 no depende de la norma v elegida.

Si (E, v) es un espacio *euclídeo*, se tiene, mediante un cálculo fácil,

$$d(D_1, D_2) = 2 \operatorname{sen} \theta/2$$

donde θ designa el ángulo de las rectas D_1, D_2 . Se puede demostrar, por otra parte, que la distancia angular (es decir la determinación de θ comprendida entre 0 y $\pi/2$) es otra distancia que define la misma topología en \mathcal{G}_1 .

En la práctica utilizaremos la proposición que sigue la cual reduce el estudio de los límites de rectas al de límites de funciones vectoriales.

III.11.1 Considerando fijo el e.v.n. (E, v) , designemos por Γ una parte de un espacio topológico cualquiera, por M_0 un punto de adherencia de Γ y por

$$D : M \mapsto D(M)$$

una aplicación de Γ en \mathcal{G}_1 . Sea finalmente T_0 una recta vectorial de E dirigida por el vector \vec{V}_0 . Para que se tenga:

$$(1) \quad \lim_{M \rightarrow M_0} D(M) = T_0,$$

basta que exista ⁽¹⁾ una función vectorial $\vec{V} : \Gamma \rightarrow E$ que verifique las dos condiciones siguientes:

- i) para cada $M \in \Gamma$, $\vec{V}(M)$ es un vector director de $D(M)$;
- ii) $\lim_{M \rightarrow M_0} \vec{V}(M) = \vec{V}_0$.

Demostración. Por definición, se tiene:

$$d(D(M), T_0) \leq v \left[\frac{\vec{V}(M)}{v(\vec{V}(M))} - \frac{\vec{V}_0}{v(\vec{V}_0)} \right],$$

y la relación ii) implica

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\vec{V}(M)}{v(\vec{V}(M))} = \frac{\vec{V}_0}{v(\vec{V}_0)};$$

de donde se deduce el resultado.]]

En el caso de ser (E, v) un espacio euclídeo, se tiene también (con las mismas notaciones):

Para que (1) se cumpla, es necesario y suficiente que la distancia angular de las rectas $D(M)$ y T_0 tienda a cero cuando M tiende a M_0 .

⁽¹⁾ Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente es la existencia de una tal función \vec{V} en un entorno de M_0 en Γ .

Tangente geométrica a un conjunto

Considerando fijo el e.v.n. (E, ν) y estando provisto el conjunto asociado \mathcal{G}_1 de la topología acabada de definir, podemos poner:

Definición III.11.1

Sean \mathcal{E} un espacio afín sobre (E, ν) y M_0 un punto de acumulación de una parte Γ de \mathcal{E} . Para todo punto $M \in \Gamma$, distinto de M_0 , designemos por D_M la recta vectorial engendrada por $\overrightarrow{M_0 M}$.

Se dice que Γ admite una **tangente única** en el punto M_0 si el límite

$$T = \lim_{M \rightarrow M_0, M \in \Gamma \setminus \{M_0\}} D_M$$

existe en \mathcal{G}_1 .

Si este límite existe, la recta afín de dirección T que pasa por M_0 recibe el nombre de **tangente** (o **tangente geométrica**) a Γ en M_0 .

Se observará que la *existencia* y el *valor* T de este límite depende solamente de un entorno tan pequeño como se quiera de M_0 dado en Γ . Se trata pues de propiedades *locales* del par (Γ, M_0) .

Ejemplos

1. Sean Γ una circunferencia del plano euclídeo de centro O , $A \in \Gamma$ y AT la recta ortogonal en A a la recta (OA) . La distancia angular de las rectas (AT) , (AM) es igual a la de las rectas (OA) , (OH) (donde H designa el punto medio del segmento $[A, M]$), por lo tanto es igual a $\frac{1}{2} \widehat{AOM}$ (véase la figura 28); tiende pues a cero cuando M tiende a A sobre Γ . La recta AT es la tangente geométrica a Γ en A .

2. En \mathbf{R}^2 , sea Γ el conjunto de los puntos (x, y) que verifican $x^2 \leq y \leq 2x^2$ (véase la figura 29). Para cada punto $M = (x, y)$ de Γ , distinto de $O = (0, 0)$, la

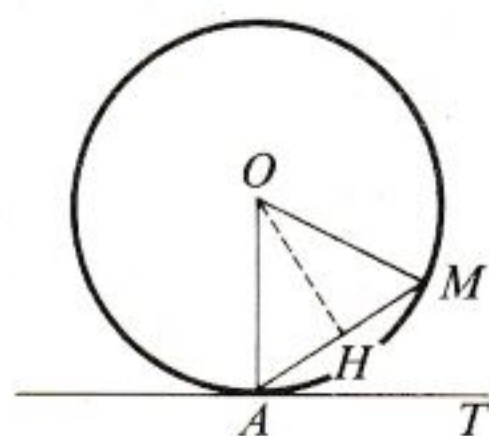


Figura 28.

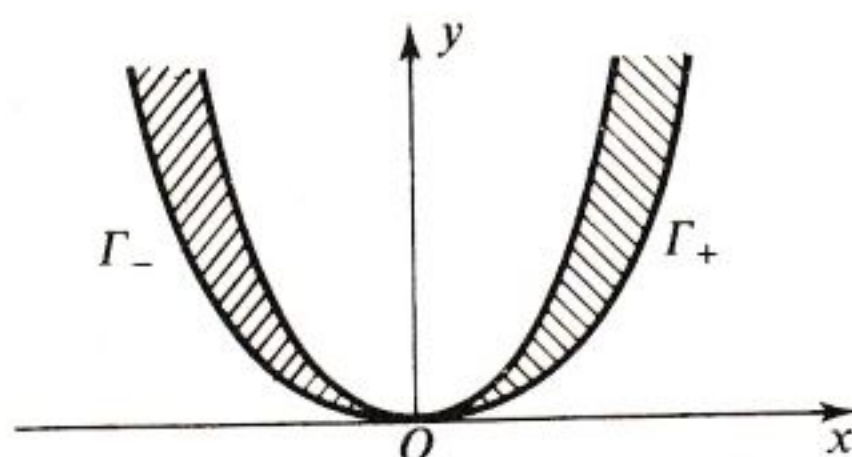


Figura 29.

recta OM admite el vector director $\vec{V}(M) = (1, y/x)$ (ya que se tiene $x \neq 0$), y evidentemente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in \Gamma \setminus \{O\}} \frac{y}{x} = 0,$$

de donde:

$$\lim_{M \rightarrow O, M \in \Gamma \setminus \{O\}} \vec{V}(M) = (1, 0).$$

Según III.11.1, Γ admite pues la recta Ox como tangente única en el punto O .

III.11.2 Sea f una función numérica definida sobre un intervalo I de \mathbf{R} y sea Γ su gráfica ($\Gamma \subset \mathbf{R}^2$).
 Si f es derivable en $t_0 \in I$, el conjunto Γ admite en $M_0 = (t_0, f(t_0))$ una tangente única, dirigida por el vector de componentes $(1, f'(t_0))$.

Demostración. Todo punto M de Γ se escribe de manera única

$$M = (t_M, f(t_M))$$

(véase la figura 30), y la aplicación $\Gamma \rightarrow I, M \mapsto t_M$ es continua (ya que es la restricción a Γ de la primera proyección). Además, se tiene $t_{M_0} = t_0$, y para $M \neq M_0$,

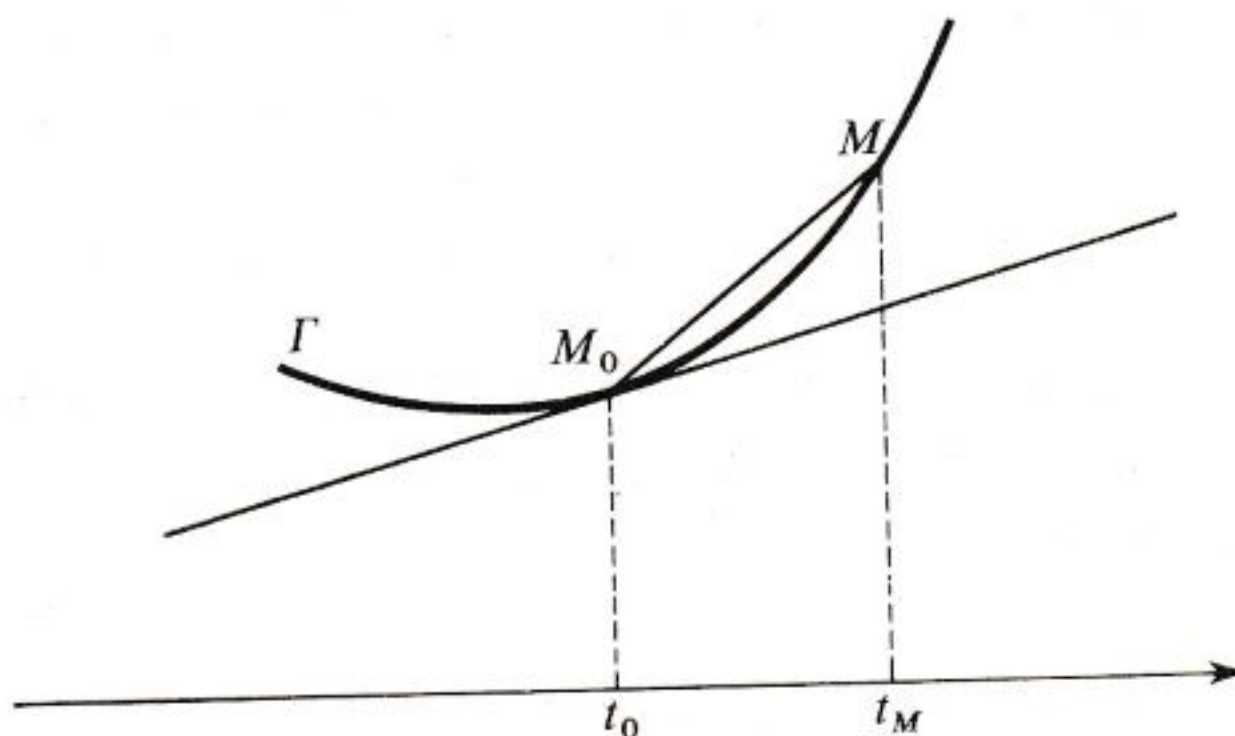


Figura 30.

la recta (M_0M) admite el vector director $\vec{V}(M)$ de componentes $\left(1, \frac{f(t_M) - f(t_0)}{t_M - t_0}\right)$.

Finalmente, puesto que f es continua en t_0 , M_0 es un punto de acumulación de Γ . Por definición de derivada, se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow t_0, t \neq t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0);$$

de donde (utilizando el teorema de composición de límites)

$$\lim_{M \rightarrow M_0, M \in \Gamma \setminus \{M_0\}} \vec{V}(M) = \vec{V}_0,$$

donde \vec{V}_0 designa el vector de componentes $(1, f'(t_0))$.

El resultado anunciado se desprende entonces de III.11.1.]

En el § V.6 estudiaremos las relaciones entre el concepto de tangente geométrica a un conjunto y el de tangente a un arco.

Del mismo modo se establecería el resultado más general que sigue:

Sea \mathcal{E} un espacio afín sobre un e.v.n. cualquiera E , sea $f: I \rightarrow \mathcal{E}$ una aplicación definida sobre un intervalo I de \mathbf{R} y sea Γ su gráfica

$$(\Gamma \subset I \times \mathcal{E}).$$

Si f es derivable en un punto t_0 de I , entonces Γ admite en el punto

$$M_0 = (t_0, f(t_0)),$$

una tangente geométrica única, dirigida por el vector $(1, f'(t_0))$ de $\mathbf{R} \times E$.

Observación. El teorema III.11.2 no admite recíproco. Si $f: I \rightarrow \mathcal{E}$ es una función cuya gráfica admite una tangente única en el punto $(a, f(a))$ no se puede en general afirmar que f sea derivable en a (incluso suponiendo f continua): por ejemplo, en \mathbf{R}^2 , la gráfica de la función continua $f: x \mapsto \sqrt{|x|}$ admite en el punto $O = (0, 0)$ la recta Oy como tangente geométrica, pero f no es derivable en el punto $x = 0$.

Sin embargo, si f es continua en a y si la gráfica de f admite en el punto $[a, f(a)]$ una tangente geométrica única, no paralela a $\{0\} \times E$, entonces se puede demostrar que f es derivable en a .

Extensión. Concepto de variedad afín tangente

Manteniendo las notaciones de la definición III.11.1, proponemos las siguientes

Definición III.11.2

Para cada valor de adherencia T de la función $M \mapsto D_M$ en M_0 , la recta, que pasa por M_0 , de dirección T , se dice que es **tangente a Γ en M_0** .

Utilizando las propiedades de los valores de adherencia (véase tomo 2 p. 109) se ve que una recta \mathcal{G} es tangente a Γ en M_0 si, y solamente si, existe un subconjunto de Γ que admite a \mathcal{G} como **tangente única** en M_0 .

Por otra parte, si existe solamente una recta tangente a Γ en M_0 , esta recta es **la tangente a Γ en el sentido de la definición III.11.1**.

Definición III.11.3

Sea como siempre Γ una parte del espacio afín \mathcal{E} , M_0 un punto de $\bar{\Gamma}$ y \mathcal{F}_{M_0} la reunión de las rectas tangentes a Γ en M_0 . Si \mathcal{F}_{M_0} es una variedad afín \mathcal{V} , se dice que \mathcal{V} es **la variedad afín tangente a Γ en M_0** .
En particular, si Γ es un plano [resp. un hiperplano] se dice que es **el plano tangente [resp. el hiperplano tangente] a Γ en M_0** .

Ejemplo

En un espacio afín euclídeo de dimensión 3, sea S una esfera de centro O y sea $A \in S$.

Si Γ es un subconjunto de S que admite una tangente única en A , se ve fácilmente que esta tangente es ortogonal en A al radio OA (ya que la distancia angular entre las rectas (OA) y (AM) tiende a $\pi/2$ cuando M tiende a A en $S \setminus \{A\}$). Por otra parte, toda recta rr que pasa por A y es ortogonal a la recta OA es tangente a S (puesto que es la tangente única a la circunferencia sección de S por el plano que contiene a \mathcal{G} y O). Por lo tanto, la reunión de las tangentes a S en A es el plano ortogonal en A a la recta OA . Este plano es el **plano tangente en A a S** .

Observación. De un modo general, para que una parte S de un espacio afín euclídeo admita una variedad afín \mathcal{V} como variedad tangente en A , es necesario y suficiente que:

- El ángulo (comprendido entre 0 y $\pi/2$) de la recta AM con \mathcal{V} tienda a cero cuando el punto M tiende a A en $S \setminus \{A\}$.
- Para cada recta \mathcal{G} , que pase por A y esté contenida en \mathcal{V} , exista un subconjunto de S que admita a \mathcal{G} como tangente única en el punto A .

Con la definición III.11.3 se puede demostrar la proposición que sigue, análoga a III.11.2 y susceptible de generalizaciones a espacios afines cualesquiera:

III.11.3 Sea f una función numérica definida en un entorno V del punto (x_0, y_0) en \mathbb{R}^2 y sea S su gráfica, es decir la «superficie» de \mathbb{R}^3 de ecuación

$$z = f(x, y) \quad (x, y \in V).$$

Si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) , entonces el conjunto S admite el plano de ecuación

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0)$$

como **plano tangente geométrico en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$** .

Capítulo IV

Campos de vectores y torsores

Introducción

Veremos más adelante (Capítulo XI) que la Cinemática tiene como objetivo el estudio del campo de vectores constituido por las velocidades de los distintos puntos de un sistema en movimiento. El caso particular de un sistema sólido nos llevará a considerar campos de vectores de un tipo particular denominados *equiproyectivos*.

Por otra parte, el problema de la reducción de un sistema de fuerzas aplicadas a un sólido ha llevado a los científicos de la Mecánica a la introducción del concepto dinámico de *torsor*.

En este capítulo vamos a estudiar a priori, desde un punto de vista geométrico, los conceptos de *campo equiproyectivo* y de *torsor*, y vamos a ver cómo en el espacio afín euclídeo orientado de dimensión tres, el concepto de campo equiproyectivo se reduce al de torsor.

Pero los campos equiproyectivos no son sino campos de vectores muy particulares. Con vistas a las aplicaciones a la Física expondremos pues también algunas propiedades generales de los campos de vectores diferenciables.

Los resultados de este capítulo se utilizarán en el capítulo XI para la Cinemática del sólido; se utilizarán también en Mecánica para el estudio del equilibrio y del movimiento de un cuerpo sólido, y el curso de Física (magnetismo, electricidad) proporcionará ejemplos de campos de vectores haciendo ver la utilidad de los conceptos introducidos.

§ IV.1 ENDOMORFISMOS ANTISIMÉTRICOS DE UN ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

El presente § se dedica al estudio de algunos complementos de Álgebra lineal que son necesarios para una presentación correcta de los *campos equiproyectivos* y de los *torsores*.

● A lo largo de todo este §, la letra E designará un *espacio vectorial euclídeo* de dimensión $n \geq 1$.

Recordemos que el *traspuesto* ${}^t\varphi$ de un endomorfismo $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ es el endomorfismo de E definido por

$$(\forall x \in E, \forall y \in E) \quad {}^t\varphi(x) \cdot y = x \cdot \varphi(y)$$

(véase tomo I, p. 477).

Vamos a definir ciertas clases de *aplicaciones* de E en E que se introducen en Mecánica y haremos ver que tales aplicaciones son *endomorfismos* de E .

Definición IV.1.1

Se dice que una aplicación $\varphi : E \rightarrow E$ es **antisimétrica** cuando verifica

$$(1) \quad (\forall x \in E, \forall y \in E) \quad x \cdot \varphi(y) + \varphi(x) \cdot y = 0.$$

Teorema IV.1.1

|| Toda **aplicación antisimétrica** de E en E es **lineal**. Dicho de otro modo, es un **endomorfismo antisimétrico** de E .

Demostración. Observemos en primer lugar que, por la simetría del producto escalar, se puede escribir (1) en la forma

$$x \cdot \varphi(y) = -\varphi(x) \cdot y = -y \cdot \varphi(x).$$

Si la aplicación $\varphi : E \rightarrow E$ es antisimétrica, se tiene pues, para todos los $x, y, z \in E$ y todos los $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} z \cdot [\varphi(\lambda x + \mu y) - \lambda \varphi(x) - \mu \varphi(y)] &= z \cdot \varphi(\lambda x + \mu y) - \lambda z \cdot \varphi(x) - \mu z \cdot \varphi(y) = \\ &= -(\lambda x + \mu y) \cdot \varphi(z) + \lambda x \cdot \varphi(z) + \mu y \cdot \varphi(z) \\ &= [-(\lambda x + \mu y) + \lambda x + \mu y] \cdot \varphi(z) = 0. \end{aligned}$$

Si los vectores $x, y \in E$ y los reales λ, μ son fijos, el vector

$$u = \varphi(\lambda x + \mu y) - \lambda \varphi(x) - \mu \varphi(y)$$

verifica por lo tanto:

$$(\forall z \in E) \quad z \cdot u = 0.$$

De ello se deduce $u = 0$, de donde, para todos los $x, y \in E$ y todos los $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$:

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y).$$

En otros términos, φ es lineal.]

Observaciones

1. Se puede definir el concepto de aplicación **simétrica** $\varphi : E \rightarrow E$ por la condición

$$(2) \quad (\forall x \in E, \forall y \in E), \quad x \cdot \varphi(y) = \varphi(x) \cdot y$$

y se vería igualmente que *toda aplicación simétrica de E en E es lineal*. Por otra parte, se ve fácilmente que estas definiciones, lo mismo que las propiedades arriba anunciadas, se extienden al caso en el que E es un *espacio prehilbertiano* real cualquiera.

2. Para que un **endomorfismo** $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ sea **simétrico** (resp. **antisimétrico**), es necesario y suficiente que su traspuesto ${}^t\varphi$ verifique ${}^t\varphi = \varphi$ (resp. ${}^t\varphi + \varphi = 0$).

3. Si $n = 1$, todo endomorfismo antisimétrico de E es nulo. En lo que sigue supondremos $n \geq 2$.

Propiedades

1. Si el endomorfismo φ de E es *antisimétrico*, se tiene:

$$(\forall x \in E) \quad x \cdot \varphi(x) + \varphi(x) \cdot x = 0, \text{ o sea } x \cdot \varphi(x) = 0.$$

Por lo tanto, *un endomorfismo antisimétrico transforma todo vector x en un vector ortogonal a x* .

2. Siguiendo en el supuesto de que φ es *antisimétrico*, sean

$$x \in \text{Ker}(\varphi) \quad \text{e} \quad y \in \text{Im}(\varphi);$$

y sea $z \in E$ tal que $y = \varphi(z)$. Se tiene

$$x \cdot y = x \cdot \varphi(z) = -\varphi(x) \cdot z = 0.$$

Por lo tanto, los subespacios $\text{Ker}(\varphi)$ e $\text{Im}(\varphi)$ de E son ortogonales y como se tiene

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(E)$$

(véase tomo I, p. 295), se deduce: *los subespacios $\text{Ker}(\varphi)$ e $\text{Im}(\varphi)$ son suplementarios ortogonales.*

● 3. Resulta finalmente obvio que los endomorfismos simétricos (resp. antisimétricos) de E constituyen un *subespacio vectorial* de $\mathcal{L}(E)$. **Al subespacio de los endomorfismos antisimétricos de E lo designaremos aquí por $\mathcal{A}(E)$.**

Utilización de una base ortonormal

Designemos por φ un endomorfismo de E , por $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ una base ortonormal de E y por

$$[\varphi_{ij}] = [\varphi(e_j) \cdot e_i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

la matriz de φ en esta base. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ son dos vectores cualesquiera de E , se tiene

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} x_j e_i \quad \text{y} \quad \varphi(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} y_j e_i,$$

de donde

$$\varphi(x) \cdot y + x \cdot \varphi(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\varphi_{ij} + \varphi_{ji}) x_i y_j.$$

Inmediatamente se deduce

Teorema IV.1.2

|| Para que un endomorfismo $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ sea **antisimétrico**, es necesario y suficiente que exista **una base ortonormal** de E en la cual la matriz de φ sea **antisimétrica** y toda base ortonormal de E posee entonces la misma propiedad.

Ejemplo

Los endomorfismos antisimétricos de \mathbf{R}^2 (provisto de su estructura euclídea canónica) son de la forma $(x, y) \mapsto (\lambda y, -\lambda x)$ (siendo fijo $\lambda \in \mathbf{R}$). Forman un espacio vectorial de dimensión 1, constituido por el endomorfismo nulo y las semejanzas directas de ángulo $\pm \pi/2$.

De un modo más general, cuando $\dim(E) = n$, la elección de una base ortonormal define un isomorfismo del espacio vectorial $\mathcal{A}(E)$ sobre el espacio vectorial de las matrices antisimétricas de orden n , de donde resulta

$$\dim(\mathcal{A}(E)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En particular, si $\dim(E) = 3$, el espacio $\mathcal{A}(E)$ es también de dimensión 3.

Vamos ahora a limitar nuestra atención al caso (importante para las aplicaciones) en el que $\dim(E) = 3$ y veremos que entonces, eligiendo una orientación en E , se puede definir un isomorfismo natural de E en $\mathcal{A}(E)$.

§ IV.2 CASO DE UN ESPACIO DE DIMENSIÓN 3

● La letra E designa ahora un **espacio vectorial euclídeo orientado** de dimensión 3, cuyos elementos se representarán por letras cubiertas con flechas.

Repaso acerca del producto mixto y del producto vectorial

1. Sean $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ tres vectores de E ; si $(U_i), (V_i), (W_i)$ designan las componentes de estos vectores en una base ortonormal directa \mathcal{B} de E , el escalar

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{vmatrix}$$

no depende de la base elegida \mathcal{B} . Se le da el nombre de **producto mixto** de $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ (véase tomo I, p. 453). Lo mismo que en el capítulo II, lo designaremos por $[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}]$ (para distinguirlo de la terna $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$).

2 Si \vec{U} y \vec{V} son dos vectores de E , el **producto vectorial** $\vec{U} \wedge \vec{V}$ de \vec{U} y \vec{V} es el vector de E definido por

$$(1) \quad (\forall \vec{W} \in E), \quad (\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W} = [\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}]$$

(véase tomo I, p. 453). Según esta definición, se ve que la aplicación:

$$E \times E \rightarrow E, \quad (\vec{U}, \vec{V}) \mapsto \vec{U} \wedge \vec{V}$$

es **bilineal y antisimétrica** (es decir verifica: $\vec{V} \wedge \vec{U} = -\vec{U} \wedge \vec{V}$).

Sean $(U_i), (V_i)$ ($i = 1, 2$) las componentes de \vec{U}, \vec{V} en una base *ortonormal directa* de E ; las componentes del vector $\vec{P} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ en esta misma base son entonces

$$(2) \quad \boxed{\begin{aligned} P_1 &= U_2 V_3 - U_3 V_2, & P_2 &= U_3 V_1 - U_1 V_3, \\ & & P_3 &= U_1 V_2 - U_2 V_1. \end{aligned}}$$

Estos son los *cofactores de los términos de la primera fila* de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix}.$$

Resulta cómodo en general presentar los cálculos de la forma siguiente:

$$\vec{U} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} \quad \vec{V} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} \quad \vec{U} \wedge \vec{V} \begin{vmatrix} U_2 V_3 - U_3 V_2 \\ U_3 V_1 - U_1 V_3 \\ U_1 V_2 - U_2 V_1 \end{vmatrix}.$$

En particular, si la base considerada es $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, se tiene

$$(3) \quad \boxed{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3}.$$

Fórmula del doble producto vectorial

La fórmula que sigue es de uso corriente en Mecánica:

IV.2.1 Si $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ son tres vectores cualesquiera de E , se tiene ⁽¹⁾:

$$\left\{ \begin{array}{l} (4) \quad \vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = -(\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{W} + (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} \\ (4') \quad (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W} = -\vec{U}(\vec{V} \cdot \vec{W}) + \vec{V}(\vec{U} \cdot \vec{W}). \end{array} \right.$$

Demostración. Es evidente que (4') se deduce de (4) por intercambio de \vec{U} y \vec{W} . Para establecer (4) elijamos una base ortonormal directa $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tal que $\vec{U} = k\vec{e}_1$.

Poniendo $\vec{V} \wedge \vec{W} = P_1 \vec{e}_1 + P_2 \vec{e}_2 + P_3 \vec{e}_3$, se tiene, según (3):

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = -kP_3 \vec{e}_2 + kP_2 \vec{e}_3;$$

pero por aplicación de (2) se tiene también:

$$P_2 = V_3 W_1 - V_1 W_3, \quad P_3 = V_1 W_2 - V_2 W_1.$$

De ello se deduce:

$$\begin{aligned} \vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) &= -k(V_1 W_2 - V_2 W_1) \vec{e}_2 + k(V_3 W_1 - V_1 W_3) \vec{e}_3 \\ &= kW_1(V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3) - kV_1(W_1 \vec{e}_1 + W_2 \vec{e}_2 + W_3 \vec{e}_3) \\ &= (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{W}. \end{aligned}$$

Las relaciones (4) y (4') muestran que el producto vectorial no es asociativo.

⁽¹⁾ Las fórmulas (4) y (4') serán fáciles de recordar si se observa que el primer término del segundo miembro viene precedido del signo $-$ y que los vectores $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ figuran en él en el mismo orden que en el primer miembro; finalmente el segundo miembro de (4) y (4') es una combinación lineal de los vectores que figuran en el paréntesis del primer miembro.

Aplicación. Problema de la división vectorial

IV.2.2 Sean \vec{U}, \vec{V} dos vectores dados de E tales que $\vec{U} \neq 0$. Para que exista (por lo menos) un vector $\vec{X} \in E$ que verifique

$$(5) \quad \vec{U} \wedge \vec{X} = \vec{V},$$

es necesario y suficiente que $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$. Los vectores \vec{X} que verifican (5) vienen entonces dados por

$$(6) \quad \vec{X} = -\frac{\vec{U} \wedge \vec{V}}{\vec{U}^2} + \lambda \vec{U}$$

siendo $\lambda \in \mathbf{R}$ arbitrario.

Demostración

a) Si $\vec{U} \wedge \vec{X} = \vec{V}$, se tiene:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{X}) = [\vec{U}, \vec{V}, \vec{X}] = 0,$$

lo cual demuestra que la condición enunciada es necesaria.

b) Inversamente, si $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$, la fórmula (4) muestra que el vector

$$\vec{X}_0 = -\frac{\vec{U} \wedge \vec{V}}{\|\vec{U}\|^2}$$

verifica

$$\vec{U} \wedge \vec{X}_0 = -\frac{1}{\|\vec{U}\|^2} (\vec{U} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V})) = \vec{V}.$$

Para que un vector \vec{X} verifique (5) es entonces necesario y suficiente que se tenga

$$(7) \quad \vec{U} \wedge (\vec{X} - \vec{X}_0) = 0.$$

Ahora bien, la relación (7) equivale a la existencia de un número $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $\vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda \vec{U}$; de donde se desprende el resultado.]]

Observación. Designemos por (U_i) , (V_i) , (X_i) ($i = 1, 2, 3$) las componentes de los vectores \vec{U} , \vec{V} , \vec{X} en una base ortonormal directa $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La ecuación vectorial (5) equivale entonces al sistema escalar

$$(5') \quad \begin{aligned} U_2 X_3 - U_3 X_2 &= V_1, & U_3 X_1 - U_1 X_3 &= V_2, \\ & & U_1 X_2 - U_2 X_1 &= V_3 \end{aligned}$$

y el problema planteado se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones lineales (5') con las incógnitas X_1, X_2, X_3 .

Al ser no nulo el vector \vec{U} , el sistema (5') es de rango 2. La condición de compatibilidad es $U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = 0$ y nos encontramos de nuevo con la condición $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$. Cuando ésta se cumple, las soluciones de (5') forman un subespacio afín de dimensión 1 de \mathbf{R}^3 y se encuentran así de nuevo los resultados obtenidos mediante el cálculo vectorial.

Endomorfismo antisimétrico asociado a un vector de E

A cada vector \vec{R} de E , asociemos el endomorfismo φ_R de E definido por:

$$(\forall \vec{X} \in E), \quad \varphi_R(\vec{X}) = \vec{R} \wedge \vec{X}.$$

Para todos los $\vec{X}, \vec{Y} \in E$, se tiene

$$(8) \quad \vec{Y} \cdot \varphi_R(\vec{X}) = \vec{Y} \cdot (\vec{R} \wedge \vec{X}) = (\vec{R} \wedge \vec{X}) \cdot \vec{Y} = [\vec{R}, \vec{X}, \vec{Y}]$$

y

$$\vec{X} \cdot \varphi_R(\vec{Y}) = \vec{X} \cdot (\vec{R} \wedge \vec{Y}) = [\vec{R}, \vec{Y}, \vec{X}] = -[\vec{R}, \vec{X}, \vec{Y}],$$

de donde

$$(\forall \vec{X}, \vec{Y} \in E), \quad \vec{X} \cdot \varphi_R(\vec{Y}) + \vec{Y} \cdot \varphi_R(\vec{X}) = 0.$$

El endomorfismo φ_R es por lo tanto antisimétrico.

Si $\vec{R} \neq 0$, el **núcleo** del endomorfismo φ_R es la *recta vectorial* engendrada por el vector \vec{R} y por otra parte la proposición IV.2.2 pone de manifiesto que su **imagen** es el *plano vectorial* ortogonal a \vec{R} .

Se comprueba así, en este caso particular, que el núcleo y la imagen de un endomorfismo antisimétrico son subespacios *suplementarios ortogonales*.

Estudiemos ahora la aplicación $E \rightarrow \mathcal{A}(E)$, $\vec{R} \mapsto \varphi_R$ así obtenida.

Teorema IV.2.3

Para cada $\vec{R} \in E$, sea φ_R el endomorfismo antisimétrico de E definido por

$$(\forall \vec{X} \in E) \quad \varphi_R(\vec{X}) = \vec{R} \wedge \vec{X}.$$

Entonces la aplicación $\theta : \vec{R} \mapsto \varphi_R$ es un **isomorfismo** de E sobre $\mathcal{A}(E)$.

Demostración. Es inmediato que la aplicación θ es *lineal*. Al ser $\dim(E) = \dim(\mathcal{A}(E)) = 3$, bastará demostrar que θ es *inyectiva* (véase tomo 1, p. 299), lo que equivale a demostrar que $\vec{R} \neq 0$ implica $\varphi_R \neq 0$. Ahora bien, si $\vec{R} \neq 0$, se podrán elegir dos vectores \vec{X}, \vec{Y} de E tales que el producto mixto $[\vec{R}, \vec{X}, \vec{Y}]$ sea no nulo (ello equivale a elegir \vec{X} e \vec{Y} de modo que \vec{R}, \vec{X} e \vec{Y} sean linealmente independientes). Según (8) se tiene entonces

$$\vec{Y} \cdot \varphi_R(\vec{X}) = [\vec{R}, \vec{X}, \vec{Y}] \neq 0;$$

de donde resulta que φ_R no es el endomorfismo nulo, con lo que queda demostrado el teorema. \square

Corolario

Para todo endomorfismo antisimétrico φ de E , existe un vector único $\vec{R} \in E$ tal que se tiene:

$$(\forall \vec{X} \in E) \quad \varphi(\vec{X}) = \vec{R} \wedge \vec{X}.$$

Determinación efectiva de \vec{R}

Una vez elegida la base ortonormal $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq 3}$, sea φ_R el endomorfismo definido por el vector $\vec{R} = R_1 \vec{e}_1 + R_2 \vec{e}_2 + R_3 \vec{e}_3$ y sea (φ_{ij}) la matriz de φ_R en la base (\vec{e}_i) . Según (8) resulta, para $i = 1, 2, 3$,

$$\varphi_{ij} = e_i \cdot \varphi(e_j) = [R, \vec{e}_j, \vec{e}_i] = -[\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{R}].$$

Ahora bien, se tiene $[\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k] = 0$ si los índices i, j, k no son todos distintos y $[\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k] = 1$ si (i, j, k) es una permutación *par* de $(1, 2, 3)$. Para toda permutación *par* (i, j, k) de $(1, 2, 3)$ se tiene pues $R_k = -\varphi_{ij}$, es decir

$$(9) \quad \varphi_{23} = -\varphi_{32} = -R_1; \quad \varphi_{31} = -\varphi_{12} = -R_2; \quad \varphi_{12} = -\varphi_{21} = -R_3.$$

Recíprocamente, si φ es un endomorfismo antisimétrico de E , definido por su matriz (φ_{ij}) en la base (\vec{e}_j) , las relaciones (9) determinan el vector único $\vec{R} = R_1 \vec{e}_1 + R_2 \vec{e}_2 + R_3 \vec{e}_3$ tal que $\varphi = \varphi_R$.]

● Recordemos que si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ es una base ortonormal directa de E , el endomorfismo asociado al vector $\vec{R} = pe_1 + qe_2 + re_3$ está representado en esta base por la matriz

$$(10) \quad M(p, q, r) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que toda matriz antisimétrica de orden 3 se puede poner en la forma 10, en la práctica se podrá proceder a la identificación.

Observación importante. Si se cambia la orientación de E por su opuesta, la aplicación $\theta : \vec{R} \mapsto \varphi_R$ se cambiará en su *opuesta*.

§ IV.3 CONCEPTO GENERAL DE CAMPO DE VECTORES

● En todo lo que sigue, se designa por \mathcal{E} un **espacio afín** ligado a un espacio vectorial E , de dimensión finita n . El espacio vectorial E se supondrá provisto de la estructura afín canónica.

Definición IV.3.1

¿ Un **campo de vectores** sobre una parte A de \mathcal{E} es una aplicación de A en E .

Sea $\vec{V} : M \rightarrow \vec{V}(M)$ un campo de vectores sobre A : se dice que el campo \vec{V} es *continuo* si la aplicación es continua.

Cuando la parte A es *abierto*, se dice que el campo \vec{V} es *diferenciable* (resp. k veces diferenciable de clase C^k) si la aplicación es diferenciable (resp. k veces diferenciable, de clase C^k).

Cuando la parte A es *cualquiera*, se dirá que un campo de vectores \vec{V} sobre A es *diferenciable* (resp. k veces diferenciable, de clase C^k), cuando exista un abierto Ω que contiene a A y un campo de vectores \vec{W} , diferenciable (resp. k veces diferenciable, de clase C^k) sobre Ω tal que \vec{V} sea la restricción de \vec{W} sobre A .

Vamos a insistir sobre el concepto de *campo afín* en vista de la importancia que este concepto tiene en lo que sigue del presente capítulo:

Definición IV.3.2

Sea A una parte de \mathcal{E} . De un **campo de vectores** sobre A se dice que es **afín** si es la restricción sobre A de una aplicación afín de \mathcal{E} en E .

El concepto de campo afín sobre una parte A de \mathcal{E} se reduce, en general, al concepto de campo afín sobre \mathcal{E} . En efecto, si A contiene por lo menos $n + 1$ puntos afínmente independientes (véase el cap. I), una aplicación afín de \mathcal{E} en E queda totalmente determinada cuando se dan sus valores sobre A .

Por esta razón, vamos a limitarnos en todo el presente capítulo a campos afines definidos sobre todo \mathcal{E} .

Inmediatamente se tiene:

IV.3.1 Para que un campo de vectores f sobre \mathcal{E} sea **afín**, es necesario y suficiente que exista un endomorfismo φ de E y un punto O de \mathcal{E} tales que se tenga:

$$(1) \quad (\forall M \in \mathcal{E}) \quad f(M) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OM});$$

cuando esto ocurre, la relación (1) se cumple para todo $O \in \mathcal{E}$.

El endomorfismo φ queda totalmente determinado cuando se da f ; se dirá entonces que φ es el *endomorfismo asociado al campo afín f* , o la **parte lineal** de f (véase definición I.4.2).

Espacios vectoriales de campos de vectores

Si X es un conjunto no vacío *cualquiera*, el conjunto $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, E)$ de todas las aplicaciones de X en E constituye un espacio vectorial respecto a las leyes naturales definidas por:

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in X) \quad (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \quad (f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{F}) \\
 (\lambda f)(x) &= \lambda \cdot f(x) \quad (f \in \mathcal{F}, \lambda \in \mathbf{R}).
 \end{aligned}$$

En particular, el conjunto de los *campos de vectores sobre una parte A de \mathcal{E}* constituye un espacio vectorial.

Es inmediato que cada uno de los conjuntos de campos de vectores *a), b), c)* que siguen, es un *subespacio vectorial* del espacio de los campos de vectores sobre A :

- a) el espacio vectorial de los campos de vectores *continuos* sobre A ;
- b) el espacio vectorial de los campos *diferenciables* (resp. *k veces diferenciables, de clase C^k*) sobre A .
- c) el espacio vectorial de los campos *afines* sobre A .

Si f es un *campo de vectores* sobre A y si α es una función numérica sobre A , se define un campo de vectores sobre A por:

$$(\forall M \in A) \quad M \mapsto \alpha(M)f(M).$$

Este campo recibe el nombre de *producto de f por α* y se designa por αf . Es evidente que la aplicación $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$ define, sobre el espacio de los *campos de vectores sobre A* , una estructura de *módulo* sobre la **R**-álgebra $\mathcal{F}_R(A)$ de las *funciones numéricas sobre A* .

En el resto de este capítulo, todos los campos de vectores diferenciables (resp. de clase C^k , k veces diferenciables) que vamos a considerar se supondrán definidos sobre *abiertos* de \mathcal{E} .

Divergencia de un campo diferenciable ⁽¹⁾

● Sea \vec{F} un campo de vectores *diferenciable* sobre un abierto Ω de \mathcal{E} . Por definición, para todo punto $M \in \Omega$, la **diferencial** $\vec{F}'(M)$ de la aplicación \vec{F} en el punto M es una aplicación lineal de E en E , es decir, un *endomorfismo de E* (véase tomo 2, § V.2). La designaremos aquí por DF_M ⁽²⁾ y daremos la siguiente

⁽¹⁾ Las definiciones y propiedades que anteceden se extienden fácilmente al caso en que \mathcal{E} es un espacio afín sobre un e.v.n. de dimensión infinita. Por el contrario, la definición de la divergencia exige que \mathcal{E} sea de dimensión finita.

⁽²⁾ La notación DF_M (o dF_M) se utiliza muchas veces en Geometría, en lugar de $F'(M)$, para designar la diferencial en el punto M de una aplicación F ; pero, en principio, esta notación debería reservarse más bien para las aplicaciones diferenciales de una variedad en otra (véase [2]). Aconsejamos al lector que se familiarice con los dos tipos de notación.

Definición IV.3.3

Sea Ω un abierto de \mathcal{E} y \vec{F} un campo de vectores diferenciable sobre Ω ; para todo punto $M \in \Omega$, se da el nombre de **divergencia de \vec{F} en M** y se la designa por $\text{div}_M \vec{F}$, a la **traza del endomorfismo $D\vec{F}_M$ de E** . La función numérica $M \mapsto \text{div}_M \vec{F}$ se llama **divergencia de \vec{F}** y se designa por $\text{div}(\vec{F})$.

Cálculo de la divergencia

Sea $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ una base cualquiera de E . Con las mismas notaciones e hipótesis de la definición IV.3.3, el campo \vec{F} se define mediante sus *componentes* P_1, P_2, \dots, P_n en la base (\vec{e}_i) , que son funciones *numéricas* diferenciables, de la manera siguiente

$$(\forall M \in \Omega) \quad \vec{F}(M) = \sum_{i=1}^n P_i(M) \vec{e}_i.$$

Si se refiere \mathcal{E} a un sistema de referencia $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de origen cualquiera O , las funciones P_i se identifican a funciones de las n coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) , las cuales designaremos sencillamente poniendo

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto P_i(x_1, \dots, x_n).$$

La aplicación \vec{F} se identifica entonces a una aplicación de un abierto de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^n , y la matriz del endomorfismo $D\vec{F}_M$ en la base (\vec{e}_i) es la *matriz jacobiana*

$$\left[\frac{\partial P_i}{\partial x_j} (x_1, \dots, x_n) \right]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

(véase tomo 2). Por definición la *traza* de $D\vec{F}_M$ es la traza de esta matriz, es decir el número (independiente de la base elegida):

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i} (x_1, \dots, x_n).$$

Se tiene pues:

$$(2) \quad \boxed{\text{div}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i}}$$

siendo la relación (2) válida en toda base de E .

Ejemplo

En un espacio afín *euclídeo* de dimensión n , sea \vec{F} el campo de vectores definido (para $M \neq 0$) por

$$\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^\alpha},$$

siendo O un punto fijo y α un número real. En un sistema de referencia ortonormal de origen O , las componentes de \vec{F} son las funciones

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i}{(\sum x_i^2)^{\alpha/2}},$$

de donde, mediante un cálculo fácil, se obtiene (designando por M al punto de coordenadas x_i)

$$\operatorname{div}_M \vec{F} = \frac{n - \alpha}{(\sum x_i^2)^{\alpha/2}} = \frac{n - \alpha}{\|\overrightarrow{OM}\|^\alpha}.$$

Si se toma $\alpha = n$, se tiene: $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$, y se dice entonces que el campo \vec{F} es *newtoniano*.

Observación importante. Para simplificar la escritura, se designa a veces por $\operatorname{div} \vec{F}(M)$ al valor en el punto M de la divergencia de \vec{F} ; pero esta notación no debe hacer creer que la función $\operatorname{div}(\vec{F})$ es la compuesta de la función vectorial \vec{F} con una aplicación denominada «divergencia». Se observará que para todo abierto Ω de \mathcal{E} , la aplicación $\vec{F} \mapsto \operatorname{div}(\vec{F})$ es una aplicación lineal del espacio de los campos de vectores diferenciables sobre Ω , en el espacio de las funciones numéricas sobre Ω . Más adelante daremos una caracterización del núcleo de esta aplicación en el caso en que $\dim(\mathcal{E}) = 3$ (§ 5).

§ IV.4 CAMPOS DE GRADIENTES (EN UN ESPACIO EUCLÍDEO)

● Supondremos en este § que \mathcal{E} es un *espacio afín euclídeo*, de dimensión $n \geq 1$, ligado al espacio vectorial euclídeo E .

Sea f una *función numérica diferenciable* sobre un abierto Ω de \mathcal{E} . Para todo $M \in \Omega$, la diferencial de f en el punto M es una *forma lineal* sobre E , que designaremos aquí por Df_M (véase la nota 2, p. 245).

Al ser E euclídeo, existe un vector único $\vec{V}_M \in E$ tal que

$$(\forall \vec{X} \in E) \quad Df_M(\vec{X}) = \vec{V}_M \cdot \vec{X}$$

(véase tomo 1, teorema XII.3.2).

Puntualizaremos el concepto de *gradiente* introducido en el tomo 2 poniendo:

Definición IV.4.1

Sea Ω un abierto del espacio afín euclídeo \mathcal{E} y sea $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una **función numérica diferenciable**.

Para todo $M \in \Omega$, se da el nombre de **gradiente de f en M** y se designa por $\text{grad}_M f$ al vector único \vec{V}_M de E que verifica:

$$(\forall \vec{X} \in E) \quad Df_M(\vec{X}) = \vec{V}_M \cdot \vec{X}.$$

El campo de vectores definido sobre Ω por $M \mapsto \vec{V}_M = \text{grad}_M f$ recibe el nombre de **gradiente de f** y se designa por $\text{grad}(f)$.

Observación. El valor en el punto M del gradiente de f se designa a veces por $\text{grad } f(M)$, y lo mismo que para la divergencia, esta notación no debe hacer creer que el gradiente de f sea una aplicación compuesta.

Expresión del gradiente en una base ortonormal

Sea $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ una base ortonormal cualquiera de \mathcal{E} y O un punto fijo.

Al igual que en el § anterior, designemos por $f(x_1, \dots, x_n)$ al valor de la función f en el punto de coordenadas (x_i) en el sistema de referencia $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ y sean

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

sus derivadas parciales.

Con las notaciones del tomo 2, se tiene

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i;$$

esta relación se traduce aquí por

$$(1) \quad Df_M(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) X_i,$$

para todo vector $\vec{X} = \sum_{i=1}^n X_i \vec{e}_i$ de E y todo punto M de coordenadas (x_i) .

Al ser la base (\vec{e}_i) ortonormal, el segundo miembro de (1) es el producto escalar del vector $\vec{X} = \sum_{i=1}^n X_i \vec{e}_i$ por el vector de componentes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n),$$

y último vector es precisamente $\text{grad}_M f$ y se tiene:

$$(2) \quad \boxed{\text{grad}_M f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_i}$$

para todo punto M de coordenadas (x_i) .

Ejemplo

Siendo $O \in \mathcal{E}$ fijo, sea f una función de la forma

$$(3) \quad f(M) = \varphi(r), \quad \text{con } r = \|\overrightarrow{OM}\|,$$

donde φ designa una función numérica derivable sobre un intervalo de \mathbf{R}_+ .

En un sistema de referencia ortonormado $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de origen O , se tiene:

$$r = [\sum (x_i)^2]^{1/2},$$

de donde, para $r \neq 0$,

$$\mathbf{grad} f = \sum_{i=1}^n \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} \vec{e}_i = \varphi'(r) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \vec{e}_i,$$

o sea

$$\boxed{\mathbf{grad} f = \varphi'(r) \frac{\overrightarrow{OM}}{r}}.$$

Se puede demostrar que las funciones de la forma (3) son las únicas cuyo gradiente es, en cada punto, colineal con el vector \overrightarrow{OM} (véase ejercicio IV.1). Los campos de gradiente de esta forma, desempeñan un papel importante en Mecánica (véase capítulo XI).

Potenciales escalares

Sea Ω un abierto de \mathcal{E} , y designemos por \mathcal{D}_Ω (resp. \mathcal{V}_Ω) al espacio vectorial de las funciones numéricas diferenciables sobre Ω (resp. de los campos de vectores sobre Ω). La aplicación $\mathcal{D}_\Omega \rightarrow \mathcal{V}_\Omega : f \mapsto \mathbf{grad}(f)$ es evidentemente *lineal*; su imagen es un subespacio de \mathcal{V}_Ω denominado espacio de los *campos de gradientes*. Los campos de gradientes poseen propiedades particulares que son de importancia en Física y en Geometría, lo cual hace conveniente dar de ellos una caracterización práctica. Establecemos:

Definición IV.4.2

Sea Ω un abierto de \mathcal{E} y \vec{F} un campo de gradientes sobre Ω ; se dice que la función numérica diferenciable f sobre Ω es un **potencial escalar** de \vec{F} si se tiene:

$$\mathbf{grad}(f) = \vec{F}.$$

Se dice entonces que \vec{F} **deriva del potencial** f .

En primer lugar resulta fácil ver que cuando Ω es un *dominio*, el potencial escalar es único, salvo por una constante aditiva. Se sabe, en efecto, que entonces la únicas funciones numéricas cuya diferencial es nula son las *constantes* (véase tomo 2, Prop. V.5.3). Estableceremos el siguiente enunciado:

IV.4.1 Sea \vec{F} un campo de gradientes sobre el dominio Ω de \mathcal{E} . Si f es un **potencial escalar** de \vec{F} , los otros potenciales escalares de \vec{F} son las funciones de la forma

$$M \mapsto f(M) + C \quad (C \in \mathbf{R}).$$

El teorema IV.4.1 significa pues que, si Ω es un *dominio*, el núcleo de la aplicación lineal $f \mapsto \text{grad}(f)$ es el espacio vectorial de las *funciones constantes sobre Ω* .

Sea \vec{F} un campo de gradientes sobre el abierto Ω ; en un sistema de referencia *ortonormal* $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, el campo \vec{F} queda definido por sus *componentes* (P_1, P_2, \dots, P_n) . Si f es un potencial escalar de \vec{F} , se tiene pues

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad P_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad P_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Supongamos que sea \vec{F} de clase C^1 , o sea f de clase C^2 . Entonces, según el teorema de Schwarz (tomo 2, p. 254), se tiene:

$$(5) \quad \boxed{(\forall i, j = 1, 2, \dots, n) \quad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}}.$$

Se ve pues que un campo de gradientes de clase C^1 está sujeto a las condiciones (5) en todo sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E} .

La recíproca de esta propiedad se cumple *localmente*, como resultará del teorema siguiente, que es fundamental.

Teorema IV.4.2

|| Sea \vec{F} un campo de vectores de clase C^1 sobre un abierto Ω de \mathcal{E} , definido por sus componentes (P_1, \dots, P_n) en un sistema de referencia **ortonormal**.

|| Si las condiciones (5) se satisfacen sobre Ω , entonces todo punto $M_0 \in \Omega$ admite un entorno sobre el cual \vec{F} es un **campo de gradientes**.

Observación. El problema consiste en determinar una función numérica f , definida sobre un entorno de M_0 , que verifique:

$$df = \sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n) dx_i;$$

lo estudiaremos con detalle en el tomo 4 (§ VI.11). Damos aquí una demostración geométrica directa.

Demostración. Mediante una traslación podemos reducirnos al caso en el que $M_0 = O$ sea el origen del sistema de referencia elegido. Existe entonces una bola abierta B , de centro O y de radio > 0 , contenida en Ω .

Para todo punto $M \in B$, de coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) , pongamos:

$$f(M) = \int_0^1 \vec{F}(O + t \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{OM} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n P_i(tx_1, \dots, tx_n) x_i dt.$$

Vamos a demostrar que f es un potencial escalar de \vec{F} sobre B . Para ello basta establecer que se tiene, para todo $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i;$$

la continuidad de las funciones P_i implicará la diferenciabilidad de f (véase tomo 2, teorema V.7.3). Nos limitaremos al caso en el que $i = 1$, pudiendo deducirse los demás casos por permutación de las coordenadas.

Por derivación bajo el signo \int (véase tomo 2, p. 592), se tiene aquí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \left[P_1(tx_1, \dots, tx_n) + t \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial P_i}{\partial x_1}(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt.$$

Siendo el punto M fijo, pongamos $\psi(t) = P_1(tx_1, \dots, tx_n)$. Según las relaciones (5) se tiene, para todo $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_1} = \frac{\partial P_1}{\partial x_i},$$

de donde

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial P_i}{\partial x_1} (tx_1, \dots, tx_n) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial P_1}{\partial x_i} (tx_1, \dots, tx_n) = \psi'(t),$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 [\psi(t) + t\psi'(t)] dt = [t\psi(t)]_0^1 = \psi(1) = P_1(x_1, \dots, x_n)$$

o sea $\partial f / \partial x_1 = P_1$.]

Observación. Con las hipótesis de IV.4.2, el campo \vec{F} no admite necesariamente potencial escalar sobre todo Ω , a menos que Ω sea un dominio simplemente conexo (véase tomo 4 p. 360).

Laplaciana

Definición IV.4.3

§ Sea f una función numérica dos veces diferenciable sobre un abierto Ω
 del espacio euclídeo \mathcal{E} . La **Laplaciana** de f es la función numérica

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f).$$

Sigamos designando por $f(x_1, \dots, x_n)$ al valor de f en el punto de coordenadas (x_i) en un sistema de referencia **ortonormal** de \mathcal{E} . Según la relación (2) y la expresión de la divergencia obtenida en el § anterior, se tiene:

$$(6) \quad \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Observación. La Laplaciana se define a veces mediante la relación (6); en tal caso es preciso tener en cuenta que esta definición no depende de la base ortonormal elegida.

Extensión

De un modo más general, sea q una forma cuadrática *no degenerada* sobre un espacio vectorial real E de dimensión finita n y sea B su *forma polar*. A cada función numérica diferenciable

sobre un abierto de E se puede asociar un campo de vectores análogo al gradiente. En efecto, para todo $M \in \Omega$, existe un vector \vec{V}_M único que verifica:

$$(\forall \vec{X} \in E) \quad Df_M(\vec{X}) = B(\vec{V}_M, \vec{X}).$$

La aplicación $M \mapsto \vec{V}_M$ así obtenida define un campo de vectores sobre Ω , al que llamaremos q -gradiente y lo designaremos por $\text{grad}_q(f)$.

Si f es dos veces diferenciable, definiremos la q -Laplaciana de f por:

$$\Delta_q(f) = \text{div}(\text{grad}_q(f)).$$

Designemos por $(p, n-p)$ la *signatura* de la forma q y llamemos *base ortogonal reducida* de E a toda base (\vec{e}_i) en la cual se tiene:

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

En una tal base, $\text{grad}_q(f)$ es el campo de componentes

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}, -\frac{\partial f}{\partial x_{p+1}}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

y se tiene:

$$(7) \quad \Delta_q(f) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

Por construcción, la q -Laplaciana es invariante en el grupo ortogonal de la forma q . En la teoría de la relatividad se presenta a consideración el caso en que $n = 4$ y $p = 3$. El grupo ortogonal de q se conoce con el nombre de *grupo de Lorentz*.

§ IV.5 CASO DE UN ESPACIO EUCLÍDEO DE DIMENSIÓN 3: ROTACIONAL

● Vamos a proseguir en este § el estudio de los campos de vectores, colocándonos en un **espacio afín euclídeo orientado** \mathcal{E} , de **dimensión** 3, ligado al espacio vectorial E .

Si \vec{F} es un campo de vectores diferenciable sobre el abierto Ω de \mathcal{E} , hemos recordado ya que, para todo $M \in \Omega$, la *diferencial* $D\vec{F}_M$ de \vec{F} en M es un endomorfismo de E . Si ${}^t(D\vec{F}_M)$ designa la *transpuesta* de $D\vec{F}_M$, es claro que el endomorfismo

$$u_M = D\vec{F}_M - {}^t(D\vec{F}_M)$$

verifica ${}^t u_M = -u_M$ (en efecto, se tiene

$${}^t u_M = {}^t(D\vec{F}_M) - {}^t[{}^t(D\vec{F}_M)] = {}^t(D\vec{F}_M) - D\vec{F}_M = -u_M).$$

Dicho de otro modo, u_M es un endomorfismo *antisimétrico*. De acuerdo con los resultados del § 2, existe por lo tanto un vector $\vec{V}_M \in E$, y solo uno, que verifica:

$$(\forall \vec{X} \in E) \quad u_M(\vec{X}) = \vec{V}_M \wedge \vec{X}.$$

Establecemos:

Definición IV.5.1

Sea \vec{F} un campo de vectores diferenciable sobre el abierto Ω de \mathcal{E} . Para todo $M \in \Omega$, se da el nombre de **rotacional de \vec{F} en M** , designándolo por $\text{rot}_M \vec{F}$, al vector único $\vec{V}_M \in E$ que verifica:

$$(\forall \vec{X} \in E), \quad D\vec{F}_M(\vec{X}) - {}^t D\vec{F}_M(\vec{X}) = \vec{V}_M \wedge \vec{X}.$$

El campo de vectores definido sobre Ω por $M \mapsto \text{rot}_M \vec{F}$ recibe el nombre de **rotacional de \vec{F}** y se designa por $\text{rot}(\vec{F})$ ⁽¹⁾.

Observación. Si la orientación de \mathcal{E} se cambia por su opuesta, el vector asociado a un endomorfismo antisimétrico queda cambiado por su opuesto. En consecuencia, el *rotacional de un campo de vectores diferenciable queda también cambiado por su opuesto*.

Expresión en una base ortonormal directa

Sea $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal *directo* de \mathcal{E} ; en este sistema de referencia, un campo de vectores diferenciables \vec{F} queda definido cuando se dan sus componentes (P, Q, R) que son funciones diferenciables del punto $M \in \Omega$.

⁽¹⁾ En Hidrodinámica, el rotacional recibe también el nombre de *torbellino* del campo \vec{F} ; si \vec{F} es el campo de las velocidades de las partículas de un fluido en movimiento, $\text{rot}(\vec{F})$ se interpreta como el vector rotación de una partícula infinitamente pequeña del fluido, supuesta sólida en el instante considerado.

Señalemos también (lo mismo que para el gradiente y la divergencia) que el valor en el punto M de $\text{rot}(\vec{F})$ se designa a veces por $\text{rot} \vec{F}(M)$.

Como es costumbre, designaremos por x, y, z las coordenadas de M . La matriz $D\vec{F}_M$ en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es entonces:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}_M,$$

significando el índice M que los valores de todas las derivadas parciales se toman en el punto M .

Al ser la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormal, la matriz de ${}^t(D\vec{F}_M)$ es la *traspuesta* ${}^t\mathcal{M}$ de \mathcal{M} (véase tomo 1, § XIII.7). De donde la matriz \mathcal{N} del endomorfismo $D\vec{F}_M - {}^t(D\vec{F}_M)$ es

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} & 0 & \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}_M.$$

Según el estudio hecho en el § 2, se deducen las componentes $A(M)$, $B(M)$, $C(M)$ de $\text{rot}_M \vec{F}$ en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (teniendo en cuenta el hecho de que esta base es ortonormal *directa*) que son

$$A(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)_M, \quad B(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)_M, \quad C(M) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_M.$$

En otros términos, la expresión del rotacional en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es:

$$(1) \quad \boxed{\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} .}$$

La relación (1) resulta fácil de recordar observando que las componentes de $\text{rot } (\vec{F})$ son los *cofactores de la primera fila* de la matriz simbólica siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{bmatrix}.$$

En el tomo 4 p. 346 vamos a dar otra interpretación del rotacional con ayuda de las *formas diferenciales*: si ponemos

$$\omega = P dx + Q dy + R dz,$$

las componentes A, B, C de $\text{rot } \vec{F}$ vienen dadas por:

$$d\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy,$$

donde $d\omega$ designa la *diferencial exterior* de la forma ω .

Designemos por $\mathcal{D}_k(\Omega)$ [resp. $\mathcal{C}_k(\Omega)$] al espacio vectorial de las funciones numéricas k veces diferenciables [resp. de clase C^k] sobre un abierto Ω de \mathcal{E} ; la letra k designa aquí un entero ≥ 0 o bien $+\infty$. Designemos igualmente por

$$\mathcal{V}_k(\Omega) \text{ [resp. } \mathcal{V}_k^c(\Omega)\text{]}$$

al espacio vectorial de los campos de vectores k veces diferenciables [resp. de clase C^k] sobre Ω . Convendremos en designar por $\mathcal{D}_0(\Omega)$ [resp. $\mathcal{V}_0(\Omega)$] al espacio de las funciones numéricas cualesquiera [resp. de los campos de vectores cualesquiera] sobre Ω .

La aplicación

$$\text{rot} : \mathcal{V}_1(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_0(\Omega), \quad \vec{F} \mapsto \text{rot } (\vec{F})$$

es evidentemente lineal. Vamos a estudiar su *núcleo* y su *imagen*.

Su imagen es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}_0(\Omega)$ al que llamaremos *espacio de los campos de rotacionales sobre Ω* .

Campos cuyo rotacional es nulo

Para caracterizar el núcleo de la aplicación $\text{rot} : \vec{F} \mapsto \text{rot}(\vec{F})$, basta interpretar los resultados del § 4 en dimensión 3. En efecto, si $n = 3$, las relaciones (5) del § 4 expresan que el rotacional del campo de componentes (P_1, P_2, P_3) es nulo.

Por lo tanto, si f es una función numérica dos veces diferenciable sobre Ω , se tiene

$$\boxed{\text{rot}(\text{grad } f) = 0}.$$

Inversamente, si \vec{F} es un campo de vectores de clase C^1 sobre Ω cuyo rotacional es nulo, el teorema IV.4.2 hace ver que \vec{F} es *localmente* un campo de gradientes. En resumen, se tiene:

IV.5.1 Sea \mathcal{E} un espacio afín euclídeo de dimensión 3 y Ω un abierto de \mathcal{E} .

a) El rotacional de todo campo de gradientes diferenciable sobre Ω es nulo. Dicho de otro modo, la aplicación lineal compuesta

$$\text{rot} \circ \text{grad} : \mathcal{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_0(\Omega), \quad f \mapsto \text{rot}(\text{grad } f)$$

es nula.

b) Si \vec{F} es un campo de vectores de clase C^1 sobre Ω que verifica

$$\text{rot } \vec{F} = 0,$$

todo punto M de Ω admite un entorno en el cual \vec{F} es un **campo de gradientes**.

Ejemplo

Sea \vec{F} el campo de vectores definido por sus componentes P, Q, R en un sistema ortonormal directo:

$$P(x, y, z) = yz - x^2, \quad Q(x, y, z) = zx - y^2, \quad R(x, y, z) = xy - z^2.$$

Se tiene aquí $\vec{F} = \text{grad}(f)$, con

$$f(x, y, z) = xyz - \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3),$$

y se comprueba fácilmente que $\text{rot}(\vec{F}) = 0$.

Potenciales vectores

Vamos a estudiar ahora la *imagen* de la aplicación $\vec{F} \mapsto \text{rot } \vec{F}$, es decir, el conjunto de los *campos de rotacionales*. Estableceremos en primer lugar una definición:

Definición IV.5.2

Sea \vec{G} un campo de rotacionales sobre Ω . Todo campo diferenciable \vec{F} sobre Ω tal que $\vec{G} = \text{rot } (\vec{F})$ recibe el nombre de **potencial vector** de \vec{G} . Se dice entonces que \vec{G} **deriva del potencial vector** \vec{F} .

Si f es una función dos veces diferenciable sobre Ω , se tiene, $\text{rot } (\text{grad } (f)) = 0$; por lo tanto, para todo potencial vector \vec{F} de \vec{G} , el campo $\vec{F} + \text{grad } (f)$ es también un potencial vector de \vec{G} . Recíprocamente, si \vec{F}_1 y \vec{F}_2 son dos potenciales vectores de clase C^1 de \vec{G} , su diferencia $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ es localmente un campo de gradientes, según IV.5.1.

Dicho de otro modo, si nos limitamos a los potenciales vectores de clase C^1 , el potencial vector está, **localmente**, determinado salvo por la adición de un campo de gradientes (cuando existe).

Caracterización de los campos de rotacionales

En lo que sigue vamos a limitar nuestro estudio al caso de los campos de rotacionales que admiten un potencial vector *dos veces diferenciable*.

a) Sea $\vec{V} = \text{rot } (\vec{F})$ un tal campo, siendo \vec{F} dos veces diferenciable. En un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, las componentes A, B, C del campo \vec{V} vienen dadas en función de las componentes P, Q, R del campo \vec{F} por:

$$A = R'_y - Q'_z, \quad B = P'_z - R'_x, \quad C = Q'_x - P'_y.$$

Al ser \vec{F} dos veces diferenciable, las funciones A, B, C son diferenciables y se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}.$$

Ahora bien, al aplicar aquí el teorema de Schwarz (tomo 2, p. 254) se tiene:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Estableceremos:

IV.5.2 Si un campo de rotacionales sobre el abierto Ω admite un potencial vector dos veces diferenciable, su divergencia es nula. En otros términos, la aplicación lineal

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} : \mathcal{V}_{2,\Omega} \rightarrow \mathcal{D}_{0,\Omega}$$

es nula: $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$.

b) Suponiendo unas hipótesis más fuertes, IV.5.2 admite una recíproca local:

Teorema IV.5.3

Sea \vec{V} un campo de vectores de clase C^1 sobre el abierto Ω , tal que $\operatorname{div}(\vec{V})=0$. Entonces todo punto $M_0 \in \Omega$ admite un entorno en el cual existe un potencial vector de clase C^1 de \vec{V} (siendo este potencial vector único localmente salvo adición de un campo de gradientes).

Demostración. Elijamos un sistema de referencia ortonormal $(M_0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de origen M_0 . Al ser Ω abierto, existe una bola abierta \mathcal{B} , de centro O y radio > 0 , contenida en Ω . Para todo punto $M \in \mathcal{B}$, designemos por M_t el punto $M_0 + t\overrightarrow{M_0M}$ ($t \in [0, 1]$) y pongamos:

$$\vec{F}(M) = \int_0^1 t \vec{V}(M_t) \wedge \overrightarrow{M_0M} dt.$$

Designemos por A, B, C las componentes de \vec{V} , por P, Q, R las de \vec{F} y por x, y, z las coordenadas de M . Se tiene

$$(2) \quad \begin{cases} P(M) = \int_0^1 t [zB(M_t) - yC(M_t)] dt \\ Q(M) = \int_0^1 t [xC(M_t) - zA(M_t)] dt \\ R(M) = \int_0^1 t [yA(M_t) - xB(M_t)] dt. \end{cases}$$

Al ser las funciones A, B, C de clase C^1 , se aplica el teorema de la derivación bajo el signo \int y resulta que también P, Q, R son de clase C^1 . Vamos a demostrar que \vec{F} es un *potencial vector* de \vec{V} sobre \mathcal{B} , es decir que se tiene

$$(\forall M \in \mathcal{B}) \quad \text{rot}_M \vec{F} = \vec{V}(M).$$

Nos limitaremos a establecer la igualdad de la primera componente de $\text{rot } \vec{F}$ con la primera componente de \vec{V} , siendo el cálculo análogo para las demás componentes.

Ahora bien, la primera componente de $\text{rot } \vec{F}$ es $L = R'_y - Q'_z$, y por derivación bajo el signo \int en las fórmulas (2) se obtiene

$$L(M) = \int_0^1 t \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [yA(M_t) - xB(M_t)] - \frac{\partial}{\partial z} [xC(M_t) - zA(M_t)] \right\} dt.$$

Se tiene por otra parte, según el teorema de derivación de las funciones compuestas:

$$\frac{\partial}{\partial y} [yA(M_t) - xB(M_t)] = A(M_t) + tyA'_y(M_t) - txB'_y(M_t)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [A(M_t)] = \frac{\partial}{\partial y} [A(M_0 + t\overrightarrow{M_0M})] = t \frac{\partial A}{\partial y}(M_t),$$

y del mismo modo

$$\frac{\partial}{\partial y} [B(M_t)] = t \frac{\partial B}{\partial y}(M_t).$$

Calculando igualmente $\frac{\partial}{\partial z} [xC(M_t) - zA(M_t)]$ se deduce:

$$\begin{aligned} L(M) = \int_0^1 t \{ & 2A(M_t) + t[xA'_x(M_t) + yA'_y(M_t) + zA'_z(M_t)] \\ & - tx[A'_x(M_t) + B'_y(M_t) + C'_z(M_t)] \} dt. \end{aligned}$$

Pero la hipótesis $\text{div}(\vec{V}) = 0$ se traduce por la relación $A'_x + B'_y + C'_z = 0$. Por otra parte se tiene (véase tomo 2, teorema V.5.1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} [A(M_t)] &= \frac{\partial}{\partial t} [A(M_0 + t\overrightarrow{M_0M})] = A'(M_t) \cdot \overrightarrow{M_0M} \\ &= xA'_x(M_t) + yA'_y(M_t) + zA'_z(M_t).\end{aligned}$$

Siendo fijo el punto M , pongamos $\psi(t) = A(M_t)$; se tiene

$$L(M) = \int_0^1 [2t\psi(t) + t^2 \psi'(t)] dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^2 \psi(t)] dt,$$

de donde

$$L(M) = [t^2 \psi(t)]_0^1 = \psi(1) = A(M),$$

que es lo que se quería demostrar.]]

Observaciones

1. Con las hipótesis de IV.5.3, no se puede afirmar en general que exista un potencial vector de \vec{V} definido *sobre todo* Ω : la existencia de potenciales vectores *globales* sobre Ω está relacionada con la naturaleza topológica de Ω .

2. Los teoremas IV.4.2 y IV.5.3 se interpretan en términos de *formas diferenciales* y aparecen entonces como dos casos particulares de un teorema general de Poincaré (véase tomo 4 p. 354).

Ejemplo

Referido el espacio euclídeo \mathcal{E} a un sistema de referencia ortonormal directo de origen O , sea \vec{V} el campo definido sobre $\mathcal{E} \setminus \{O\}$ por sus componentes:

$$A(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad B(x, y, z) = \frac{-x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad C(x, y, z) = 0.$$

Se tiene evidentemente $\text{div}(\vec{V}) = 0$, y el campo \vec{V} deriva del potencial vector \vec{F} de componentes:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R(x, y, z) = \frac{1}{2} \text{Log}(x^2 + y^2 + z^2).$$

§ IV.6 FÓRMULAS DE ANÁLISIS VECTORIAL

En este § hemos agrupado algunas fórmulas llamadas «de Análisis vectorial» y que se utilizan con frecuencia en Física.

Recordemos en primer lugar las fórmulas establecidas en los §§ 4 y 5:

- Si f es una *función numérica* dos veces diferenciable, se tiene:

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$$

y (por definición)

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \Delta f.$$

- Si \vec{F} es un *campo de vectores* dos veces diferenciable, se tiene;

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{F})) = 0.$$

Gradiente, divergencia, rotacional y Laplaciana de un producto

Mediante cálculos elementales (utilizando, si es preciso, un sistema de referencia ortonormal) se obtienen fácilmente los resultados siguientes:

a) Si f, g son dos *funciones numéricas* diferenciables sobre un mismo abierto Ω de un espacio euclídeo, se tiene:

$$\text{grad}(fg) = f \text{grad}(g) + g \text{grad}(f).$$

Si f, g son dos veces diferenciables, se tiene además:

$$\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + (\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g)$$

designando por $(\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g)$ la aplicación

$$M \mapsto (\text{grad}_M f) (\text{grad}_M g) .$$

b) Si \vec{F} es un campo de vectores diferenciable sobre un abierto de un espacio afín euclídeo \mathcal{E} y si λ es una función numérica diferenciable sobre Ω , se tiene, para todo punto $M \in \Omega$:

$$(1) \quad \boxed{\text{div}_M (\lambda \vec{F}) = \lambda(M) \text{div}_M \vec{F} + (\text{grad}_M \lambda) \cdot \vec{F}(M)} .$$

En el caso en el que \mathcal{E} es un espacio afín euclídeo orientado de dimensión 3, se tiene además:

$$(2) \quad \boxed{\text{rot}_M (\lambda \vec{F}) = \lambda(M) \text{rot}_M \vec{F} + (\text{grad}_M \lambda) \wedge \vec{F}(M)} .$$

Abreviadamente escribiremos las fórmulas (1) y (2) en la forma:

$$(1') \quad \text{div} (\lambda \vec{F}) = \lambda \text{div} \vec{F} + (\text{grad} \lambda) \cdot \vec{F}$$

$$(2') \quad \text{rot} (\lambda \vec{F}) = \lambda \text{rot} \vec{F} + (\text{grad} \lambda) \wedge \vec{F} .$$

Laplaciana de un campo de vectores

Designemos por \mathcal{E} un espacio *afín euclídeo* de dimensión cualquiera, por Ω un abierto de \mathcal{E} y por \vec{F} una aplicación dos veces diferenciable de Ω en un espacio vectorial *cualquiera* E de dimensión finita p . Designemos por (P_i) las componentes de \vec{F} en una base cualquiera (\vec{e}_i) de E . La función vectorial definida sobre Ω por

$$M \mapsto \Delta P_i(M) \vec{e}_i$$

es evidentemente independiente de la base elegida (\vec{e}_i) (puesto que el operador Δ es lineal). La designaremos por $\Delta \vec{F}$.

En particular, si E es el espacio vectorial asociado a \mathcal{E} , se dice que el campo $\Delta \vec{F}$ (de componentes ΔP_i en una base cualquiera) es la **Laplaciana del campo de vectores** $\Delta \vec{F}$.

Si, además, \mathcal{E} es de dimensión 3, se obtiene, mediante un cálculo sencillo y cualquiera que sea la orientación elegida en \mathcal{E} :

$$\Delta \vec{F} = \text{grad} (\text{div} (\vec{F})) - \text{rot} (\text{rot} (\vec{F})) .$$

§ IV.7 CAMPOS EQUIPROYECTIVOS

Vamos a considerar en este § un espacio afín euclídeo \mathcal{E} , de dimensión $n \geq 1$, ligado al espacio vectorial E .

Definición IV.7.1

Se dice que un campo de vectores f sobre \mathcal{E} es **equiproyectivo** cuando verifica

$$(1) \quad (\forall M \in \mathcal{E}, \quad \forall N \in \mathcal{E}) \quad \overrightarrow{MN} \cdot [f(M) - f(N)] = 0 .$$

Cuando los puntos M y N son distintos, la relación (1) significa que los vectores $f(M)$ y $f(N)$ tienen la *misma proyección* ortogonal sobre la recta MN , lo que da origen al término «equiproyectivo» (véase la figura 1).

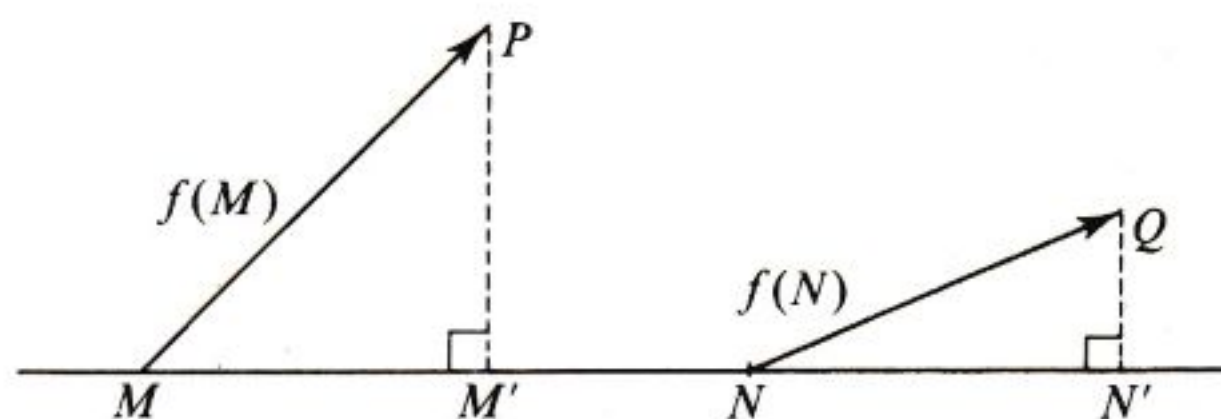


Figura 1.

Observemos a este respecto que, para representar un campo de vectores f , es cómodo e intuitivo utilizar un «representante» del vector $f(M)$ que tiene por origen M . En la figura 1, se tiene: $f(M) = \overrightarrow{MP}$, $f(N) = \overrightarrow{NQ}$, y las proyecciones ortogonales M' , N' de P y Q sobre la recta MN verifican

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{MN}\|} \overrightarrow{MN} \cdot f(M) = \frac{1}{\|\overrightarrow{MN}\|} \overrightarrow{MN} \cdot f(N) = \overrightarrow{NN'}.$$

El resultado siguiente es fundamental:

Teorema IV.7.1

*Para que un campo de vectores sobre \mathcal{E} sea **equiproyectivo**, es necesario y suficiente que sea **afín** y que el endomorfismo asociado sea **antisimétrico** ⁽¹⁾.*

Demostración

a) Sea φ el endomorfismo asociado a un campo afín f sobre \mathcal{E} . Para todos los $M, N \in \mathcal{E}$, se tiene:

$$f(M) - f(N) = \varphi(\overrightarrow{MN}).$$

Ahora bien, si φ es antisimétrico, se tiene:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \varphi(\overrightarrow{MN}) = 0 \quad (\text{véase propiedad 1, p. 235}),$$

de donde

$$\overrightarrow{MN} \cdot [f(M) - f(N)] = 0.$$

El campo f es por lo tanto equiproyectivo, lo cual demuestra que la condición enunciada es *suficiente*.

b) Recíprocamente, sea f un campo equiproyectivo. Una vez fijado arbitrariamente el punto $A \in \mathcal{E}$, definamos una aplicación $\varphi : E \rightarrow E$ poniendo

$$(2) \quad (\forall \vec{X} \in E) \quad \varphi(\vec{X}) = f(A + \vec{X}) - f(A).$$

Por ser f un campo equiproyectivo, se tiene, por definición

$$(\forall \vec{X} \in E, \forall \vec{Y} \in E), \quad \vec{X} \cdot \varphi(\vec{X}) = 0 \quad \text{y} \quad \vec{Y} \cdot \varphi(\vec{Y}) = 0.$$

Por ser f equiproyectivo tenemos también

⁽¹⁾ Los campos afines cuyo endomorfismo asociado es antisimétrico reciben a veces el nombre de *campos antisimétricos*. Puesto que el concepto de campo antisimétrico se identifica con el de campo equiproyectivo, no hemos considerado útil introducir dos terminologías.

o sea

$$(\vec{Y} - \vec{X}) \cdot [\varphi(\vec{Y}) - \varphi(\vec{X})] = (\vec{Y} - \vec{X}) \cdot [f(A + \vec{Y}) - f(A + \vec{X})] = 0,$$

$$\vec{Y} \cdot \varphi(\vec{Y}) + \vec{X} \cdot \varphi(\vec{X}) - \vec{X} \cdot \varphi(\vec{Y}) - \vec{Y} \cdot \varphi(\vec{X}) = -\vec{X} \cdot \varphi(\vec{Y}) - \vec{Y} \cdot \varphi(\vec{X}) = 0.$$

La relación

$$(3) \quad \vec{X} \cdot \varphi(\vec{Y}) + \vec{Y} \cdot \varphi(\vec{X}) = 0$$

válida para todos los $\vec{X}, \vec{Y} \in E$, muestra que la aplicación φ es un endomorfismo antisimétrico de E (véase teorema IV.1.1). Por lo tanto f es un campo afín, cuyo endomorfismo asociado es φ , lo que prueba que la condición enunciada es necesaria.]]

El espacio vectorial de los campos equiproyectivos

Sea $\mathcal{V}(\mathcal{E})$ el espacio vectorial de los campos de vectores sobre \mathcal{E} . Es inmediato que el conjunto de los campos equiproyectivos es un *subespacio vectorial* de $\mathcal{V}(\mathcal{E})$. Vamos a demostrar que este subespacio es de dimensión finita y a determinar su dimensión.

Para ello, fijemos un punto cualquiera $A \in \mathcal{E}$ y designemos por $\mathcal{A}(E)$ al espacio vectorial de los endomorfismos antisimétricos de E (véase § 1). A cada par $\rho = (\vec{V}, \varphi)$ de $E \times \mathcal{A}(E)$, asociemos el campo equiproyectivo f_ρ definido por

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad f_\rho(M) = \vec{V} + \varphi(\overrightarrow{AM}).$$

Entonces:

- Todo campo equiproyectivo f es de la forma f_ρ , con $\vec{V} = f(A)$.
- Se tiene: $f_\rho = 0$ si, y solamente si, es $\vec{V} = 0$ y $\varphi = 0$;

de donde se deduce fácilmente que la aplicación $\rho \mapsto f_\rho$ es un *isomorfismo del espacio vectorial producto* $E \times \mathcal{A}(E)$ sobre el espacio vectorial de los campos equiproyectivos; este último espacio es pues de dimensión finita, igual a la de $E \times \mathcal{A}(E)$, o sea

$$\dim(\mathcal{V}(\mathcal{E})) = \dim(E) + \dim \mathcal{A}(E).$$

Ahora bien, si $\dim(E) = n$, sabemos (véase § 1) que $\dim(\mathcal{A}(E)) = n(n-1)/2$. Se ve, finalmente, que la dimensión del espacio de los campos equiproyectivos sobre \mathcal{E} es $n(n+1)/2$.

Para $n = 3$, el espacio de los campos equiproyectivos sobre \mathcal{E} es de dimensión 6. Este caso particular constituirá el objeto de los §§ que siguen.

Observación. La definición IV.7.1 muestra inmediatamente que el transformado de un campo equiproyectivo por una semejanza cualquiera de \mathcal{E} es un campo equiproyectivo; puntualizando más, si s es una semejanza de \mathcal{E} y si f es un campo equiproyectivo sobre \mathcal{E} , el campo $P \mapsto f[s(P)]$ es también equiproyectivo. Igualmente, para toda semejanza vectorial σ de E_n el campo $P \mapsto \sigma[f(P)]$ es equiproyectivo.

La interpretación física de estas propiedades es que *el concepto de campo equiproyectivo no se altera al cambiar la unidad de longitud*: después de un cambio arbitrario de esta unidad, un campo equiproyectivo sigue siendo equiproyectivo.

Prolongación de los campos equiproyectivos

De hecho, los campos de vectores equiproyectivos que se presentan en Cinemática (campos de velocidades) no están definidos sobre todo el espacio \mathcal{E} , sino solamente sobre una parte S de \mathcal{E} . En efecto, el campo de las velocidades de un sólido en un instante t está definido sobre la parte S de \mathcal{E} ocupada por este sólido en el instante t . Es por lo tanto útil mostrar que un tal campo es la restricción a S de un campo equiproyectivo definido sobre todo \mathcal{E} . Para estudiar este problema de la prolongación, nos limitaremos al caso en el que S genera afínmente \mathcal{E} .

Teorema IV.7.2

Sea S una parte de \mathcal{E} tal que \mathcal{E} sea la variedad afín generada por S y sea f un campo de vectores **equiproyectivo sobre S** , o sea que verifica

$$(4) \quad (\forall M \in S, \forall N \in S) \quad \overrightarrow{MN} \cdot [f(M) - f(N)] = 0.$$

Entonces f es la **restricción a S de un campo equiproyectivo sobre \mathcal{E}** , definido de manera única.

Demostración

a) Sea (A_0, A_1, \dots, A_n) una base afín de \mathcal{E} formada por puntos de S . Según I.7.8 existe una aplicación afín única $g : \mathcal{E} \rightarrow E$ que verifica $g(A_i) = f(A_i)$ para $0 \leq i \leq n$. Ello demuestra la *unicidad* de la prolongación buscada (si existe).

b) Para demostrar la *existencia* de esta prolongación, consideremos el endomorfismo φ de E asociado a la aplicación g definida en a). Por aplicación de (4), se tiene, para $i, j = 0, 1, \dots, n$,

$$\overrightarrow{A_i A_j} \cdot \varphi(\overrightarrow{A_i A_j}) = 0;$$

de donde, para todos los índices $i, j, k = 0, 1, \dots, n$,

$$(\overrightarrow{A_i A_k} + \overrightarrow{A_k A_j}) \cdot [\varphi(\overrightarrow{A_i A_k}) + \varphi(\overrightarrow{A_k A_j})] = 0,$$

o sea, después de simplificar:

$$(5) \quad \overrightarrow{A_i A_k} \cdot \varphi(\overrightarrow{A_k A_j}) + \overrightarrow{A_k A_j} \cdot \varphi(\overrightarrow{A_i A_k}) = 0.$$

Tomando $k = 0$ se tiene, para todos los $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\overrightarrow{A_0 A_i} \cdot \varphi(\overrightarrow{A_0 A_j}) + \overrightarrow{A_0 A_j} \cdot \varphi(\overrightarrow{A_0 A_i}) = 0.$$

Ahora bien, los vectores $\overrightarrow{A_0 A_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ generan E . Por linealidad (siendo j fijo), se tiene pues,

$$(6) \quad (\forall \vec{X} \in E) \quad \vec{X} \cdot \varphi(\overrightarrow{A_0 A_j}) + \overrightarrow{A_0 A_j} \cdot \varphi(\vec{X}) = 0.$$

Del mismo modo, los vectores $\overrightarrow{A_0 A_j} (j = 1, 2, \dots, n)$ generan E . Por linealidad (al ser X fijo) las relaciones (6) implican

$$(\forall \vec{Y} \in E) \quad \vec{X} \cdot \varphi(\vec{Y}) + \vec{Y} \cdot \varphi(\vec{X}) = 0.$$

La relación $\vec{X} \cdot \varphi(\vec{Y}) + \vec{Y} \cdot \varphi(\vec{X}) = 0$, que se cumple para todos los $X, Y \in E$, muestra que φ es *antisimétrico* y que por lo tanto g es *equiproyectivo*. Queda por demostrar que f es la restricción de g a S .

Si $A \in S$, se tiene, para todo $i = 0, 1, \dots, n$:

$$[g(A) - g(A_i)] \cdot \overrightarrow{A A_i} = 0 \quad \text{y} \quad [f(A) - f(A_i)] \cdot \overrightarrow{A A_i} = 0;$$

de donde (por ser $g(A_i) = f(A_i)$):

$$[g(A) - f(A)] \cdot \overrightarrow{A A_i} = [g(A_i) - f(A_i)] \cdot \overrightarrow{A A_i} = 0.$$

Ahora bien, los vectores $\overrightarrow{A A_i} (0 \leq i \leq n)$ generan E , y el vector $g(A) - f(A)$, ortogonal a todos los vectores $\overrightarrow{A A_i}$, es por lo tanto nulo. Para todo $A \in S$, se tiene $g(A) = f(A)$, lo cual demuestra el enunciado.]

§ IV.8 TORSORES

Los campos equiproyectivos del espacio euclídeo de dimensión 3 desempeñan un papel importante en Mecánica como campos de velocidades o como campos de los momentos de un sistema de fuerzas. Por ello los vamos a estudiar de un modo especial adoptando una terminología ligada a su interpretación física.

● En lo que sigue la letra \mathcal{E} designará un **espacio afín euclídeo de dimensión 3** y E el espacio vectorial asociado.

Definición IV.8.1

*Un campo equiproyectivo τ sobre \mathcal{E} recibe el nombre de **torsor**, y para todo punto $p \in \mathcal{E}$, el vector $\tau(p)$ recibe el nombre de **momento** ⁽¹⁾ (o de valor) del torsor τ en el punto P ⁽²⁾.*

Del estudio hecho en el § anterior resulta que los torsos de \mathcal{E} constituyen un espacio vectorial de dimensión 6.

Elementos de reducción

Sea τ un torsor sobre \mathcal{E} . Sabemos que existe un endomorfismo antisimétrico único φ de E que verifica:

$$(\forall P \in \mathcal{E}, \forall Q \in \mathcal{E}) \quad \tau(Q) = \tau(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

⁽¹⁾ Cuando el torsor τ es fijo, su momento en el punto P se suele designar por $\overrightarrow{\mathcal{M}}_P$ o por $\overrightarrow{\mathcal{M}}(P)$. Esta notación proviene de que, originariamente, un torsor era considerado como campo de los momentos de un sistema de fuerzas. Volveremos sobre esta interpretación al final del capítulo (véase § 12).

⁽²⁾ Los elementos que aquí llamamos *torsos* lógicamente deberían ser llamados *cotorsos*.

La definición más satisfactoria de torsor sería ésta: (T) «un torsor es una *forma lineal* en el espacio de los campos equiproyectivos sobre \mathcal{E} ».

Si se adoptara este punto de vista, la dependencia entre «vectores deslizantes» y «torsos» sería más satisfactoria.

Sin embargo no nos ha parecido oportuno dar esta «mejor» presentación, y ello por dos razones:

1. Nuestro interés por no alcanzar un nivel demasiado alto de abstracción.

2. Y sobre todo, porque el concepto general de torsor (que se puede definir sobre un espacio afín \mathcal{A} , prescindiendo de cualquier estructura euclídea) se apoya en gran manera en el concepto de *álgebra exterior de un espacio vectorial*; puntualizando más, es el concepto de *potencia exterior segunda* de un espacio vectorial lo que permite una teoría coherente de torsos. Por otra parte, la introducción de una estructura euclídea sobre \mathcal{A} permite identificar, *siempre que se introduzca una orientación en \mathcal{A}* el espacio de los torsos (en el sentido de (T)) con su dual, que es el espacio de los torsos (en el sentido de la definición IV.8.1). A este respecto se puede consultar «Torseurs sur un espace affine», Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, fasc. n.º M25.0470 (abril 1970) por Y. Bamberger y J. P. Bourguignon, dir. Laurent Schwartz».

Orientemos el espacio E ; puesto que su dimensión es 3, existe un vector único \vec{R} de E que verifica

$$(\forall \vec{X} \in E) \quad \varphi(\vec{X}) = \vec{R} \wedge \vec{X}.$$

Se tiene pues:

$$(1) \quad (\forall P \in \mathcal{E}, \forall Q \in \mathcal{E}) \quad \tau(Q) = \tau(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

(fórmula de Varignon).

Recíprocamente, todo campo τ que verifique (1) para un vector \vec{R} , convenientemente elegido, es evidentemente un tisor. Podemos pues enunciar lo siguiente:

Teorema IV.8.1

Para que un campo τ , sobre un espacio euclídeo **orientado** \mathcal{E} , sea un tisor es necesario y suficiente que exista un vector $\vec{R} \in E$ tal que, para todos los $P, Q \in \mathcal{E}$, se tenga

$$\tau(Q) = \tau(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ};$$

este vector \vec{R} queda determinado de manera única por τ .

Al vector \vec{R} que verifica (1) se le llama **resultante general**, o simplemente **vector**, del tisor τ .

Se ve inmediatamente que si se cambia la orientación de \mathcal{E} por su opuesta, la resultante \vec{R} queda cambiada por $-\vec{R}$.

En lo que sigue, se **supondrá el espacio orientado** y señalaremos los cambios importantes que se introducen cuando se cambia esta orientación por su opuesta.

Corolario

Para que el campo de vectores definido por el tisor τ sea **constante** (es decir verifique $\tau(P) = \tau(Q)$ para todos los $P, Q \in \mathcal{E}$), es necesario y suficiente que su vector \vec{R} sea **nulo**.

Un campo de vectores constante recibe también el nombre de **campo uniforme**. Los campos constantes son pues torsos particulares, denominados *pares*. De momento los llamaremos *torsos constantes* (ver § 11).

A cada tisor τ sobre \mathcal{E} y a cada punto $A \in \mathcal{E}$, corresponde el par $(\vec{R}, \tau(A)) \in E \times E$ constituido por la resultante general \vec{R} de τ y por su momento $\tau(A)$ en el punto A . A los vectores \vec{R} y $\tau(A)$ se les llama **elementos de reducción** del tisor τ en el punto A (siendo el primer vector independiente del punto A). Se dice también que \vec{R} y $\tau(A)$ son las **coordenadas vectoriales** del tisor τ en el punto A .

Recíprocamente, si $A \in \mathcal{E}$ es fijo y si $\rho = (\vec{R}, \vec{S})$ es un par de vectores de E , existe un tisor único τ_ρ cuyos elementos de reducción en A son \vec{R} y \vec{S} ; este tisor τ_ρ viene definido por

$$(\forall P \in \mathcal{E}) \quad \tau_\rho(P) = \vec{S} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}.$$

Cuando A es fijo, la aplicación $\theta_A : \rho \mapsto \tau_\rho$ así obtenida es un *isomorfismo del espacio vectorial* $E \times E$ sobre el espacio vectorial de los torsos de \mathcal{E} . Se observará que este isomorfismo θ_A depende del punto A elegido. Tropezamos aquí de nuevo con el hecho de que los torsos de \mathcal{E} constituyen un espacio vectorial de dimensión 6, puesto que $\dim(E \times E) = 6$.

El tisor cuyos elementos de reducción en el punto A son \vec{R} y \vec{S} , podrá ser designado por $\tau = (\vec{R}, \vec{S}_A)$.

Expresión en un sistema de referencia ortonormal directo

Sea $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal *directo* de \mathcal{E} y sea P el punto de coordenadas (x, y, z) en este sistema de referencia. Dado el tisor τ , designemos por L_0, M_0, N_0 las componentes de $\tau(O)$ en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ y por α, β, γ las del vector \vec{R} de τ . Mediante un cálculo sencillo se ve que las componentes L, M, N del vector $\tau(P) = \tau(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$ vienen dadas por:

$$L = L_0 + \beta z - \gamma y, \quad M = M_0 + \gamma x - \alpha z, \quad N = N_0 + \alpha y - \beta x.$$

Para efectuar este cálculo se recomienda adoptar la presentación «por columnas» como sigue:

$$\tau(O) \begin{vmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \overrightarrow{OP} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{vmatrix} \quad \tau(P) \begin{vmatrix} L_0 + \beta z - \gamma y \\ M_0 + \gamma x - \alpha z \\ N_0 + \alpha y - \beta x \end{vmatrix}$$

§ IV.9 EJE CENTRAL DE UN TORSOR

La interpretación física de los torsos conduce al problema siguiente: «si τ es un torsi*or no constante* sobre \mathcal{E} , ¿cuáles son los puntos de \mathcal{E} en los que el momento de τ es colineal con su resultante general?». La respuesta viene dada por el teorema siguiente:

Teorema IV.9.1

|| Sea τ un torsi*or no constante* sobre \mathcal{E} , de resultante \vec{R} . Entonces el conjunto de los puntos P tales que \vec{R} y $\tau(P)$ son colineales es una **recta afín** de \mathcal{E} , de vector director \vec{R} .

Esta recta afín recibe el nombre de **eje central** del torsi*or* τ .

Demostración. Sea O un punto cualquiera de \mathcal{E} . Pongamos: $\vec{S} = \tau(O)$. Los puntos P buscados son los que verifican $\vec{R} \wedge \tau(P) = 0$ (puesto que $\vec{R} \neq 0$), es decir,

$$(1) \quad \vec{R} \wedge (\vec{S} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = 0.$$

Según la fórmula del doble producto vectorial, se tiene

$$\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = -(\vec{R}^2) \overrightarrow{OP} + (\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP}) \vec{R}.$$

La relación (1) equivale pues a

$$\vec{R} \wedge \vec{S} = -(\vec{R}^2) \overrightarrow{OP} + (\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP}) \vec{R} = 0,$$

y es evidente que se verifica si se tiene

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{S}}{\vec{R}^2} \quad (\text{ya que entonces se tiene } \vec{R} \cdot \overrightarrow{OP} = 0).$$

Sea pues P_0 el punto de \mathcal{E} definido por

$$\overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{S}}{\vec{R}^2}.$$

Por sustracción se ve que (1) equivale a

$$(2) \quad \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \overrightarrow{P_0P}) = 0.$$

Ahora bien, el vector $\vec{R} \wedge \overrightarrow{P_0P}$ es nulo o bien ortogonal a \vec{R} . Por lo tanto (2) equivale a

$$(3) \quad \vec{R} \wedge \overrightarrow{P_0P} = 0;$$

la relación (3) significa que el punto P está sobre la recta afín de vector director \vec{R} , que pasa por P_0 .

Observaciones

1. El eje central queda definido con independencia de toda orientación de \mathcal{E} .
2. Si P, Q son dos puntos del eje central, se tiene

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ} = 0, \text{ de donde } \tau(P) - \tau(Q) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ} = 0,$$

el torsor τ tiene pues el mismo momento \vec{M} en todo punto de su eje central, y este momento es de la forma:

$$\vec{M} = h\vec{R} \quad (h \in \mathbf{R}).$$

Estudiaremos más adelante los torsos τ para los cuales se tiene $h = 0$ (se trata de los *deslizantes*).

3. Según la demostración de IV.9.1, el eje central del torsor τ es el conjunto de los puntos P definidos por

(4)

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \tau(O)}{\vec{R}^2} + \lambda \vec{R}$$

cuando λ recorre \mathbf{R} .

La ecuación (4) es una *representación paramétrica* del eje central. Esta ecuación tiene una gran importancia práctica y es muchas veces preferible a las ecuaciones cartesianas que vamos a determinar.

Ecuaciones cartesianas del eje central en un sistema de referencia ortonormal directo

Sea $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal directo de \mathcal{E} , y volvamos a las notaciones del final del § 8. Las componentes del vector $\tau(P)$ en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ son:

$$L = L_0 + \beta z - \gamma y, \quad M = M_0 + \gamma x - \alpha z, \quad N = N_0 + \alpha y - \beta x.$$

Para que $\tau(P)$ y \vec{R} sean colineales, es necesario y suficiente que la matriz

$$\begin{bmatrix} L_0 + \beta z - \gamma y & M_0 + \gamma x - \alpha z & N_0 + \alpha y - \beta x \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$$

sea de rango 1, lo cual se traduce por las ecuaciones

$$(5) \quad \boxed{\frac{L_0 + \beta z - \gamma y}{\alpha} = \frac{M_0 + \gamma x - \alpha z}{\beta} = \frac{N_0 + \alpha y - \beta x}{\gamma}}$$

(conviniendo en que si uno de los denominadores es nulo, el numerador correspondiente tiene que ser nulo).

Las relaciones (5) son las ecuaciones cartesianas de una recta afín, de vector director $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{R}$. Nos encontramos así de nuevo con el teorema IV.9.1.

§ IV.10 COMOMENTO DE DOS TORSORES

Sean τ_1, τ_2 dos torsores sobre \mathcal{E} , de resultantes respectivas \vec{R}_1, \vec{R}_2 . Vamos a demostrar que la función numérica θ definida sobre \mathcal{E} por

$$(1) \quad (\forall P \in \mathcal{E}) \quad \theta(P) = \vec{R}_1 \cdot \tau_2(P) + \vec{R}_2 \cdot \tau_1(P)$$

se reduce a una constante.

En efecto, si $P, Q \in \mathcal{E}$, se tiene

$$\tau_1(Q) = \tau_1(P) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{PQ}; \quad \tau_2(Q) = \tau_2(P) + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{PQ},$$

de donde

$$\begin{aligned} \theta(Q) &= \vec{R}_1 \cdot \tau_2(Q) + \vec{R}_2 \cdot \tau_1(Q) \\ &= \vec{R}_1 \cdot \tau_2(P) + \vec{R}_1 \cdot (\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{PQ}) + \vec{R}_2 \cdot \tau_1(P) + \vec{R}_2 \cdot (\vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{PQ}) \\ &= \theta(P) + [\vec{R}_1, \vec{R}_2, \overrightarrow{PQ}] + [\vec{R}_2, \vec{R}_1, \overrightarrow{PQ}] = \theta(P) \end{aligned}$$

(la última igualdad resulta del hecho de que el producto mixto se transforma en su opuesto cuando dos de los vectores se permutan entre sí).

Se tiene pues $\theta(P) = \theta(Q)$, para todos los $P, Q \in \mathcal{E}$, y el número $\theta(P)$ depende solamente de τ_1 y τ_2 . Establecemos:

Definición IV.10.1

El comomento de dos torsos τ_1, τ_2 es el número $\mathcal{C}(\tau_1, \tau_2)$ definido por

$$(\forall P \in \mathcal{E}) \quad \mathcal{C}(\tau_1, \tau_2) = \vec{R}_1 \cdot \tau_2(P) + \vec{R}_2 \cdot \tau_1(P),$$

donde \vec{R}_1 y \vec{R}_2 son las resultantes respectivas de τ_1 y τ_2 .

Sea \mathcal{T} el espacio vectorial de los torsos sobre \mathcal{E} . Se ve inmediatamente que la aplicación

$$\mathcal{C} : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (\tau_1, \tau_2) \mapsto \mathcal{C}(\tau_1, \tau_2)$$

es una **forma bilineal simétrica** sobre \mathcal{T} .

Esta forma bilineal simétrica lleva asociada una forma cuadrática $\Gamma : \tau \mapsto \mathcal{C}(\tau, \tau)$. El número $q(\tau) = \frac{1}{2} \Gamma(\tau) = \frac{1}{2} \mathcal{C}(\tau, \tau)$ se dice que es el **invariante escalar** de τ . Según la definición IV.9.1, se tiene:

$$(\forall P \in \mathcal{E}) \quad q(\tau) = \vec{R} \cdot \tau(P).$$

Observación. Cuando se cambia la orientación de \mathcal{E} , la forma bilineal \mathcal{C} se transforma en su *opuesta* lo mismo que la forma cuadrática q .

Expresión en un sistema de referencia ortonormal directo

En un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, definamos los torsos τ_i ($i = 1, 2$) dando sus elementos de reducción (\vec{R}_i, \vec{S}_i) en O . Designando por $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ las componentes de \vec{R}_i y por (L_i, M_i, N_i) las de \vec{S}_i , se tiene

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}(\tau_1, \tau_2) &= \vec{R}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{R}_2 \cdot \vec{S}_1 \\ &= \alpha_1 L_2 + \beta_1 M_2 + \gamma_1 N_2 + \alpha_2 L_1 + \beta_2 M_1 + \gamma_2 N_1 \end{aligned}$$

Si τ es el tisor de coordenadas vectoriales

$$(\vec{R} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}, \quad \vec{S} = L \vec{i} + M \vec{j} + N \vec{k})$$

su invariante escalar viene dado por

$$(3) \quad q(\tau) = \frac{1}{2} \mathcal{C}(\tau, \tau) = \alpha L + \beta M + \gamma N$$

En efecto, los 6 números, $\alpha, \beta, \gamma, L, M, N$ son las coordenadas de τ en una base particular \mathcal{B} del espacio vectorial \mathcal{T} (constituido por los torsos sobre \mathcal{E}). El hecho de dar el punto O permite identificar el tisor τ con el par $(\vec{R}, \vec{S}) \in E \times E$ constituido por sus elementos de reducción en el punto O ; los números $(\alpha, \beta, \gamma, L, M, N)$ son las coordenadas de este par en la base

$$\mathcal{B} = ((\vec{i}, 0), (\vec{j}, 0), (\vec{k}, 0), (0, \vec{i}), (0, \vec{j}), (0, \vec{k})) \quad \text{de } E \times E,$$

Podemos pues decir que los números $(\alpha, \beta, \gamma, L, M, N)$ son las coordenadas del tisor τ en la base \mathcal{B} . Las relaciones (2) y (3) nos proporcionan la expresión en esta base, de la forma bilineal \mathcal{C} y de su forma cuadrática asociada $\Gamma = 2q$.

La forma Γ se escribe también:

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= 2q(\tau) = \\ &= \frac{1}{2}[(\alpha + L)^2 + (\beta + M)^2 + (\gamma + N)^2 - (\alpha - L)^2 - (\beta - M)^2 - (\gamma - N)^2]. \end{aligned}$$

En $E \times E$, las formas lineales $\alpha + L, \beta + M, \gamma + N, \alpha - L, \beta - M, \gamma - N$ son independientes. Con esto se ve que la forma cuadrática I es *no degenerada* (o sea, *de rango 6*) y de *signatura (3, 3)*.

En lo que sigue, vamos a estudiar los elementos *isótopos* de esta forma cuadrática, es decir los torsos τ tales que $q(\tau) = 0$.

§ IV.11 TORSORES ELEMENTALES

Por definición, se dice que un torsiore τ es **elemental** si verifica $q(\tau) = 0$, es decir *si su invariante escalar es nulo*. Vamos a ver que existen dos tipos de torsos elementales que admiten interpretaciones físicas diferentes ⁽¹⁾.

Sea en efecto un torsiore τ , de vector \vec{R} , que verifica

$$(1) \quad (\forall P \in \mathcal{E}) \quad \vec{R} \cdot \tau(P) = 0.$$

Distinguiremos dos casos, según que se tenga: $\vec{R} = 0$, o $\vec{R} \neq 0$:

1. Si $\vec{R} = 0$, la condición (1) queda automáticamente verificada. Hemos visto ya en el § 8 que la relación $\vec{R} = 0$ caracteriza los campos *constantes*.

2. Si $\vec{R} \neq 0$, el torsiore τ admite un *eje central* Δ (teorema IV.9.1) y existe $h \in \mathbf{R}$ tal que $\tau(A) = h\vec{R}$ para todo $A \in \Delta$. Con el punto A fijo, se tiene pues

$$q(\tau) = \vec{R} \cdot \tau(A) = h\vec{R}^2$$

y la condición (1) equivale a $h = 0$. Se tiene pues $\tau(A) = 0$ para todo $A \in \Delta$. De donde

$$(\forall P \in \mathcal{E}) \quad \tau(P) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}.$$

Recíprocamente, si $\tau(A) = 0$, los vectores $\tau(A)$ y \vec{R} son colineales, con lo que $A \in \Delta$. Se ve también que en este caso, *el eje central Δ es el conjunto de los puntos A tales que $\tau(A) = 0$* . Ello nos lleva a establecer las definiciones siguientes:

⁽¹⁾ Limitándonos al aspecto dinámico de esta cuestión, digamos que un *deslizante* representa un esfuerzo de tracción, mientras que un *par*, aplicado a un sólido, tiende a hacerlo girar. Véase también el final del capítulo, § 13.

Definición IV.11.1

$\left. \begin{array}{l} \} \text{ Un par es un torsor constante. Un deslizante es un torsor no constante} \\ \} \text{ cuyo invariante escalar es nulo, o el torsor nulo.} \end{array} \right\}$

Caracterización

Según la discusión que antecede, se tiene inmediatamente:

IV.11.1 $\left\| \begin{array}{l} \text{Para que un torsor sea un par, es necesario y suficiente que su resul-} \\ \text{tante sea nula (véase § 8).} \end{array} \right\|$

IV.11.2 $\left\| \begin{array}{l} \text{Para que un torsor } \tau \text{ sea un deslizante, es necesario y suficiente que} \\ \text{exista un punto } A \in \mathcal{E} \text{ tal que } \tau(A) = 0. \end{array} \right\|$

Demostración. Si τ es un deslizante no nulo, el estudio que antecede prueba que se tiene $\tau(A) = 0$ en todo punto A de su eje central.

Recíprocamente, si existe un punto $A \in \mathcal{E}$ tal que $\tau(A) = 0$, el invariante escalar de τ es nulo. Por lo tanto τ es un torsor elemental que sólo puede ser constante si es nulo.]

Corolario

$\left\| \begin{array}{l} \text{Los deslizantes de } \mathcal{E} \text{ son todos los torsos de la forma:} \end{array} \right\|$

$$(2) \quad \tau : P \mapsto \tau(P) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP},$$

$\left\| \begin{array}{l} \text{donde } A \text{ designa un punto fijo cualquiera de } \mathcal{E} \text{ y } \vec{R} \text{ un vector fijo cual-} \\ \text{quiera de } E. \end{array} \right\|$

El deslizante τ , definido por (2), es nulo si, y solamente si, su resultante general \vec{R} es nula.

Si τ es fijo y si $\vec{R} \neq 0$, los puntos A que verifican (2) son los puntos del eje central de τ .

● Se observará que el torsor nulo es el único torsor que es a la vez un par y un deslizante.

Observaciones

1. En la definición de los pares y de los deslizantes no interviene la orientación de \mathcal{E} .

2. Es claro que si τ es un deslizante [resp. un par], para todo $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda\tau$ es también un deslizante [resp. un par].

3. Si τ_1, τ_2 son *pares*, resulta evidente que el torsor $\tau_1 + \tau_2$ es también un par (puesto que es constante). Los pares constituyen pues un *subespacio vectorial* del espacio \mathcal{T} de los torsos sobre \mathcal{E} ; inmediatamente se ve que este espacio vectorial es de dimensión 3 (puesto que es isomorfo con E).

Por el contrario, si τ_1 y τ_2 son dos *deslizantes*, su suma $\tau_1 + \tau_2$ no es en general un deslizante. Este problema se discutirá más adelante (§ 14). *Los deslizantes no constituyen pues un espacio vectorial*. No obstante, la observación 2 muestra que constituyen un *cono simétrico* de \mathcal{T} .

§ IV.12 VECTORES DESLIZANTES. VECTORES LIGADOS

Definición IV.12.1

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se da el nombre de } \mathbf{vector\ deslizante} \text{ a todo par } (\Delta, \vec{R}) \text{ constituido por una} \\ \text{recta afín } \Delta \text{ de } \mathcal{E} \text{ y de un vector no nulo } \vec{R} \text{ de } E, \text{ paralelo a } \Delta. \text{ La recta } \Delta \\ \text{se llama } \mathbf{soporte} \text{ y el vector } \vec{R} \text{ vector director del vector deslizante.} \end{array} \right.$

Relación con los deslizantes

A cada *deslizante no nulo* τ , de resultante general \vec{R} y de eje central Δ , podemos asociar el *vector deslizante* (\vec{R}, Δ) .

Recíprocamente, sea $\gamma = (\vec{R}, \Delta)$ un *vector deslizante*; resulta fácil ver que existe un *deslizante único* τ que tiene a \vec{R} como resultante general y a Δ como eje central.

En efecto, sea A un punto cualquiera de Δ ; se ve inmediatamente que el deslizante $\tau : P \mapsto \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$ verifica estas condiciones y que es el único que las verifica (ya que un deslizante que admita a Δ como eje central verifica necesariamente $\tau(A) = 0$). Este deslizante es pues independiente del punto $A \in \Delta$ elegido y diremos que es el deslizante **asociado** al vector deslizante $\gamma = (\vec{R}, \Delta)$, o **representado** por este vector deslizante. Lo designaremos por τ_γ .

La aplicación $\gamma \mapsto \tau_\gamma$ realiza pues una **biyección** del conjunto de los vectores deslizantes de \mathcal{E} sobre el conjunto de los deslizantes **no nulos** de \mathcal{E} .

Observación. Si se cambia la orientación de \mathcal{E} por su opuesta, la aplicación $\gamma \mapsto \tau_\gamma$, que acabamos de definir, queda *cambiada por su opuesta*. En otros términos: si, para una orientación de \mathcal{E} , el deslizante no nulo τ está representado por el vector deslizante (Δ, \vec{R}) , entonces, para la orientación opuesta de \mathcal{E} , τ está representado por el vector deslizante $(\Delta, -\vec{R})$.

Vectores ligados

Recordemos que un vector **ligado** de \mathcal{E} es un par (A, \vec{V}) formado por un punto A de \mathcal{E} y un vector \vec{V} de E (véase cap. 1), lo que equivale a dar el par $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, donde $B = A + \vec{V}$; pero para la interpretación física nos atenderemos a los vectores ligados.

Una *fuerza* se representa, en Física, mediante un *vector ligado* (A, \vec{V}) ; el punto A (llamado *origen* del vector ligado) representa el punto de *aplicación de la fuerza*, mientras que el vector \vec{V} determina la *intensidad* y la *dirección* de esta fuerza.

Por definición, el **momento del vector** ligado (A, \vec{V}) en un punto P de \mathcal{E} es el vector

$$\vec{M}(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{AP};$$

el de campo vectores $\tau : P \mapsto \vec{M}(P)$ recibe el nombre de **campo de los momentos** del vector ligado (A, \vec{V}) . Es evidentemente un **deslizante**; se dice que este deslizante está **representado** por el vector ligado (A, \vec{V}) .

En Mecánica clásica, una fuerza representada por el vector ligado (A, \vec{V}) interviene solamente a través de dos de sus características, a saber:

- a) su resultante \vec{V} ;
- b) el campo de los momentos del vector ligado (A, \vec{V}) .

Ello nos lleva a establecer la definición siguiente:

Definición IV.12.2

*Se dice que dos vectores ligados son **equivalentes** cuando representan el mismo deslizante, es decir cuando tienen el mismo momento en todo punto de \mathcal{E} .*

Es evidente que de este modo se define una *relación de equivalencia* en el conjunto de los vectores ligados. Vamos a determinar las clases de equivalencia:

IV.12.1 Para que dos vectores ligados (A, \vec{V}) y (B, \vec{W}) sean equivalentes, es necesario y suficiente que $\vec{V} = \vec{W}$ y que

- bien $\vec{V} = 0$, ó
- bien el vector \overrightarrow{AB} es colineal con \vec{V} .

Demostración. Para que los vectores ligados (A, \vec{V}) y (B, \vec{W}) sean equivalentes, es necesario y suficiente que se tenga:

$$(\forall P \in \mathcal{E}) \quad \vec{V} \wedge \overrightarrow{AP} = \vec{W} \wedge \overrightarrow{BP}.$$

En otros términos, es necesario y suficiente que los *deslizantes*

$$\tau_1 : P \mapsto \vec{V} \wedge \overrightarrow{AP} \quad \text{y} \quad \tau_2 : P \mapsto \vec{W} \wedge \overrightarrow{BP}$$

sean iguales. Ello exige en primer lugar que estos deslizantes tengan la misma *resultante general*, o sea $\vec{V} = \vec{W}$. Si esta resultante general es nula se tiene evidentemente $\tau_1 = \tau_2$; de lo contrario, la relación $\vec{V} \wedge \overrightarrow{AP} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{BP}$ equivale a $\vec{V} \wedge \overrightarrow{AB} = 0$, de donde el resultado.]]

Se observará que la condición $\vec{V} \wedge \overrightarrow{AB} = 0$ significa que los torsos τ_1 y τ_2 , que tienen la misma resultante general \vec{V} , tienen también el *mismo eje central*.

Si $\vec{V} = 0$, la clase de equivalencia del vector ligado (A, \vec{V}) es pues el conjunto de los vectores ligados de vector director nulo. Si $\vec{V} \neq 0$, la clase de equivalencia del vector ligado (A, \vec{V}) es el conjunto de los vectores ligados (B, \vec{V}) , donde B recorre la recta Δ , que pasa por A y está dirigida por el vector \vec{V} (véase la figura 2).



Figura 2.

Existe pues una biyección natural del conjunto de las clases de equivalencia de los *vectores ligados no nulos* sobre el conjunto de los *vectores deslizantes de \mathcal{E}* : a la clase del vector ligado (A, \vec{V}) (donde $\vec{V} \neq 0$), esta biyección asocia el vector deslizante (Δ, \vec{V}) donde Δ designa la recta de vector director \vec{V} que pasa por A .

Se observará que esta biyección no depende de la orientación elegida en \mathcal{E} .

Con las notaciones anteriores, el momento en un punto P del vector ligado (Δ, \vec{V}) recibe el nombre de **momento en P del vector deslizante (Δ, \vec{V})** .

Sistema de fuerzas

Un sistema de fuerzas es una sucesión finita de vectores ligados de \mathcal{E} , o sea

$$\mathcal{S} = ((A_1, \vec{V}_1), (A_2, \vec{V}_2), \dots, (A_n, \vec{V}_n)) .$$

Por definición, el momento en un punto I de \mathcal{E} del sistema \mathcal{S} es el vector

$$\vec{\mathcal{M}}_I(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{IA_i} \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \wedge \overrightarrow{A_i I},$$

que es la suma de los momentos de los vectores ligados que constituyen \mathcal{S} .

El **campo de los momentos** de \mathcal{S} , o sea $\tau : P \mapsto \vec{\mathcal{M}}_P(\mathcal{S})$ es evidentemente un **torsor** (ya que es una suma de torsos). Su *resultante general* es el vector

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i :$$

este vector recibe el nombre de *resultante general* del sistema \mathcal{S} .

(Observemos a este respecto que la *resultante general* de la *suma* de torsos es la suma de sus *resultantes generales*.)

Dos sistemas de fuerzas se dice que son **equivalentes** cuando definen el *mismo torsor* (es decir, tienen el mismo momento en todo punto). Nos encontramos aquí de nuevo con el lenguaje clásico de la Mecánica.

Observemos que se resuelve de este modo la aparente paradoja inherente al punto de vista abstracto de los campos equiproyectivos; a saber, la *resultante* de un campo equiproyectivo depende de la orientación elegida, mientras que el concepto de *resultante* de un sistema de fuerzas no depende de ella.

La explicación es clara; si se *parte* de un sistema de fuerzas, es el torsor asociado τ el que depende de la orientación elegida; este torsor τ se cambia a $-\tau$ cuando se cambia de orientación, de modo que su *resultante* es *la misma* en los dos casos.

Momento de un torsor respecto a un eje

En el espacio euclídeo \mathcal{E} , dar un eje equivale a dar una *recta* D (el soporte del eje) y un *vector unitario* \vec{u} paralelo a D ; en otros términos, dar un eje equivale a dar un *vector deslizante unitario* (D, \vec{u}) . Designaremos por $\vec{D} = (D, \vec{u})$ al eje definido por este vector deslizante.

Sea entonces τ un *torsor* de \mathcal{E} y $\vec{D} = (D, \vec{u})$ un *eje*. Si A, B son dos puntos cualesquiera de la recta D , se tiene, por la equiproyectividad,

$$\overrightarrow{AB} \cdot [\tau(A) - \tau(B)] = 0, \text{ de donde } \vec{u} \cdot \tau(A) = \vec{u} \cdot \tau(B).$$

El número $\tau_D = \vec{u} \cdot \tau(A)$ es pues independiente del punto A elegido sobre D , y recibe el nombre de **momento** del torsor τ respecto al eje \vec{D} . En otros términos:

Definición IV.12.3

El momento de un torsor τ respecto a un eje \vec{D} es la medida algebraica de la proyección sobre \vec{D} del momento de τ en un punto cualquiera de este eje (siendo este número independiente del punto considerado).

Se observará que el momento así definido no depende de la orientación elegida en \mathcal{E} .

Para interpretar el momento del torsor τ respecto al eje $\vec{D} = (D, \vec{u})$, consideremos el *deslizante* g representado por el vector deslizante unitario (D, \vec{u}) . Este deslizante será llamado *deslizante unitario asociado al eje \vec{D}* . Para todo punto $A \in D$, se tiene $g(A) = 0$, de donde

$$\mathcal{C}(\tau, g) = \vec{u} \cdot \tau(A).$$

Introduciremos el siguiente enunciado:

IV.12.2 *El momento de un torsor τ respecto a un eje es igual al comomento de τ y del deslizante unitario g asociado al eje.*

Cuando el mismo torsor τ es un deslizante, se tiene la interesante proposición siguiente:

IV.12.3 *Para que el momento de un deslizante no nulo τ respecto a un eje \vec{D} sea nulo, es necesario y suficiente que el eje central Δ del deslizante τ y la recta D sean coplanarios.*

Demostración. Designemos por \vec{R} a la resultante general del deslizante τ ; elijamos un punto A de D y un punto B de Δ . El momento de τ respecto a \vec{D} es

$$\tau_D = \vec{u} \cdot \tau(A) = \vec{u} \cdot (\vec{R} \wedge \overrightarrow{BA}) = [\vec{u}, \vec{R}, \overrightarrow{BA}].$$

Para tener $\tau_D = 0$, es pues necesario y suficiente que los tres vectores $\vec{u}, \vec{R}, \overrightarrow{BA}$

estén ligados. Puesto que \vec{u} y \vec{R} son no nulos, esta condición equivale a: « D y Δ son coplanarios».]

Un enunciado equivalente a IV.12.3 es:

IV.12.4 || *Para que el comomento de dos deslizantes no nulos sea nulo, es necesario y suficiente que sus ejes centrales sean coplanarios.*

Recordemos que el eje central de un deslizante no nulo es el soporte del vector deslizante asociado.

El concepto de momento de un torsor respecto de un eje es muy importante en Mecánica. Tiene también aplicaciones geométricas (véanse ejercicios IV.23 y IV.27).

§ IV.13 DESCOMPOSICIÓN DE UN TORSOR EN TORSORES ELEMENTALES

Vamos a demostrar en primer lugar que *todo torsor es*, de una infinidad de maneras, la *suma de un par y de un deslizante*. Consecuencia de ello será que los torsores elementales constituyen un sistema de generadores del grupo aditivo de los torsores. De ello resultará también que los torsores elementales no constituyen un espacio vectorial.

Sea en efecto τ un torsor cualquiera, de resultante \vec{R} , y sea A un punto cualquiera. La relación

$$(\forall P \in \mathcal{E}) \quad \tau(P) = \tau(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

muestra que el torsor τ es la *suma* de los dos torsores elementales siguientes:

- a) El par τ_0 igual al campo constante $P \mapsto \tau(A)$.
- b) El deslizante τ_1 igual al campo $P \mapsto \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$.

Se observará que, cuando $\vec{R} \neq 0$, el eje central de τ_1 pasa por A .

Si el punto A se toma sobre el eje central de τ (suponiendo $\vec{R} \neq 0$), el vector $\tau(A)$ es colineal con \vec{R} . Esta propiedad se expresa diciendo que el par τ_0 es *colineal* con el deslizante τ_1 .

IV.13.1 || *Sea A un punto de \mathcal{E} . Todo torsor τ de resultante no nula se escribe de manera única en la forma: $\tau = \tau_0 + \tau_1$, donde τ_0 es un par y τ_1 un deslizante no nulo cuyo eje central pasa por A .*

Demostración. El estudio que antecede ha mostrado la *existencia* de una tal descomposición. Para establecer su *unicidad*, basta observar que se tiene necesaria-

mente $\tau_1(A) = 0$, de donde $\tau_0(A) = \tau(A)$, lo cual determina τ_0 , y por lo tanto también $\tau_1 = \tau - \tau_0$.]]

Se tiene igualmente:

IV.13.2 *Todo torsor τ de resultante no nula se descompone de manera única en la suma de un par y de un deslizante colineales.*

Demostración. La existencia de una tal descomposición sigue desprendiéndose del estudio hecho en IV.13.1 y su unicidad proviene del hecho de que el eje central del deslizante no puede ser otro que el de τ .]]

Descomposición de un torsor en suma de dos deslizantes

Vamos a demostrar ahora que todo torsor es, de una infinidad de maneras, suma de dos deslizantes (lo cual demostrará que los deslizantes no constituyen un espacio vectorial). De hecho, vamos a imponer ciertas condiciones a uno de los dos deslizantes, lo cual nos permitirá obtener descomposiciones únicas.

A lo largo de este estudio, vamos a hacer uso del hecho de que, si g es un deslizante, entonces, para todo real λ , el torsor λg es también un deslizante.

IV.13.3 *Sea τ un torsor de resultante $\vec{R} \neq 0$ y sea g_1 un deslizante de eje central no paralelo a \vec{R} , tal que $\mathcal{C}(\tau, g_1) \neq 0$. Existe entonces un **deslizante único** g_2 y un real único λ tales que:*

$$\tau = \lambda g_1 + g_2.$$

Demostración. Sea \vec{R}_1 la resultante de g_1 ; para todo real λ , pongamos $\tau_\lambda = \tau - \lambda g_1$ (de manera que $\tau_0 = \tau$). La resultante del torsor τ_λ es $\vec{R} - \lambda \vec{R}_1$, y esta resultante es no nula, puesto que \vec{R} y \vec{R}_1 no son colineales. Por lo tanto, para que τ sea un deslizante, es necesario y suficiente que su invariante escalar sea nulo; es decir,

$$\mathcal{C}(\tau_\lambda, \tau_\lambda) = \mathcal{C}(\tau - \lambda g_1, \tau - \lambda g_1) = 0.$$

Desarrollando por bilinealidad, se obtiene

$$\mathcal{C}(\tau - \lambda g_1, \tau - \lambda g_1) = \mathcal{C}(\tau, \tau) - 2\lambda \mathcal{C}(\tau, g_1) + \lambda^2 \mathcal{C}(g_1, g_1).$$

Pero al ser g_1 un deslizante, se tiene

$$\mathcal{C}(g_1, g_1) = 0,$$

de donde

$$\mathcal{C}(\tau_\lambda, \tau_\lambda) = \mathcal{C}(\tau, \tau) - 2\lambda \mathcal{C}(\tau, g_1).$$

Para que τ_λ sea un deslizante, es necesario y suficiente que se tenga

$$\lambda = \frac{\mathcal{C}(\tau, \tau)}{2 \mathcal{C}(\tau, g_1)}$$

y, para este valor de λ , el deslizante $g_2 = \tau - \lambda g_1$ verifica las condiciones enunciadas. Finalmente, la unicidad de λ implica la de g_2 .]

Se dice que una recta D de \mathcal{E} es **de momento nulo** respecto a un torsor τ , si el momento de τ respecto a los ejes de soporte D es nulo.

Corolario

|| Sea τ un torsor de resultante $\vec{R} \neq 0$ y sea D una recta afín; para que τ se descomponga en la **suma de dos deslizantes** uno de los cuales tiene a D por **eje central**, es necesario y suficiente que D no sea paralela a \vec{R} y que no sea una recta de momento nulo de τ ; la descomposición es entonces **única**.

Basta, en efecto, aplicar IV.13.3 tomando como g_1 un deslizante no nulo de eje central D .]

Caso de un par

Aunque IV.13.3 no se aplique a los pares, vamos a ver que un par es, de una infinidad de maneras, suma de dos deslizantes.

Teorema IV.13.4

|| Sea γ un par no nulo, de momento \vec{C} . Para todo deslizante **no nulo** g_1 de eje central **ortogonal** a \vec{C} , existe un deslizante **único** g_2 tal que $\gamma = g_1 + g_2$.

Demostración. Basta comprobar que el torsor $g_2 = \gamma - g_1$ es un deslizante. Sean \vec{R}_1 y \vec{R}_2 las resultantes de g_1 y g_2 . Al ser γ un par, se tiene: $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$, de donde $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1 \neq 0$. Por lo tanto, para establecer que g_2 es un deslizante basta con demostrar que su invariante escalar es nulo, o sea $\mathcal{C}(g_2, g_2) = 0$. Ahora bien, se tiene

$$\mathcal{C}(g_2, g_2) = \mathcal{C}(\gamma - g_1, \gamma - g_1) = \mathcal{C}(\gamma, \gamma) - 2 \mathcal{C}(\gamma, g_1) + \mathcal{C}(g_1, g_1).$$

Puesto que los torsos γ y g_1 son elementales, se tiene

$$\mathcal{C}(\gamma, \gamma) = \mathcal{C}(g_1, g_1) = 0, \text{ de donde } \mathcal{C}(g_2, g_2) = -2 \mathcal{C}(\gamma, g_1).$$

Ahora bien, puesto que la resultante de γ es nula, se tiene, para todo punto A de \mathcal{C}

$$\mathcal{C}(\gamma, g_1) = \gamma(A) \cdot \vec{R}_1 = \vec{C} \cdot \vec{R}_1$$

(véase def. IV.10.1). Pero, por hipótesis el eje central de g_1 es ortogonal a \vec{C} , lo cual implica $\vec{C} \cdot \vec{R}_1 = 0$. Se tiene pues $\mathcal{C}(\gamma, g_1) = 0$, de donde $\mathcal{C}(g_2, g_2) = 0$.]

Determinación de g_2 conociendo g_1

Con las notaciones de IV.13.4, sea O_1 un punto del eje central de g_1 . Al ser conocida la resultante $\vec{R}_2 = \vec{R} - \vec{R}_1$ del deslizante g_2 , basta determinar un punto O_2 de su eje central. Ahora bien, un tal punto tiene que verificar

$$(1) \quad \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} = \vec{C}.$$

La ecuación (1) es un problema de división vectorial ya tratado en el § 2. Sólo tiene solución si $\vec{R}_1 \cdot \vec{C} = 0$, y cuando esta condición se cumple, las soluciones de (1) son los puntos O_2 definidos por

$$(2) \quad \overrightarrow{O_1 O_2} = \frac{\vec{R}_1 \wedge \vec{C}}{\vec{R}_1^2} + \lambda \vec{R}_1,$$

donde λ es un real cualquiera. El conjunto de los puntos O_2 que verifican (2) es el eje central del deslizante buscado g_2 . Se obtiene de este modo una nueva demostración de IV.13.4. El punto O_2 obtenido para $\lambda = 0$ es la proyección ortogonal de O_1 sobre el eje central de g_2 (véase la figura 3).

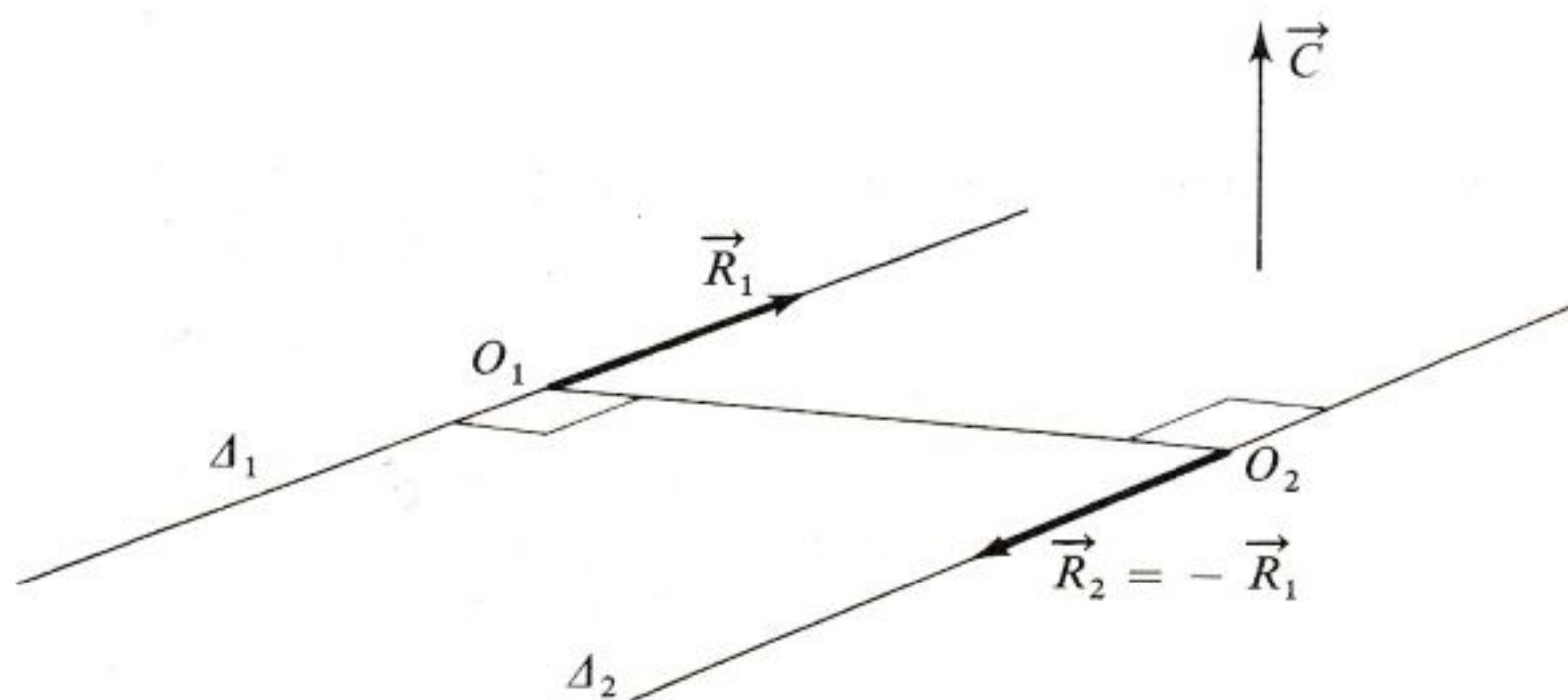


Figura 3.

Corolario

|| *Todo torsor τ se descompone de infinitas maneras en una suma de dos deslizantes.*

En efecto, si τ es un par, es consecuencia inmediata de IV.3.4. Si τ es un deslizante, se tiene, para todo $\lambda \in \mathbf{R}$: $\tau = \lambda\tau + (1 - \lambda)\tau$. Finalmente si τ no es ni par ni deslizante, su resultante \vec{R} es no nula y existe un punto $A \in \mathcal{E}$ tal que $\tau(A) \neq 0$; se puede elegir una recta D no paralela a \vec{R} y no ortogonal a $\tau(A)$; basta entonces aplicar IV.13.3, tomando como g_1 un deslizante no nulo de eje central D .]

Problema general de descomposición

El teorema IV.13.4 es sólo un caso particular del principio general siguiente:

IV.13.5 || *Para que la suma de dos torsos elementales sea un torsor elemental, es necesario y suficiente que su comomento sea nulo.*

Demostración. Si los torsos τ_1 y τ_2 son elementales, se tiene

$$\mathcal{C}(\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2) = \mathcal{C}(\tau_1, \tau_1) + 2\mathcal{C}(\tau_1, \tau_2) + \mathcal{C}(\tau_2, \tau_2) = 2\mathcal{C}(\tau_1, \tau_2),$$

de donde el resultado.]

Observación. Si $\mathcal{C}(\tau_1, \tau_2) = 0$, se ve igualmente que el torsor $\lambda_1\tau_1 + \lambda_2\tau_2$ es elemental cualesquiera que sean los números reales λ_1 y λ_2 . Se observará que la demostración de IV.13.4 parte del mismo principio que la de IV.13.5 (utilizando la forma bilineal \mathcal{C}); las dificultades suplementarias proceden del hecho de buscar deslizantes, lo que supone una mayor precisión que la búsqueda de torsos elementales; además, al comparar IV.13.4 con IV.13.5, se ve que IV.13.4 proporciona la descomposición más general de un par no nulo en la suma de dos deslizantes.

§ IV.14 SUMAS DE DESLIZANTES

Hemos visto que los deslizantes no constituyen un subespacio vectorial del espacio \mathcal{T} de los torsos en \mathcal{E} . Vamos a estudiar aquí las sumas de un número finito de deslizantes, empezando por el caso de dos:

IV.14.1 || *Para que la suma de dos deslizantes no nulos sea un deslizante no nulo, es necesario y suficiente que sus ejes centrales sean coplanarios y que la suma de sus resultantes sea no nula.*

Demostración. Sean g_1, g_2 los deslizantes y \vec{R}_1, \vec{R}_2 sus resultantes; según IV.13.5, $g_1 + g_2$ es un deslizante no nulo si, y solamente si, se tiene:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 \neq 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(g_1, g_2) = 0.$$

Además, la condición $\mathcal{C}(g_1, g_2) = 0$ se cumple si, y solamente si, los ejes centrales de g_1 y g_2 son coplanarios (véase IV.12.4).

Para determinar efectivamente el eje del deslizamiento $g_1 + g_2$, basta aplicar los resultados generales que vamos a establecer sobre los *sistemas (finitos) de deslizantes*:

Notaciones

Llamaremos **sistema de deslizantes** a toda sucesión finita (g_1, g_2, \dots, g_p) de deslizantes no nulos de \mathcal{C} . Diremos que los g_i son *concurrentes* (resp. *paralelos*, *coplanarios*) si sus ejes centrales son concurrentes (resp. paralelos, coplanarios).

Deslizantes concurrentes

Sean g_1, g_2, \dots, g_p deslizantes no nulos de resultantes respectivas $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_p$, cuyos ejes centrales pasan por un mismo punto O . Poniendo $\tau = \sum_{i=1}^p g_i$, se tiene:

$$\tau(O) = \sum_{i=1}^p g_i(O) = 0.$$

Por lo tanto, según IV.11.2, τ es un deslizante; si su resultante $\vec{R} = \sum_{i=1}^p \vec{R}_i$ es no nula, su eje central pasa por O (véase la figura 4); si $\vec{R} = 0$, se tiene $\tau = 0$.

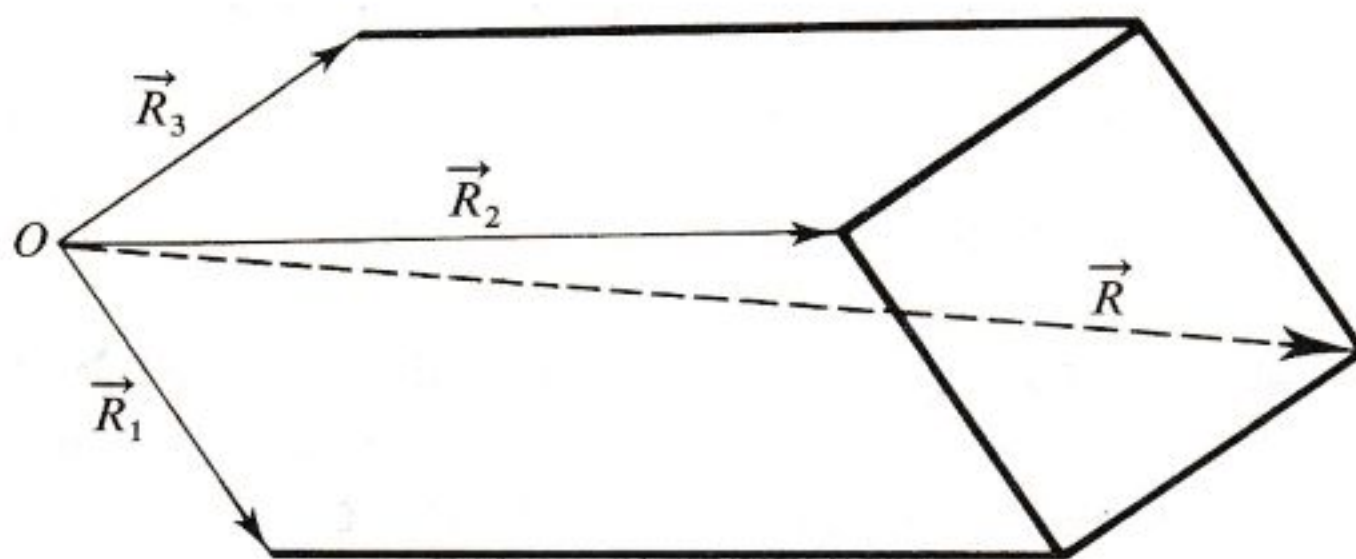


Figura 4.

De donde

IV.14.2 Sean g_1, g_2, \dots, g_p **deslizantes** no nulos, cuyos ejes centrales pasan por un mismo punto O ; entonces el torsor $\tau = \sum_{i=1}^p g_i$ es un **deslizante**; si este deslizante no es nulo, su eje central pasa por O .

Deslizantes paralelos

Sean g_1, g_2, \dots, g_p deslizantes no nulos cuyos ejes centrales son paralelos, y sea \vec{u} un vector no nulo paralelo a estos ejes. Para todo $i = 1, 2, \dots, p$, la resultante \vec{R}_i de g_i es de la forma $\mu_i \vec{u}$, con $\mu_i \in \mathbb{R}$.

Si el vector $\vec{R} = \sum_{i=1}^p \vec{R}_i$ es nulo, el torsor $\tau = \sum_{i=1}^p g_i$ es un **par**. De lo contrario se tiene $\sum_{i=1}^p \mu_i \neq 0$. En este último caso, sea $A \in \mathcal{E}$ un punto cualquiera, y para todo i sea A_i un punto del eje central de g_i . Se tiene

$$\tau(A) = \sum_{i=1}^n g_i(A) = \sum_{i=1}^n (\vec{R}_i \wedge \overrightarrow{A_i A}) = \vec{u} \wedge \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{A_i A} \right).$$

Para que sea $\tau(A) = 0$, basta

$$(1) \quad \sum_{i=1}^p \mu_i \overrightarrow{A_i A} = 0.$$

Pero al ser no nulo el escalar $\sum_{i=1}^p \mu_i$, la relación (1) define un punto A único: el *baricentro* de los puntos ponderados (A_i, μ_i) . De esto se deduce que τ es un deslizante no nulo, cuyo eje central pasa por A . Resumiendo:

IV.14.3 Sean g_1, g_2, \dots, g_p deslizantes no nulos de ejes centrales paralelos a una misma dirección δ , representados por los vectores ligados $(A_i, \mu_i \vec{u})_{1 \leq i \leq p}$, donde \vec{u} es un vector cualquiera de dirección δ .

Si se tiene: $\sum_{i=1}^p \mu_i = 0$, el torsor $\tau = \sum_{i=1}^p g_i$ es un **par**. De lo contrario, el torsor $\tau = \sum_{i=1}^p g_i$ es un **deslizante no nulo** cuyo eje es la paralela a δ que pasa por el baricentro del sistema ponderado (A_i, μ_i) .

Deslizantes coplanarios

Sean g_1, \dots, g_p deslizantes no nulos cuyos ejes centrales se hallan contenidos en un mismo plano afín \mathcal{P} y, para todo $i = 1, 2, \dots, p$, sea (A_i, \vec{R}_i) un vector ligado que representa a g_i . Poniendo

$$\tau = \sum_{i=1}^p g_i \quad \text{y} \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^p \vec{R}_i,$$

se tiene, para todo $A \in \mathcal{E}$:

$$\vec{R} \cdot \tau(A) = \vec{R} \cdot \left(\sum_{i=1}^p g_i(A) \right) = \vec{R} \cdot \left(\sum_{i=1}^p \vec{R}_i \wedge \overrightarrow{A_i A} \right).$$

Ahora bien, el vector $\sum_{i=1}^p \vec{R}_i \wedge \overrightarrow{A_i A}$ es o nulo o bien ortogonal a \mathcal{P} y por lo tanto ortogonal a \vec{R} . De donde se deduce $\mathcal{C}(\tau, \tau) = 2 \vec{R} \cdot \tau(A) = 0$, lo cual demuestra que el tisor τ es elemental. Enunciaremos:

IV.14.4 *La suma de deslizantes coplanarios es un deslizante o un par.*

Observación. Se puede estudiar analíticamente este problema como sigue: tomemos un sistema de referencia ortonormal directo de \mathcal{E} de tal manera que \mathcal{P} sea el plano $z = 0$; para todo $i = 1, 2, \dots, p$, designemos por $(X_i, Y_i, 0)$ a las componentes de \vec{R}_i y por $(x_i, y_i, 0)$ a las coordenadas de A_i . Poniendo $\tau = \sum_{i=1}^p g_i$, el momento de τ en el punto A de \mathcal{P} , de coordenadas $(x, y, 0)$ viene dado por los cálculos siguientes:

$$\vec{R}_i \begin{vmatrix} X_i \\ Y_i \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{A_i A} \begin{vmatrix} x - x_i \\ y - y_i \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{R}_i \wedge \overrightarrow{A_i A} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ X_i y - Y_i x + x_i Y_i - y_i X_i \end{vmatrix}$$

$$\tau(A) = \sum_{i=1}^p \vec{R}_i \wedge \overrightarrow{A_i A}.$$

La relación $\tau(A) = 0$ equivale a

$$(2) \quad y \left(\sum_{i=1}^p X_i \right) - x \left(\sum_{i=1}^p Y_i \right) + \sum_{i=1}^p (x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

Si los números $X = \sum X_i$ e $Y = \sum Y_i$ no son ambos nulos (es decir, si $\vec{R} \neq 0$), la ecuación (2) define una recta de \mathcal{P} , la cual es el eje central del deslizante τ .

Apéndice

Torsos paralelos a un plano

El resultado que sigue será utilizado en el estudio del movimiento plano sobre plano (§ XII.12):

|| Sea τ un tisor de \mathcal{E} tal que existe un vector no nulo $k \in E$ que verifica:

(1) $(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \vec{k} \cdot \tau(M) = 0.$

|| Entonces τ es un **tisor elemental**; se trata de un **par** ortogonal a \vec{k} , o un **deslizante** de eje paralelo a \vec{k} .

Demostración. Para todos los $M, P \in \mathcal{E}$, se tiene

$$\vec{k} \cdot (\tau(M) - \tau(P)) = 0,$$

o sea, designando por \vec{R} a la resultante de τ :

$$(2) \quad \vec{k} \cdot (\overrightarrow{MP} \wedge \vec{R}) = [\vec{k}, \overrightarrow{MP}, \vec{R}] = 0.$$

Al ser el vector \overrightarrow{MP} arbitrario, la relación (2) implica $\vec{k} \wedge \vec{R} = 0$, de donde

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \vec{R} \cdot \tau(M) = 0.$$

De ahí se desprende el resultado anunciado.]]

Campos antisimétricos de \mathcal{E}_2

Identificando el plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 con un plano \mathcal{P} de $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$, se ve fácilmente que todo campo antisimétrico de \mathcal{E}_2 se prolonga a \mathcal{E}_3 en un campo antisimétrico paralelo a \mathcal{P} . Del resultado anterior se deduce entonces fácilmente:

|| En un plano afín euclídeo orientado \mathcal{E}_2 , los campos antisimétricos son los campos constantes, y los campos de la forma $M \mapsto s(\overrightarrow{AM})$, donde A designa un punto fijo de \mathcal{E}_2 y s una semejanza fija de ángulo $\pm \pi/2$.

Dejamos al lector que obtenga por sí mismo este resultado sin utilizar la teoría de torsos.

Capítulo V

Estudio afín de los arcos geométricos

Introducción

Se dedica este capítulo al estudio del concepto de *arco geométrico* en un espacio afín real.

Sabemos que un espacio afín \mathcal{E} ligado a un e.v.n. E se reduce, una vez elegido un origen O , al mismo espacio E (véase § I.5). Además, si $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ es una aplicación definida en un intervalo I de \mathbf{R} , la existencia y el valor de la derivada $\frac{d}{dt}[\overrightarrow{Of(t)}]$ no dependen del origen O elegido. A esta derivada (cuando exista) la designaremos por $f'(t)$.

Estudiaremos solamente, para simplificar, los arcos de un e.v.n. E , al que siempre se supondrá provisto de su estructura afín natural, y utilizaremos también el convenio habitual: a los elementos de E los llamaremos *puntos* cuando los consideremos como pertenecientes al espacio afín E y los llamaremos *vectores* cuando los consideremos como pertenecientes al espacio vectorial E .

Todos los resultados que vamos a establecer seguirán siendo válidos, por supuesto, cuando se sustituye E por un espacio afín cualquiera \mathcal{E} sobre E y se hagan las oportunas modificaciones de lenguaje.

En todo este capítulo se designará la norma de E por $x \mapsto \|x\|$.

§ V.1 CAMINOS. ARCOS GEOMÉTRICOS

Sean a y b dos números reales con $a < b$. Existen cuatro intervalos de extremos a, b : el intervalo *cerrado* $[a, b]$, los intervalos *semiabierto* $[a, b[$ y $]a, b]$ y el intervalo *abierto* $]a, b[$. De estos intervalos solamente es *compacto* el $[a, b]$.

De un modo más general, utilizaremos intervalos *semiabierto* de la recta completa $\bar{\mathbf{R}}$, de la forma $[a, b[$, donde $a \in \mathbf{R}$ y $a < b \leq +\infty$ (resp. $]a, b]$, siendo $b \in \mathbf{R}$ y $-\infty \leq a < b$). El conjunto \mathbf{R} se identificará al intervalo abierto $] -\infty, +\infty[$. Intervalos *acotados* son aquellos cuyos extremos pertenecen a \mathbf{R} .

Sea E un e.v.n. e I un intervalo de $\bar{\mathbf{R}}$. De una aplicación $f: I \rightarrow E$ se dice que es *derivable* en I si es derivable en todo punto interior de I , y admite derivada por la derecha o por la izquierda en los extremos de I que pertenecen a I (véase el tomo 2 p. 144). Se define por recurrencia el concepto de aplicación *k veces derivable* de I en E [resp. de aplicación *k veces continuamente derivable*].

● Se dirá abreviadamente que una aplicación es *de clase C^k* si es k veces continuamente derivable y que es *de clase D^k* si es k veces derivable; k es un entero ≥ 0 , o bien el símbolo $+\infty$. Una aplicación de clase C^0 es simplemente una aplicación *continua*. Solamente hablaremos de aplicaciones de clase D^k para $k \geq 1$.

● En lo sucesivo se supondrá que todos los intervalos de $\bar{\mathbf{R}}$ que se consideren son *no vacíos* y *no reducidos a un punto*.

Definición V.1.1

Sea E un e.v.n. e I un intervalo de $\bar{\mathbf{R}}$. Una aplicación **continua** $f: I \rightarrow E$ recibe el nombre de **camino** (de E). Se dice que el camino es **de clase C^k** [resp. **de clase D^k**] si la aplicación f es de clase C^k [resp. de clase D^k]; se dice que es **compacto** [resp. **semiabierto, abierto**] si I es un intervalo compacto [resp. semiabierto, abierto].

Si $f: I \rightarrow E$ es un camino, la imagen por f de todo extremo de I (que pertenezca a I) se dice que es un *extremo* del camino.

● Se denomina **lazo** a todo camino compacto cuyos extremos coinciden. Para $k \geq 1$, todo camino de clase C^k es, a fortiori, de clase D^k .

Caminos de clase C^k a trozos

Con frecuencia se ofrecen a consideración caminos cuyas derivadas presentan solamente un número finito de discontinuidades (por ejemplo, en la teoría de las integrales curvilíneas, tomo 4, § VI.3).

Definición V.1.2

Sea E un e.v.n. y $f: [a, b] \rightarrow E$ un camino compacto. Se dice que f es de clase C^k a trozos si existe una subdivisión de $[a, b]$, tal como $(a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de manera que la restricción de f a cada intervalo cerrado $[a_{i-1}, a_i]$ ($1 \leq i \leq n$) sea de clase C^k .

Para que el camino $f: [a, b] \rightarrow E$ sea de clase C^k a trozos, es necesario y suficiente que:

- a) el conjunto D de los puntos $t \in [a, b]$ tales que $f^{(k)}(t)$ no existe sea finito;
- b) la función $f^{(k)}$ sea continua en $[a, b] \setminus D$;
- c) $f^{(k)}$ admita, en cada punto de D , un límite por la derecha y un límite por la izquierda. (Esto proviene, mediante un ligero cambio, de la proposición IV.4.4 del tomo 2.) Los puntos de D determinan entonces una subdivisión de $[a, b]$ que verifica las condiciones de la definición IV.1.2.

De manera análoga se definiría el concepto de *camino de clase D^k a trozos*.

Se demuestra fácilmente que un camino de clase C^k a trozos (o incluso solamente, de clase D^k a trozos) es de clase C^r para $r \leq k - 1$.

Caminos C^k -equivalentes o D^k -equivalentes**Definición V.1.3**

Se dice que dos caminos $f: I \rightarrow E$ y $g: J \rightarrow E$ de un e.v.n. E son C^k -equivalentes [resp. D^k -equivalentes] si existe una biyección $\theta: I \rightarrow J$, de clase C^k [resp. D^k] lo mismo que su inversa, tal que $f = g \circ \theta$.

Se dice entonces que f se deduce de g por el **cambio de parámetro** θ (llamando *parámetros* a las variables que recorren I y J).

Los intervalos I y J son entonces necesariamente de la *misma naturaleza*, es decir, los dos compactos, los dos abiertos, o los dos semiabiertos (véase tomo 2, prop. II.10.5).

Observación. La continuidad de una biyección $\theta: I \rightarrow J$ lleva consigo la de su inversa θ^{-1} (véase tomo 2, prop. II.10.2). Pero si θ es de clase C^k [resp. D^k], con $k \geq 1$, su inversa sólo es de clase C^k [resp. D^k] si su derivada θ' no se anula (véase tomo 2, prop. IV.1.9).

Aplicando el hecho de que la compuesta de dos biyecciones de clase C^k [resp. D^k] es también de clase C^k [resp. D^k], se obtiene:

V.1.1 Dejando fijo el e.v.n. E , la relación «los caminos f, g son C^k -equivalentes

|| [resp. D^k -equivalentes]» es una **relación de equivalencia** en el conjunto de los caminos de E .

Por otra parte, si f es un camino de clase C^k [resp. de clase D^k], se ve que todo camino C^k -equivalente a f [resp. D^k -equivalente a f], es también de clase C^k [resp. de clase D^k].

● Es claro que dos caminos C^k -equivalentes ($k \geq 0$) o D^k -equivalentes ($k \geq 1$) tienen la **misma imagen** en E . Sin embargo, la recíproca no es cierta: por ejemplo, si E es el plano euclídeo, identificado con \mathbf{C} , los dos caminos

$$f : t \mapsto e^{it} \quad \text{y} \quad g : t \mapsto e^{2it},$$

definidos sobre $[0, 2\pi]$ tienen la misma imagen, que es la circunferencia unidad de centro O . Sin embargo, no son ni siquiera C^0 -equivalentes; en efecto, el primero tiene un solo punto múltiple (el punto $f(0) = f(2\pi)$) mientras que en el segundo son múltiples todos sus puntos (ver más adelante).

Cuando se da una clase γ de caminos equivalentes queda por lo tanto determinado un conjunto A (imagen común de los caminos de γ) y una estructura sobre A (modo de recorrido de A). Llegamos de esta forma al concepto de *arco geométrico*, que corresponde a la idea intuitiva de «curva provista de un cierto modo de recorrido»:

Definición V.1.4

En un e.v.n. E , un **arco geométrico de clase C^k** [resp. D^k] es una clase γ de caminos C^k -equivalentes [resp. D^k -equivalentes] supuestos todos de clase C^k [resp. D^k]. A los caminos de la clase γ se les da el nombre de **representaciones geométricas admisibles** de γ (abreviadamente, **parametrizaciones**); su imagen común recibe el nombre de **soporte** de γ y se designará por **sop** (γ). Se dirá finalmente que son **admisibles** los cambios de parámetro que hacen pasar de una parametrización a otra.

● Para definir un arco γ de clase C^k [resp. de clase D^k], basta con dar un camino f de clase C^k [resp. de clase D^k]. Los caminos C^k -equivalentes [resp. D^k -equivalentes] a f son entonces todos de clase C^k [resp. D^k] y constituyen un arco geométrico γ que tiene a f como representación paramétrica admisible. Abreviadamente se dice que γ es el **arco definido por la parametrización f** .

Los intervalos de definición de los caminos que representan a un mismo arco son todos de la misma naturaleza: si son compactos [resp. abiertos, semiabiertos], se dice que el arco γ es *compacto* [resp. *abierto*, *semiabierto*].

El soporte de un arco compacto es compacto. Pero el soporte de un arco no

compacto puede ser compacto, según demuestra el ejemplo del arco plano definido por el camino $t \mapsto e^{it}$ ($t \in \mathbf{R}$).

Extremos. Arcos cerrados

Se ve fácilmente que dos caminos C^k -equivalentes [resp. D^k -equivalentes] tienen como *extremos* los mismos puntos. Por lo tanto estos puntos dependen solamente del arco geométrico γ definido por los caminos considerados. Cada uno de ellos recibe el nombre de **extremo** del arco.

Por ejemplo, el arco de \mathbf{R}^2 definido mediante la parametrización $t \mapsto (t, t^2)$ ($0 \leq t < 1$) tiene como único extremo el punto $(0, 0)$.

Un arco compacto γ , definido por una parametrización $f: [a, b] \rightarrow E$, tiene por extremos los puntos (no necesariamente distintos) $A = f(a)$, $B = f(b)$.

● Si f es un *lazo* (es decir si $f(a) = f(b)$), lo mismo ocurre para toda parametrización de f . Se dice entonces que el arco γ es **cerrado**.

Un arco cerrado es por lo tanto un arco compacto cuyos extremos coinciden.

Observación. De un arco compacto cualquiera se dice a veces que es «cerrado en sus extremos». Este concepto no debe confundirse con el más restrictivo, de *arco cerrado*.

Ejemplos

1. En el plano euclídeo E_2 , una *catenaria* es un arco de clase C^∞ definido, en una base ortonormal adecuada, mediante una parametrización de la forma $x = at$, $y = a \cosh t$ ($a = \text{Cte}$; $t \in \mathbf{R}$). Es un arco *abierto*.

2. En el espacio euclídeo E_3 , una *hélice circular* es un arco abierto de clase C^∞ definido, en una base ortonormal adecuada, mediante una parametrización de la forma

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (a, b, \text{Ctes} \neq 0, \quad t \in \mathbf{R}).$$

3. En E_2 , una *cardioide* es un arco cerrado de clase C^∞ que, en una base ortonormal adecuada, tiene una parametrización de la forma

$$x = a \cos t - 2 \cos \frac{t}{2}, \quad y = a \left(\sin t - 2 \sin \frac{t}{2} \right) \\ (a = \text{Cte}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi).$$

Orden de multiplicidad. Arcos simples

En un e.v.n. E , sea γ un arco geométrico y M un punto de su soporte. Designemos por f una parametrización de γ ; puesto que los cambios de parámetro son biyectivos, el cardinal del conjunto $f^{-1}(M)$ es independiente de la f elegida. Si este cardinal es finito, el entero $p = \text{card}(f^{-1}(M))$ recibe el nombre de **multiplicidad del punto M** . Si $p = 1$, se dice que el punto M es **simple**; si $p \geq 2$, se dice que el punto M es **múltiple de orden p** (doble si $p = 2$, triple si $p = 3$, etc.).

Definición V.1.5

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se dice que un arco } \gamma \text{ es } \mathbf{simple} \text{ si todos los puntos de } \text{sop}(\gamma) \text{ son simples,} \\ \text{es decir si toda parametrización de } \gamma \text{ es una aplicación } \mathbf{inyectiva}. \end{array} \right.$

Para que un arco γ sea simple, basta evidentemente que *una* de sus parametrizaciones sea inyectiva.

Ejemplos

La *catenaria* y la *hélice circular* definidas anteriormente son arcos simples.

El arco de \mathbf{R}^2 definido por $x = t(t + 1)$, $y = t^2(t + 1)$ ($t \in \mathbf{R}$) tiene como punto doble el origen (ya que este punto se obtiene para los valores $t = 0$ y $t = -1$ del parámetro).

El arco de \mathbf{R}^2 definido por $x = t^2$, $y = t^4$ ($t \in \mathbf{R}$) tiene dobles todos sus puntos salvo el origen (el cual es un punto simple).

Arcos definidos por una parametrización cartesiana

Designemos por \mathcal{E} un *espacio afín de dimensión finita n* .

Para abreviar, diremos que una parametrización $f: I \rightarrow \mathcal{E}$, de un arco γ de \mathcal{E} , es **cartesiana** si existe un sistema de referencia \mathcal{R} y un valor de i ($1 \leq i \leq n$) tal que, para todo $t \in I$, la coordenada i -ésima del punto $f(t)$ es igual a t : *una parametrización cartesiana es pues una parametrización tal que, en un sistema de referencia adecuado, el parámetro es igual a una de las coordenadas*.

Una tal parametrización es evidentemente inyectiva. Todo arco de \mathcal{E} *definido por una parametrización cartesiana es por lo tanto simple*.

Por ejemplo, la parábola definida en el plano afín \mathbf{R}^2 por la parametrización cartesiana: $x \mapsto (x, kx^2)$ ($k = \text{Cte}$, $x \in \mathbf{R}$) es un arco simple.

Arcos cerrados simples

Sea γ un arco geométrico *cerrado*, definido por lo tanto mediante una parametrización $f: [a, b] \rightarrow E$ tal que $f(a) = f(b)$. Un arco de esta naturaleza no puede ser *simple* en el sentido de la definición V.1.5. No obstante, resulta cómodo establecer la siguiente

Definición V.1.6

Un arco **cerrado** γ definido mediante una parametrización $f: [a, b] \rightarrow E$ que verifica $f(a) = f(b)$ se dirá que es un arco **cerrado simple**, si la restricción de f al intervalo semiabierto $[a, b[$ es **inyectiva**.

La condición enunciada equivale a decir que la restricción de f al intervalo abierto $]a, b[$ define un arco simple, cuyo soporte no contiene el extremo de γ . Es pues independiente de la parametrización elegida f de γ .

Por ejemplo, la parametrización $t \rightarrow e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) define un arco cerrado simple de \mathbf{R}^2 , cuyo soporte es la circunferencia unidad.

Parametrizaciones periódicas

Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow E$ una aplicación no constante de clase C^k [resp. D^k] y de período T . Para todo $a \in \mathbf{R}$, la restricción de f al intervalo $[a, a + T]$ define un arco *cerrado* de clase C^k [resp. D^k]; todos los arcos así obtenidos tienen el mismo soporte (pero no el mismo extremo). Además, si uno de ellos es cerrado simple, lo mismo ocurrirá con todos.

Para abreviar, se dirá simplemente que estos arcos «están definidos por la parametrización periódica f ». Para construir un soporte común, basta con hacer variar el parámetro en un intervalo de la forma $[a, a + \tau]$, donde τ designa el período más pequeño de f .

Inversamente, sea γ un arco *cerrado* de clase C^k [resp. D^k]. Cada parametrización $f: [a, b] \rightarrow E$ de γ puede evidentemente prolongarse en una aplicación periódica \bar{f} , de período $b - a$: basta con poner

$$(\forall t \in \mathbf{R}) \quad \bar{f}(t) = f[t - n(b - a)],$$

donde $n = \left[\frac{t - a}{b - a} \right]$ designa la parte entera de $\frac{t - a}{b - a}$. La existencia y la continuidad de \bar{f} resultan de la hipótesis $f(b) = f(a)$. Pero, para $k \geq 1$, el camino periódico \bar{f} así obtenido solamente es de clase C^k [resp. D^k] si las derivadas de f verifican las relaciones

$$(1) \quad f^{(i)}(b) = f^{(i)}(a) \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

cualquier otra parametrización admisible $g : [\alpha, \beta] \rightarrow E$ de γ verifica entonces las relaciones análogas $g^{(i)}(\beta) = g^{(i)}(\alpha)$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

A los arcos cerrados definidos por parametrizaciones periódicas de clase k se les puede llamar «curvas cerradas de clase k ».

§ V.2 ARCOS ORIENTADOS

La aplicación $\theta : I \rightarrow J$ que figura en la definición V.1.3 es siempre *estrictamente monótona* ya que es un homeomorfismo de intervalos; es pues o *creciente* o *decreciente*. Ahora bien, si el cambio de parámetro θ es creciente, lo mismo ocurre con θ^{-1} , y si θ_1 y θ_2 son dos cambios de parámetro crecientes, también $\theta_2 \circ \theta_1$ es entonces un cambio de parámetro creciente. Se obtiene por lo tanto una *relación de equivalencia más fina* que la introducida en la definición V.1.3 estableciéndose

Definición V.2.1

Se dice que dos caminos $f : I \rightarrow E$ y $g : J \rightarrow E$ de un e.v.n. E son **positivamente C^k -equivalentes** [resp. **positivamente D^k -equivalentes**] si existe por lo menos una biyección creciente $\theta : I \rightarrow J$ de clase C^k [resp. D^k] al igual que su recíproca, de tal modo que sea $f = g \circ \theta$.

Las clases de equivalencia definidas por esta relación reciben el nombre de *clases de orientación*, o **arcos orientados**, de clase C^k [resp. D^k].

Sea entonces γ un arco geométrico definido por una parametrización f . Las parametrizaciones de γ que se deducen de f mediante un cambio *creciente* de parámetro constituyen un *arco orientado* γ_+ , y se dice que este arco orientado se obtiene *orientando* γ en el sentido de los parámetros crecientes (para la parametrización f considerada).

Del mismo modo, las parametrizaciones de γ que se deducen de f mediante un cambio *decreciente* de parámetro constituyen un arco orientado γ_- , del cual se dice que es **opuesto** a γ_+ ; toda parametrización de γ pertenece a γ_+ o a γ_- . Pero las clases γ_+ y γ_- no son necesariamente distintas. En efecto, si g es una parametrización de γ , pueden existir distintos cambios de parámetro admisibles θ que verifiquen $g = f \circ \theta$; si existen varios, no son necesariamente o todos crecientes o todos decrecientes. Veremos más adelante ejemplos de ello.

En consecuencia arco geométrico γ es, a lo sumo, la reunión de dos clases de orientación. Si hay dos, se dice que se ha orientado γ cuando se ha elegido una de estas clases.

El estudio que sigue mostrará que los arcos geométricos que admiten solamente una orientación son relativamente excepcionales.

El concepto de arco orientado corresponde a la idea intuitiva de «curva provista de un *sentido de recorrido*».

Ejemplos de arcos que admiten dos orientaciones

V.2.1 \parallel *Para que un arco geométrico admita dos orientaciones, basta que posea (por lo menos) dos puntos simples.*

Demostración. Sea γ un arco geométrico (de clase cualquiera), definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, y que admite dos puntos simples A, B . Para cada parametrización admisible $g: J \rightarrow E$ de γ , existe un par único (a_g, b_g) de puntos de J que verifican:

$$g(a_g) = A, \quad g(b_g) = B, \text{ y se tiene } b_g \neq a_g.$$

Además, si $g = f \circ \theta$ se deduce de f por el cambio de parámetro θ , se tiene necesariamente:

$$(1) \quad a_f = \theta(a_g) \quad \text{y} \quad b_f = \theta(b_g).$$

Designemos entonces por γ_+ [resp. γ_-] al conjunto de las parametrizaciones $g = f \circ \theta$ de γ que se deducen de f por un cambio de parámetro θ creciente [resp. decreciente]. Según la relación (1) es inmediato que una parametrización admisible g de γ pertenece a γ_+ o a γ_- según que el real $b_g - a_g$ sea o no del mismo signo que $b_f - a_f$. Por lo tanto γ_+ y γ_- no tienen ningún elemento común, de donde resulta que γ admite dos orientaciones.]

Intuitivamente, un arco geométrico que admite dos puntos simples A, B puede estar provisto de *dos sentidos de recorrido*: uno de estos sentidos de recorrido es el de un móvil que pasa por A antes de pasar por B ; el otro es el del móvil que pasa por B antes de pasar por A . La demostración de V.2.1 no hace más que traducir esta idea intuitiva.

Corolario

\parallel *Un arco simple [resp. un arco cerrado simple] (véase def. V.1.6) admite dos orientaciones.*

Demostración. Para un arco simple la demostración es evidente (puesto que todos los puntos de un arco tal son simples). Si γ es un arco *cerrado simple*, sus

parametrizaciones son de la forma: $f: [a, b] \rightarrow E$, siendo la restricción de f a $[a, b[$ inyectiva, y por lo tanto todos los puntos pertenecientes a $f([a, b[)$ son simples.]

Caracterización de los arcos que admiten solamente una orientación

Para reconocer si un arco geométrico admite una o dos orientaciones, utilizaremos en lo sucesivo el lema siguiente:

V.2.2 $\left\| \begin{array}{l} \text{Para que un arco geométrico } \gamma \text{ definido por una parametrización } f: I \rightarrow E \text{ admita una} \\ \text{sola orientación, es necesario y suficiente que exista una biyección decreciente} \\ \theta: I \rightarrow I \text{ que constituya un cambio de parámetro admisible, tal que } f \circ \theta = f. \end{array} \right.$

Demostración. Si una tal biyección θ existe, es evidente que γ admite una sola orientación (puesto que toda parametrización admisible de γ es positivamente equivalente a f o a $f \circ \theta$ y por lo tanto a f).

Inversamente, supongamos que γ admita una sola orientación y sea φ el cambio de parámetro (evidentemente admisible) definido por $\varphi(t) = -t$ ($t \in I$). Al ser la parametrización $g = f \circ \varphi^{-1}$ positivamente equivalente a f , existe un cambio creciente de parámetro $\psi: J \rightarrow I$ tal que $g = f \circ \psi$. Poniendo $\theta = \psi \circ \varphi$, se ve que θ es un cambio decreciente de parámetro que verifica $f \circ \theta = (f \circ \psi) \circ \varphi = g \circ \varphi = f$, o sea $f \circ \theta = f$.

Se observará que la proposición V.2.2 permite dar una demostración más rápida (pero menos intuitiva) de V.2.1: ya que si γ admite dos puntos simples $A = f(a)$ y $B = f(b)$, toda biyección θ que verifique $f \circ \theta = f$ tiene que satisfacer a $\theta(a) = a$ y $\theta(b) = b$, y una tal biyección no puede ser decreciente.]

La proposición V.2.2 muestra que los arcos que no admiten más que una orientación son relativamente raros. De hecho estos arcos pueden ser considerados como arcos cualesquiera recorridos *dos veces en sentidos inversos*. En el tomo 4 veremos que la integral de una forma diferencial de grado uno es nula sobre un tal arco.

Ejemplo

El arco γ de \mathbf{R}^2 definido por la parametrización $f: t \mapsto (\sin t, \cos^2 t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) admite solamente una orientación. En efecto, el cambio decreciente de parámetro $\theta: t \mapsto \pi - t$ verifica $f \circ \theta = f$.

De hecho γ es el arco de parábola de ecuación $y = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) recorrido dos veces en sentidos inversos.

§ V.3 SUB-ARCOS. ARCOS REGULARES

● A partir de ahora, vamos a designar por E a un e.v.n. de dimensión finita $n \geq 1$ (lo que nos evitará precisar la norma utilizada).

Por otra parte, para aligerar el lenguaje utilizaremos las palabras «función (o arco) de clase k » en lugar de «función (o arco) de clase C^k [resp. D^k]»; de las parametrizaciones admisibles de un arco de clase k se dirá simplemente que son «equivalentes» en lugar de decir que son « C^k -equivalentes [resp. D^k -equivalentes]».

Finalmente, si γ es un arco de clase k ($k \geq 1$), definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, y si $g: J \rightarrow E$ es un camino C^{k-r} -equivalente a f [resp. D^{k-r} -equivalente a f] con $0 < r < k$, diremos que g es una *parametrización de clase C^{k-r} [resp. D^{k-r}]* de γ . Se trata aquí de un abuso de lenguaje ya que g no es, en rigor, una parametrización admisible de γ . De este convenio se hará uso en el capítulo VII.

Todos los resultados que vamos a establecer referentes a arcos geométricos (propiedades de sub-arcos, contacto, sub-espacios fundamentales, etc...) serán válidos «a fortiori» para *arcos orientados*. Estas extensiones resultan evidentes y prescindiremos de formularlas explícitamente cada vez.

Sub-arcos

Sean $f: I \rightarrow E$ y $g: J \rightarrow E$ dos parametrizaciones de un mismo arco γ de clase k , tales que $f = g \circ \theta$, siendo θ un cambio de parámetro. Para todo sub-intervalo I_1 de I , las restricciones de f a I_1 y de g a $J_1 = \theta(I_1)$ son evidentemente equivalentes. Podemos por lo tanto establecer:

Definición V.3.1

Sea γ un arco geométrico de clase k , definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$. Se da el nombre de **sub-arco** de γ a todo arco de la misma clase k que γ definido por la restricción de f a un sub-intervalo de I .

El teorema que sigue prueba que *toda* parametrización de un sub-arco compacto de γ es la restricción de una parametrización de γ (por lo menos).

V.3.1 || Si γ es un arco de clase k y si γ_1 es un **sub-arco compacto** de γ , toda parametrización de γ_1 se prolonga en una parametrización de γ .

Demostración. Designemos por $f: I \rightarrow E$ una parametrización de γ y supongamos γ_1 definido por la restricción f_1 de f al sub-intervalo compacto $I_1 = [\alpha, \beta]$

de I . Basta demostrar que toda biyección $\theta_1 : I_1 \rightarrow J_1$ de clase k al igual que su inversa, se prolonga a una biyección $\theta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, de clase k lo mismo que su inversa. En efecto, la restricción de θ a I constituirá entonces un cambio de parámetro admisible sobre γ que prolongará θ_1 , y la aplicación $g = f \circ \theta^{-1}$ será una parametrización de γ , que prolongará la parametrización (arbitraria) $g_1 = f_1 \circ \theta_1^{-1}$ de γ_1 . (Señalemos que una tal prolongación no es única.)

Siendo el resultado inmediato para los arcos de clase C^0 , supondremos $k \geq 1$. Para fijar ideas supondremos θ_1 creciente (con lo que $\theta_1'(\beta) > 0$) y prolongaremos θ_1 sobre $[\beta, +\infty]$. Se prolongaría igualmente θ_1 sobre $]-\infty, \alpha]$.

a) Si k es finito, sea P el polinomio de grado $\leq k$ definido por las relaciones $P^{(r)}(\beta) = \theta_1^{(r)}(\beta)$ ($r = 0, 1, \dots, k$) (es el polinomio de Taylor de orden k de θ_1 en β).

Vamos a ver que existe un real λ tal que la función

$$t \mapsto P(t) + \lambda(t - \beta)^{k+1}$$

admite una derivada > 0 para todo $t > \beta$. Para obtener una prolongación θ que verifique las condiciones exigidas bastará poner entonces, para todo $t > \beta$:

$$\theta(t) = P(t) + \lambda(t - \beta)^{k+1}$$

(puesto que se tiene $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$).

Busquemos pues $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que, para todo $t > \beta$, se tenga:

$$P'(t) + (k+1)\lambda(t - \beta)^k > 0.$$

La función $Q : t \mapsto (t - \beta)^{-k} P'(t) + (k+1)\lambda$, definida para $t > \beta$, tiende hacia cero cuando t tiende hacia $+\infty$, y hacia $+\infty$ cuando t tiende hacia β . Al ser esta función continua, se deduce que está acotada inferiormente sobre $[\beta, +\infty[$: existe pues un real m tal que, para todo $t > \beta$, se tiene $Q(t) > m$, y basta con tomar

$$\lambda > \frac{-m}{k+1}.$$

b) Si $k = +\infty$, el teorema de Borel (véase tomo 2, ejercicio VIII.29) prueba que existe una función numérica B , de clase C^∞ en $[\beta, +\infty[$, que verifica:

$$(\forall r \in \mathbf{N}) \quad B^{(r)}(\beta) = \theta_1^{(r)}(\beta).$$

Puesto que se tiene $B'(\beta) = \theta_1'(\beta) > 0$, existe un real $b > \beta$ tal que la función B es estrictamente creciente en $[\beta, b]$. Admitamos provisionalmente la existencia de una biyección $\varphi : [\beta, +\infty[\rightarrow [\beta, b[$ de clase C' , derivada > 0 en todo punto, que verifique $\varphi(x) = x$ para x suficientemente próximo a β . Se obtiene entonces la prolongación buscada poniendo, para todo $t > \beta$, $\theta(t) = B[\varphi(t)]$.

— *Construcción de la función φ .* Se utiliza la función $u \mapsto \zeta(u)$ definida en \mathbf{R}_+ por $\zeta(0) = 1$ y $\zeta(u) = 1 - \exp(-1/u^2)$ para $u > 0$. La función ζ es de clase C^∞ y todas sus derivadas son nulas para $u = 0$; además, la desigualdad $\zeta(u) \leq 1/u^2$, válida para $u > 0$, demuestra la convergencia de la integral $I = \int_0^{+\infty} \zeta(u) du$, y se tiene: $I > 0$. Designemos por a un real cualquiera tal que $\beta < a < b$. Para tener una función φ que verifique las condiciones impuestas, basta con poner

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x \quad \text{para} \quad \beta \leq x \leq a, \quad \text{y} \\ \varphi(x) &= \beta + \frac{b - \beta}{I} \int_0^{\frac{I(x-a)}{b-\beta}} \zeta(u) du \quad \text{para} \quad x \geq a. \end{aligned}$$

Se tiene en efecto $\varphi'(x) = 1$ para $\beta \leq x \leq a$ y $\varphi'(x) = \zeta\left(I \frac{x-a}{b-\beta}\right)$ para $x > a$, de donde la existencia de $\varphi'(a) = 1$, y la relación $\varphi'(x) > 0$ para todo $x \geq \beta$. En conclusión, se demuestra, fácilmente que φ es de clase C^∞ .]

El teorema V.2.1 permite muchas veces reducir el estudio de un arco geométrico al de *sub-arcos simples*, mucho más manejables.

Puntos regulares. Puntos estacionarios

Sean $f: I \rightarrow E$ y $g: J \rightarrow E$ dos parametrizaciones de un mismo arco γ de clase $k \geq 1$, tales que $f = g \circ \theta$, siendo θ un cambio de parámetro.

Para todo $t \in I$, se tiene:

$$\theta'(t) \neq 0 \quad \text{y} \quad f'(t) = g'[\theta(t)] \theta'(t).$$

Por lo tanto, si se tiene $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, se tiene también $g'(u) \neq 0$ para todo $u \in J$, y si para $t = t_0$ se tiene $f'(t_0) = 0$, se tiene también $g'(u_0) = 0$ (con $u_0 = \varphi(t_0)$).

Podemos, pues, establecer:

Definición V.3.2

- Sea γ un arco de clase $k \geq 1$, definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$.
- a) De un **punto simple** $M_0 = f(t_0)$ del soporte de γ se dice que es **ordinario** (o **regular**) si se tiene $f'(t_0) \neq 0$, y se dice que es **estacionario** si se tiene $f'(t_0) = 0$.
 - b) Del arco γ se dice que es **regular** si se tiene $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Estas definiciones son, en efecto, independientes de la parametrización f elegida. Empezaremos estableciendo una propiedad topológica de los arcos regulares.

Teorema V.3.2

|| *Todo arco regular admite dos orientaciones distintas.*

Demostración. Sea γ un arco regular definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$. Si γ admitiera solamente una orientación, existiría un cambio *decreciente* $\theta: I \rightarrow I$ de parámetro tal que $f = f \circ \theta$ (véase prop. V.2.2). Para todo $t \in I$ se tendría entonces

$$(1) \quad f'[\theta(t)] \theta'(t) = f'(t), \quad \text{con } \theta'(t) < 0.$$

Ahora bien, una tal aplicación admite necesariamente un *punto fijo* (es decir, un punto $t_0 \in I$ tal que $\theta(t_0) = t_0$). En efecto, si α, β designan los extremos de I , con $\beta > \alpha$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \theta(t) = \beta \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \beta} \theta(t) = \alpha;$$

de donde, para t suficientemente próximo a α es $\theta(t) - t > 0$, y para t suficientemente próximo a β ,

$$\theta(t) - t < 0.$$

La función continua $\theta(t) - t$ se anula pues en I por lo menos una vez.

Con las hipótesis establecidas, existiría un punto $t_0 \in I$ tal que $\theta(t_0) = t_0$, de donde al aplicar (1)

$$f'(t_0) \theta'(t_0) = f'(t_0) \quad \text{con } \theta'(t_0) < 0,$$

lo cual es imposible al ser $f'(t_0) \neq 0$.]

Arcos definidos por una parametrización cartesiana

Se tiene inmediatamente:

V.3.3 || *Todo arco de clase $k \geq 1$ que admita una parametrización cartesiana es simple y regular.*

Demostración. Sea γ un arco que, en un sistema de referencia afín adecuado, admite una parametrización cartesiana. Permutando, si es preciso, las coordenadas, podemos suponer que el parámetro es igual a la primera coordenada, o sea $t = x_1$. La parametrización considerada es pues de la forma

$$(2) \quad x_1 = t, \quad x_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad x_n = f_n(t) \quad (t \in I),$$

siendo las funciones f_i ($2 \leq i \leq n$) de clase k sobre I , y hemos visto ya que una tal parametrización es inyectiva, y por lo tanto γ es *simple*.

Por otra parte, si $k \geq 1$, el vector derivada $f'(t)$ tiene por componentes $(1, f'_2(t), \dots, f'_n(t))$ por lo que es *no nulo*, lo cual demuestra que γ es regular.]

Observación. Con las mismas hipótesis, designemos por $\bar{\gamma}$ el soporte del arco γ , provisto de la topología inducida por la de E , y por p la restricción a $\bar{\gamma}$ de la primera proyección, o sea $p: (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$. La aplicación p es evidentemente continua (por ser la restricción a γ de una aplicación continua), y es la inversa de la biyección continua $\bar{f}: I \rightarrow \bar{\gamma}$, $t \mapsto f(t)$. La parametrización f determina pues aquí un *homeomorfismo* de I sobre el soporte de γ .

De hecho vamos a ver que el estudio local ⁽¹⁾ de un arco de clase $k \geq 1$, en el entorno de un punto ordinario, se reduce al de un arco definido por una parametrización cartesiana. Esto nos va a permitir en cuestiones teóricas, limitarnos al estudio de arcos simples y regulares.

V.3.4 Sea γ un arco de clase C^k o D^{k+1} , con $k \geq 1$, definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, y sea $t_0 \in I$ tal que $f'(t_0) \neq 0$.
 Para todo sistema de referencia afín \mathcal{R} de E , existe entonces un intervalo abierto J que contiene t_0 , tal que **por lo menos una de las coordenadas, como x_i , es un parámetro admisible sobre el sub-arco γ_1 de γ definido por la restricción de f a $I \cap J$; en consecuencia γ_1 es un sub-arco simple y regular de γ .**

Demostración. Designemos por (f_1, \dots, f_n) las coordenadas de f en el sistema de referencia dado \mathcal{R} . Puesto que $f'(t_0) \neq 0$, existe por lo menos un valor de i tal que $f'_i(t_0) \neq 0$. Debido a la continuidad, existe un intervalo abierto J , que contiene t_0 , y tal que $f'_i(t) \neq 0$ para $t \in I \cap J$. La restricción θ de f_i a $I \cap J$ es pues estrictamente monótona y define un cambio de parámetro admisible para el arco γ_1 . La coordenada i -ésima de la parametrización $g = f \circ \theta$ verifica evidentemente

$$g_i(u) = f_i[\theta^{-1}(u)] = u \quad \text{para todo } u \in \theta(I \cap J) = f_i(I \cap J);$$

⁽¹⁾ La palabra «local» no hace aquí referencia a la topología del *soporte* del arco, sino a la de los *intervalos de sus distintas parametrizaciones*. Por ejemplo, el estudio local de la estrofoide de \mathbf{R}^2 :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = tx$$

para $t = \pm 1$ lleva a distinguir dos ramas distintas, mientras que en todo entorno del origen de \mathbf{R}^2 existen puntos de cada rama.

por lo tanto la coordenada x_i es un parámetro admisible sobre γ_1 .]

La proposición V.3.3 permite considerar a todo arco *regular* como una «reunión» de arcos *simples y regulares* definidos por parametrizaciones cartesianas, cuyo estudio es elemental.

Observación. Con las hipótesis de V.3.4, supongamos además que $M_0 = f(t_0)$ es un punto simple de γ . Pudiera creerse entonces que todo punto $M \in \text{sop}(\gamma)$, suficientemente próximo a M_0 , es también un punto simple, pero este resultado sólo se cumple cuando γ satisface ciertas condiciones suplementarias.

Inmersiones. Arcos inmersos

Sea γ un arco plano simple, definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, y sea $\bar{\gamma} = f(I)$ su soporte. Se pueden introducir de un modo natural dos topologías sobre $\bar{\gamma}$: por una parte la topología *inducida* por la de E (puesto que $\bar{\gamma}$ es una parte de E); por otra parte la topología (conocida como *la imagen* de la topología de I) definida por la condición de que f determina un homeomorfismo de I sobre $\bar{\gamma}$: para esta última topología, los abiertos de $\bar{\gamma}$ son las imágenes por f de los abiertos de I ; y se ve fácilmente que esta topología no depende de la parametrización f elegida.

En un estudio más profundo de los «arcos geométricos simples» hay que tener bien en cuenta que estas dos topologías no coinciden necesariamente. Del hecho de ser f continua, únicamente se puede deducir que la topología imagen de la de I es *más fina* que la topología inducida por E .

De acuerdo con la teoría general de variedades, establecemos:

Definición V.3.3

- Sea $f: I \rightarrow E$ una función de clase $k \geq 1$ definida sobre un intervalo I de \mathbf{R} .
Se dice que f es una **inmersión** cuando se cumplen las condiciones siguientes:
- i) f es **inyectiva**:
 - ii) $(\forall t \in I) f'(t) \neq 0$;
 - iii) la aplicación $f: I \rightarrow f(I)$, $t \mapsto f(t)$ es un **homeomorfismo** (con el conjunto $f(I)$ provisto de la topología inducida por la de E).

Si una de las parametrizaciones de un arco γ , de clase $k \geq 1$, es una inmersión, lo mismo ocurre con todas las demás; se dice entonces que el arco γ está **inmerso** en E . Un arco geométrico inmerso en E es pues un arco **simple y regular** cuyas parametrizaciones son **homeomorfismos** (de su intervalo de definición sobre el soporte del arco).

Ejemplos de inmersiones

1. Según la observación que sigue a la proposición V.3.3, se ve que *toda parametrización cartesiana de clase $k \geq 1$ es una inmersión*. Podemos pues puntualizar la proposición IV.3.4 diciendo:

|| Sea γ un arco de E definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, de clase C^k o D^{k+1} , con $k \geq 1$. Para cada $t_0 \in I$ que verifique $f'(t_0) \neq 0$, existe un intervalo abierto J , que contiene t_0 , y tal que la restricción de f a $I \cap J$ define un **sub-arco de γ inmerso en E** .

Un arco regular puede considerarse pues como reunión de arcos inmersos en E .

2. *Todo arco compacto, simple y regular, está inmerso en E .*

Sea en efecto γ un tal arco, definido por una parametrización $f: [a, b] \rightarrow E$; la aplicación $f: [a, b] \rightarrow f([a, b])$, $t \mapsto f(t)$ es una biyección continua del compacto $[a, b]$ sobre su imagen: es pues un homeomorfismo (véase tomo 2, teorema III.10.2 y corolario del teorema III.10.4).

Por el contrario, la aplicación:

$$f: [0, 2\pi[\mapsto \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

define un arco simple y regular, pero no es una inmersión. En efecto, la imagen de f es la circunferencia unidad entera, por lo tanto un compacto de \mathbf{R}^2 , mientras que el intervalo semiabierto $I = [0, 2\pi[$ no es compacto. La aplicación $\bar{f}: I \rightarrow f(I)$, $t \mapsto f(t)$ no es pues un homeomorfismo.

Caracterización de algunos arcos por su soporte

El teorema que sigue prueba que *un arco geométrico inmerso en E queda totalmente determinado cuando se da su soporte.*

Teorema V.3.5

|| Sea $f: I \rightarrow E$ y $g: J \rightarrow E$ dos inmersiones de clase C^k [resp. D^{k+1}], con $k \geq 1$. Para que f y g definan **el mismo arco geométrico de clase C^k [resp. D^{k+1}]**, es necesario y suficiente que tengan **la misma imagen**.

Demostración. La condición es evidentemente necesaria. Inversamente, si se verifica, pongamos $\Gamma = f(I) = g(J)$ y designemos por \bar{f} , \bar{g} los homeomorfismos definidos por

$$\bar{f}: I \rightarrow \Gamma, \quad t \mapsto f(t); \quad \bar{g}: J \rightarrow \Gamma, \quad t \mapsto g(t).$$

Es claro que la aplicación $\theta = \bar{g}^{-1} \circ \bar{f}: I \rightarrow J$ es un *homeomorfismo* de I sobre J . Para establecer el resultado anunciado, falta por demostrar que θ y θ^{-1} son de clase C^k [resp. D^{k+1}], y para ello basta con demostrar que θ y θ^{-1} son de clase C^k [resp. D^{k+1}] en el entorno de cada punto de su intervalo de definición.

Siendo fijo el punto $t_0 \in I$, pongamos $M_0 = f(t_0)$ y $u_0 = \theta(t_0) = g^{-1}(M_0)$. Al ser $g'(u_0) \neq 0$, existe un sistema de referencia afín \mathcal{R} de E tal que la primera coordenada de g , tal como g_1 , verifica $g'_1(u_0) \neq 0$. Existe entonces un intervalo abierto U , que contiene u_0 , y tal que la aplicación $G: J \cap U \rightarrow g_1(J \cap U)$, $u \mapsto g_1(u)$ es un difeomorfismo de clase C^k [resp. D^{k+1}].

Si f_1 designa la primera coordenada de f en \mathcal{R} , se tiene evidentemente: $f_1 = g_1 \circ \theta$; de donde, para t suficientemente próximo a t_0 (ya que θ es continua)

$$f_1(t) = G[\theta(t)] \quad \text{y} \quad \theta(t) = G^{-1}[f_1(t)].$$

Esta última relación demuestra que θ es de clase C^k [resp. D^{k+1}] en el entorno de t_0 . De igual modo se vería que θ^{-1} es de clase C^k [resp. D^{k+1}] en el entorno de u_0 .]

Observaciones

1. La conclusión del teorema V.3.5 es falsa si f y g son solamente aplicaciones inyectivas y regulares. Por ejemplo, las parametrizaciones

$$f : t \mapsto e^{it} \quad (0 \leq t < 2\pi) \quad \text{y} \quad g : t \mapsto e^{it} \quad (0 < t \leq 2\pi)$$

definen arcos simples y regulares de \mathbf{R}^2 que tienen ambos por soporte la circunferencia unidad; pero no existe cambio de parámetro $\theta : [0, 2\pi[\rightarrow]0, 2\pi]$ que verifique $f = g \circ \theta$ (ya que una tal función θ debería satisfacer a $\theta(t) = t$ para $0 < t < 2\pi$). Por lo tanto f y g no definen el mismo arco geométrico.

2. Un arco *no regular*, cuyas parametrizaciones son homeomorfismos, no queda necesariamente determinado por su soporte.

Por ejemplo, si $E = \mathbf{R}$, los «arcos» compactos simples γ_1, γ_2 de clase C^∞ respectivamente definidos por las parametrizaciones $f_1(t) = t$ y $f_2(t) = t^3$ ($t \in [-1, +1]$) tienen el mismo soporte $[-1, +1]$, y cada una de las parametrizaciones f_1, f_2 define un homeomorfismo de este intervalo sobre sí mismo. Pero las parametrizaciones f_1, f_2 no son ni siquiera C^1 -equivalentes.

Caso de arcos cerrados

Sea γ un arco *cerrado simple* definido por una parametrización $f : [a, b] \rightarrow E$ que verifica $f(a) = f(b)$, cuya restricción a $[a, b[$ es inyectiva.

Identifiquemos el plano euclídeo con \mathbf{C} y sea U la circunferencia unidad de \mathbf{C} definida por $|z| = 1$. A cada punto $z = e^{iu}$ de \mathbf{C} ($0 \leq u \leq 2\pi$) asociemos el punto

$$\varphi(z) = f\left(a + \frac{b-a}{2\pi}u\right)$$

del soporte de γ . La aplicación $\varphi : U \rightarrow \text{sop}(\gamma)$ así definida es evidentemente una biyección, la cual se demuestra fácilmente que es *continua*. Al ser el conjunto U un compacto de \mathbf{C} , φ es un *homeomorfismo* (véase tomo 2 p. 121). Enunciaremos, pues,

El soporte de un arco simple y cerrado de E es homeomorfo a una circunferencia del plano euclídeo.

Subvariedades de dimensión 1

En concordancia con la teoría general de variedades inmersas en un espacio vectorial, daremos la siguiente

Definición V.3.4

Sea E un espacio vectorial (o afín) de dimensión finita. Una **subvariedad** de clase k y de dimensión 1 de E es una parte Γ de E que posee la propiedad siguiente: todo punto M de Γ admite en E un entorno V tal que $\Gamma \cap V$ es el soporte de un arco de clase $k \geq 1$ inmerso en E .

Según las proposiciones V.3.3 y V.3.4, equivale a decir que *todo punto de Γ posee un entorno V tal que $\Gamma \cap V$ admite una parametrización cartesiana de clase k* (en un sistema de referencia dado arbitrariamente).

Se puede demostrar que las únicas variedades *conexas* de clase k y de dimensión 1 de E son:

- los arcos simples cerrados definidos por una parametrización periódica de clase k (véase resultados anteriores),
- los arcos abiertos de clase k regularmente inmersos en E .

El concepto de subvariedad de dimensión 1 corresponde a la idea intuitiva de «curva regular».

Las subvariedades conexas de dimensión 1 son pues homeomorfas con una circunferencia o con \mathbb{R} según que sean o no compactas.

En el plano, los resultados del tomo 2 (p. 284) nos permiten enunciar inmediatamente:

V.3.6 || Sea f una función numérica de clase C^k ($k \geq 1$) sobre un abierto U de \mathbb{R}^2 y sea Γ el conjunto de los puntos (x, y) de U que verifican $f(x, y) = 0$. Si la diferencial de f no se anula en Γ , entonces Γ es una **subvariedad de dimensión 1** de \mathbb{R}^2 .

§ V.4 CONTACTO DE ARCOS

En este § vamos a estudiar la situación relativa de dos arcos geométricos γ_1, γ_2 en el entorno de un punto M_0 común a sus soportes. Efectuando si es preciso una traslación sobre los parámetros, podemos suponer que los arcos γ_1, γ_2 están definidos por parametrizaciones f_1, f_2 , que verifican:

$$f_1(0) = f_2(0) = M_0.$$

Si los arcos γ_1, γ_2 son *regulares*, podemos, por otra parte (restringiéndonos a sub-arcos) referirnos al caso en que γ_1 y γ_2 son simples (véase V.3.4).

- Para abreviar, convendremos en decir que un arco simple *pasa* por el punto M_0 de E si $M_0 \in \text{sop}(\gamma)$ y si M_0 no es un extremo de γ .

En lo que sigue, vamos a limitarnos al estudio del contacto en un punto M_0 de dos arcos que *pasan por* M_0 . Dejamos al lector que extienda la teoría del contacto al caso de dos arcos que tienen a M_0 como extremo común.

Definición V.4.1

Sean γ_1, γ_2 dos arcos de clase $k \geq 1$ **simples y regulares** que pasan por un mismo punto M_0 . Se dice que γ_1 y γ_2 tienen en M_0 un **contacto de orden** $\geq p$ (siendo $0 \leq p \leq k$) si existen parametrizaciones f_1, f_2 de γ_1, γ_2 , definidas en el entorno de 0 y que verifican

$$(1) \quad f_1(0) = f_2(0) = M_0; \quad f_1^{(r)}(0) = f_2^{(r)}(0) \quad \text{para} \quad 1 \leq r \leq p.$$

Con las hipótesis hechas, la condición (1) equivale a

(1bis)

$$f_2(t) - f_1(t) = o(t^p).$$

La relación (1 bis) resulta a veces más cómoda que (1) (véase V.5 y VI.3). Según V.3.1, se tiene inmediatamente:

V.4.1 Con las notaciones de la definición V.4.1 sean γ'_1, γ'_2 , **subarcos** de γ_1, γ_2 que pasan por M_0 . Para que, γ_1 y γ_2 tengan en M_0 un contacto de orden $\geq p$, es necesario y suficiente que γ'_1 y γ'_2 tengan en M_0 un contacto de orden $\geq p$.

(Se traduce este hecho diciendo que la noción de contacto es local.)

Con frecuencia tendremos que utilizar el lema técnico que sigue:

V.4.2 Sean γ_1, γ_2 dos arcos de clase $k \geq 1$, **simples y regulares**, que tienen un contacto de orden $\geq p$ en el punto M_0 . Para toda parametrización f_1 de γ_1 tal que $f_1(0) = M_0$, existe una parametrización f_2 de γ_2 , tal que se cumplen las condiciones (1).

Demostración. Por hipótesis, existen parametrizaciones $g_1 : J_1 \rightarrow E, g_2 : J_2 \rightarrow E$ de γ_1 y γ_2 , tales que 0 es interior a los intervalos J_1, J_2 , y que verifican

$$(2) \quad g_1(0) = g_2(0) = M_0; \quad g_1^{(r)}(0) = g_2^{(r)}(0) \quad (1 \leq r \leq p).$$

Sea $\theta_1 : J_1 \rightarrow I_1$ un cambio de parámetro sobre γ_1 tal que $g_1 = f_1 \circ \theta_1$. Al ser γ_1 simple, la relación $f_1[\theta_1(\theta)] = g_1(0) = M_0 = f_1(0)$ implica $\theta_1(0) = 0$.

Si J es un intervalo compacto cualquiera contenido en $J_1 \cap J_2$ y que contiene a 0 en su interior, se sabe que la restricción de θ_1 a J se prolonga en un cambio de parámetro $\theta_2 : J_2 \rightarrow I_2$ sobre γ_2 (prop. V.3.1). Al coincidir las funciones $\rho_1 = \theta_1^{-1}, \rho_2 = \theta_2^{-1}$ en el intervalo $\theta_1(J)$, el cual es un entorno de 0, se tiene

$$(3) \quad \rho_1^{(r)}(0) = \rho_2^{(r)}(0) \quad \text{para} \quad 0 \leq r \leq p.$$

Pongamos $f_2 = g_2 \circ \rho_2$. Se ve por recurrencia que las derivadas de orden r de $f_i = g_i \circ \rho_i$ ($i = 1, 2$) se expresan por medio de las derivadas de orden $\leq r$ de ρ_i y g_i . Las relaciones (2) y (3) implican, por tanto, $f_2(0) = M_0 = f_1(0)$ y $f_1^{(r)}(0) = f_2^{(r)}(0)$ para $1 \leq r \leq p$. La parametrización $f_2 : I_2 \rightarrow E$ responde a las condiciones exigidas.]

Observación. Si f_1, f_2 son parametrizaciones cualesquiera de γ_1, γ_2 , tales que $f_1(0) = f_2(0) = M_0$, y si γ_1, γ_2 tienen en M_0 un contacto de orden $\geq p$, en general no se tiene ni siquiera $f_1'(0) = f_2'(0)$.

Sin embargo, para $p = 1$, se tiene:

V.4.3 Sean γ_1, γ_2 dos arcos de clase $k \geq 1$, simples y regulares, definidos por las parametrizaciones f_1, f_2 . Para que γ_1 y γ_2 tengan un **contacto de orden** ≥ 1 en un punto $M_0 = f_1(t_0) = f_2(u_0)$, es necesario y suficiente que los vectores $f_1'(t_0)$ y $f_2'(u_0)$ sean **colineales**.

Demostración. La condición es evidentemente necesaria, puesto que las direcciones de los vectores $f_1'(t_0)$ y $f_2'(u_0)$ no dependen de las parametrizaciones elegidas f_1, f_2 .

Inversamente, si se tiene $f_2'(u_0) = kf_1'(t_0)$, resulta fácil determinar dos constantes λ, μ tales que la parametrización g_2 de γ_2 definida por $g_2(t) = f_2(\lambda t + \mu)$ verifique

$$g_2(t_0) = M_0, \quad g_2'(t_0) = f_1'(t_0)$$

(basta con tomar $\lambda = 1/k$, $\mu = u_0 - \lambda t_0$. Esto demuestra que γ_1 y γ_2 tienen un contacto de orden ≥ 1 en M_0 .)

● Dos arcos que tienen un contacto de orden ≥ 1 en M_0 se dice que son **tangentes** en M_0 (con las definiciones que se darán en el § 6, son arcos que tienen la *misma* tangente en M_0).

Siendo fijo el punto $M_0 \in E$, designemos por $\mathcal{D}_{M_0}^k$ [resp. $\mathcal{C}_{M_0}^k$] el conjunto de los arcos simples y regulares que pasan por M_0 , de clase D^k [resp. C^k], ($k \geq 1$). Se tiene:

V.4.4 Para todo $p \leq k$, la relación «los arcos γ_1 y γ_2 tienen en M_0 un contacto de orden $\geq p$ » es una **relación de equivalencia** sobre $\mathcal{D}_{M_0}^k$ [resp. $\mathcal{C}_{M_0}^k$].

Demostración. Siendo esta relación evidentemente simétrica y reflexiva, bastará demostrar que es *transitiva*:

Sean f_1, f_2 parametrizaciones de γ_1, γ_2 que verifican las condiciones (1) y sea γ_3 un tercer arco perteneciente a $\mathcal{D}_{M_0}^k$ [resp. $\mathcal{C}_{M_0}^k$], que tiene con γ_2 un contacto de orden $\geq p$ en M_0 . Según V.4.2, existe una parametrización f_3 de γ_3 que verifica:

$$f_3^{(r)}(0) = f_2^{(r)}(0)$$

para $r = 0, 1, \dots, p$. Se tiene pues $f_3^{(r)}(0) = f_1^{(r)}(0)$ para $r = 0, \dots, p$, lo cual demuestra que γ_1 y γ_3 tienen en M_0 un contacto de orden $\geq p$.]

Las clases de equivalencia definidas por la relación de contacto de orden $\geq p$ reciben a veces el nombre de *elementos de contacto* de clase D^k [resp. C^k].

Orden exacto del contacto

Definición V.4.2

{ Sean γ, δ dos arcos de clase $k \geq 1$, simples y regulares, que pasan por M_0 .
 { Se dice que estos arcos tienen en el punto M_0 un **contacto de orden** (exac-
 { tamente) **igual a** p ($p \leq k - 1$) si tienen en M_0 un contacto de orden $\geq p$
 { pero no un contacto de orden $\geq p + 1$.

Si γ y δ tienen en M_0 un contacto de orden $\geq +\infty$, convendremos en que el orden exacto de su contacto en este punto es $+\infty$.

Si los arcos γ, δ están definidos por parametrizaciones f, g de clase C^∞ , que verifican $f(0) = g(0) = M_0$, su orden de contacto es *por lo menos igual* al entero mayor que verifica las p relaciones

$$(4) \quad f'(0) = g'(0), \dots, f^{(p)}(0) = g^{(p)}(0);$$

pero según una observación anterior puede ser *estrictamente mayor*. El conocimiento del par (f, g) no permite pues determinar inmediatamente el orden de contacto de γ, δ . Vamos a ver, sin embargo, que existen casos en que el orden de contacto de γ y δ es igual al mayor entero p que verifica (4). El teorema V.4.5 que daremos a continuación prueba que esto ocurre cuando f y g son parametrizaciones *cartesianas* que admiten como parámetros una misma coordenada x_i . En el § VI.3 veremos que lo mismo ocurre cuando (siendo E euclídeo) f y g son parametrizaciones normales.

Teorema V.4.5

|| Sean γ, δ dos arcos de clase C^k o D^{k+1} ($k \geq 1$), simples y regulares, que tienen en M_0 un contacto de orden igual a p ($p \leq k - 1$), definidos respectivamente por las parametrizaciones f, g que verifican

$$f(0) = g(0) = M_0.$$

Se supone que existe un sistema de referencia en el cual las coordenadas (f_i) y (g_i) de f y g verifican para $|t|$ suficientemente pequeño

$$f_1(t) = g_1(t) = t.$$

Se tiene entonces:

$$f'(0) = g'(0), \dots, f^{(p)}(0) = g^{(p)}(0) \quad \text{y} \quad f^{(p+1)}(0) \neq g^{(p+1)}(0).$$

En otros términos, si el desarrollo de $f - g$ limitado al orden k es no nulo y si ω designa su valoración, el orden de contacto de γ y δ es igual a $\omega - 1$.

Demostración. Si γ y δ tienen un contacto de orden $\geq p$, existe un cambio de parámetro $t \mapsto \theta(t)$ definido en el entorno de 0, tal que

$$g[\theta(t)] - f(t) = 0(t^{p+1}) \quad (\text{véase V.4.2}).$$

Pero se tiene aquí $f_1(t) = t$ y $g_1(u) = u$, de donde $g_1[\theta(t)] = \theta(t)$ y $\theta(t) - t = 0(t^{p+1})$. Por composición de desarrollos limitados, esto implica

$$g[\theta(t)] = g(t) + 0(t^{p+1}),$$

de donde

$$f(t) - g(t) = (f(t) - g[\theta(t)]) + (g[\theta(t)] - g(t)) = 0(t^{p+1}).$$

Al estar los desarrollos limitados de las funciones f y g definidos por la fórmula de Taylor-Young, se deduce:

$$f^{(r)}(0) = g^{(r)}(0) \quad \text{para} \quad r = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Finalmente, si γ y δ no tienen un contacto de orden $\geq p + 1$, se tiene $f^{(p+1)}(0) \neq g^{(p+1)}(0)$.]

Observación. Sean γ y δ dos arcos simples y regulares de clase C^k o D^{k+1} , con $k \geq 1$ y que admiten en el punto M_0 un contacto de orden ≥ 1 . Vamos a ver que nos podemos referir siempre al caso en que se verifican las hipótesis de V.4.5.

Supongamos los arcos γ , δ definidos por parametrizaciones cualesquiera φ , ψ , que verifican $\varphi(0) = \psi(0) = M_0$, y sean (φ_i) , (ψ_i) las coordenadas de φ , ψ en un sistema de referencia dado de E . Al ser los vectores no nulos $\varphi'(0)$, $\psi'(0)$ colineales, según V.4.3, existe por lo menos un valor de i que verifica $\varphi'_i(0) \neq 0$ y $\psi'_i(0) \neq 0$. Elegido de este modo el entero i existe un intervalo abierto I que contiene al origen y tal que la restricción de φ_i [resp. ψ_i] a I define un cambio de parámetro admisible en el subarco de γ [resp. δ] definido por la restricción de φ [resp. ψ] a I . Existen pues subarcos de γ y δ , que contienen a M_0 , sobre los cuales la coordenada x_i es

un parámetro admisible; por una permutación de los ejes, se puede reducir al caso en que $i = 1$.]

Terminología

Si el orden de contacto de dos arcos es igual por lo menos a 2, se dice que estos arcos son **osculadores**; si el orden de contacto es por lo menos igual a 3, se dice que estos arcos son **sobreosculadores**.

Recordemos que tales arcos se dice que son **tangentes** si su orden de contacto es ≥ 1 .

Ejemplos

1. Las curvas de \mathbf{R}^2 definidas por $x = t$, $y = \sin t$ ($t \in \mathbf{R}$) y

$$x = t, y = t + \lambda t^3 \quad (t \in \mathbf{R})$$

son *osculatrices* en el origen para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ y *sobreosculatrices* si $\lambda = -\frac{1}{6}$; de hecho, para $\lambda = -\frac{1}{6}$, su orden de contacto es 4.

2. En \mathbf{R}^2 la parábola definida por $x = \frac{1}{2R}t^2$ e $y = t$ ($t \in \mathbf{R}$, $R \neq 0$) y la circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ son sobreosculatrices en el origen. En efecto, tomando $y = t$ como parámetro, se tiene, en el entorno del origen:

$$x = \frac{1}{2R}t^2, \text{ sobre la parábola, y}$$

$$x = R - \sqrt{R^2 - t^2} = \frac{1}{2R}t^2 + \frac{1}{8R^3}t^4 + o(t^4) \text{ sobre } C$$

(el contacto es aquí de orden exactamente 3).

§ V.5 IMÁGENES DE UN ARCO. INVARIANZA DEL CONTACTO EN UN DIFEOMORFISMO

IMAGEN DE UN ARCO POR UNA APLICACIÓN DIFERENCIABLE

Sea γ un arco de clase C^k (resp. D^k) definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, y sea U un abierto de E que contiene a $f(I)$. Si $\Phi: U \rightarrow F$ es una aplicación de clase C^k (resp. k veces diferenciable) con valores en el e.v.n. F , es fácil ver que el arco Γ definido por la parametrización $\Phi \circ f: I \rightarrow F$ es independiente de la f elegida.

En efecto, si θ es un cambio de parámetro admisible sobre γ y si se pone $g = f \circ \theta$, se ve que $\Phi \circ g$ es una parametrización de Γ . El arco Γ de clase C^k (resp. D^k) así obtenido recibe el nombre de **imagen de γ por Φ** , y lo designaremos por $\Phi(\gamma)$.

Observemos que si Φ es un *difeomorfismo* se tiene entonces $\gamma = \Phi^{-1}(\Gamma)$.

Invarianza del contacto

Una propiedad fundamental del orden de contacto es su invarianza en los difeomorfismos, que vamos a establecer. Recordaremos antes la proposición siguiente (véase tomo 2, p. 291):

Si E, F son dos e.v.n. de dimensión finita y si existe un difeomorfismo de un abierto U de E sobre un abierto V de F , entonces E, F tienen la misma dimensión.

Esta observación nos va a permitir reducirnos, en la práctica, al caso en que $E = F$.

Teorema V.5.1

Sean γ, δ dos arcos de clase C^k [resp. D^{k+1}] ($k \geq 1$) simples y regulares, que tienen en M_0 un contacto de orden $\geq p$ ($p \leq k$), y sea $\Phi: U \rightarrow V$ un **difeomorfismo** de clase C^k [resp. $k+1$ veces diferenciable] de un abierto U de E , que contiene los soportes de γ y δ , sobre un abierto V de E . Entonces los arcos $\Phi(\gamma)$ y $\Phi(\delta)$ tienen en el punto $N_0 = \Phi(M_0)$ un contacto de orden $\geq p$.

Demostración. Sean f y g parametrizaciones de γ y δ , definidas en el entorno de 0, que verifican

$$f(0) = g(0) = M_0, \quad f(t) - g(t) = o(t^p).$$

Entonces, en virtud de las hipótesis hechas se tiene también

$$(\Phi \circ f)(t) - (\Phi \circ g)(t) = o(t^p)$$

y

$$(\Phi \circ f)(0) = (\Phi \circ g)(0) = N_0.$$

Corolario

|| Con las notaciones V.5.1, si γ y δ tienen en M_0 un contacto de orden **exactamente igual a p** , entonces los arcos $\Phi(\gamma)$ y $\Phi(\delta)$ tienen en N_0 un contacto de orden **exactamente igual a p** .

En efecto, basta aplicar V.5.1 sucesivamente a los difeomorfismos Φ y Φ^{-1} .

Este corolario es útil muchas veces para determinar el orden del contacto de dos arcos; en efecto, la mayoría de las transformaciones usuales (biyecciones afines, inversión en un espacio euclídeo, paso a polares en E_2 , a cilíndricas y a esféricas en E_3 , ...) son difeomorfismos, por lo menos localmente.

§ V.6 SUBESPACIOS FUNDAMENTALES

● En este § y en el que sigue, vamos a considerar solamente arcos **simples** (pero no necesariamente regulares). Esta hipótesis nos va a permitir hablar, sin ambigüedad, de *punto de un arco γ* en lugar de *punto del soporte de γ* .

Siendo esto así, vamos a precisar el estudio local de un arco simple asociando a cada uno de sus «puntos» una sucesión de subvariedades afines de E denominadas «espacios fundamentales».

Establezcamos en primer lugar:

V.6.1 || Sea γ un arco simple de clase $k \geq 1$, definido por una parametrización f , y sea $M_0 = f(t_0)$ un punto ⁽¹⁾ de γ . Entonces, para cada entero $p = 1, 2, \dots, k$ el **espacio vectorial** engendrado por los vectores

$$f'(t_0), f''(t_0), \dots, f^{(p)}(t_0)$$

|| es **independiente** de la parametrización f .

Demostración. Sea $g = f \circ \theta$ otra parametrización de γ , deducida de f por el cambio de parámetro admisible θ , y sea u_0 el real definido por $\theta(u_0) = t_0$. Por recu-

⁽¹⁾ Para mayor comodidad en la exposición supondremos que M_0 no es un extremo de γ . Pero la extensión al caso en que M_0 sea un extremo de γ no presenta mayor dificultad.

rencia sobre el entero $q(1 \leq q \leq k)$ se establece la existencia, para cada valor de q , de una relación de la forma:

$$g^{(q)}(u_0) = f'(t_0) \theta^{(q)}(u_0) + f''(t_0) A_2 + \dots + f^{(q-1)}(t_0) A_{q-1} + f^{(q)}(t_0) [\theta'(u_0)]^q$$

donde A_2, A_3, \dots, A_{q-1} designan polinomios (de coeficientes enteros) de los números $\theta'(u_0), \theta''(u_0), \dots, \theta^{(q)}(u_0)$. Ello demuestra que el espacio vectorial V engendrado por los vectores $g'(u_0), \dots, g^{(q)}(u_0)$ está contenido en el espacio vectorial V engendrado por $f'(t_0), f''(t_0), \dots, f^{(q)}(t_0)$. Intercambiando los papeles de f y g se establece igualmente la inclusión $V \subset W$, de donde $V = W$.]

Definición V.6.1

Siendo las hipótesis las de V.6.1, el espacio vectorial

$$T_p(M_0) = \text{Vect}(f'(t_0), f''(t_0), \dots, f^{(p)}(t_0))$$

recibe el nombre de **subespacio fundamental** p -ésimo de γ en el punto $M_0 = f(t_0)$.

La variedad afín que pasa por M_0 y de dirección $T_p(M_0)$, recibirá el nombre de **variedad afín fundamental** p -ésima de γ en M_0 y será designada por $\mathcal{C}_p(M_0)$. Estos conceptos son en efecto independientes de la parametrización f elegida. Se observará que la sucesión $(T_p(M_0))$ es finita si k es finito, infinita si $k = +\infty$, pero estacionaria (al ser el espacio E de dimensión finita).

Observaciones importantes

1. Si γ es un arco de E cuyo soporte está contenido en una variedad afín L de E , entonces todas las variedades afines fundamentales de γ son subvariedades de L y son las mismas que si se considerase a γ como arco de L .
2. Es evidente que los subespacios fundamentales de γ en M_0 son los mismos que los de cada subarco de γ que contiene a M_0 . En consecuencia, para determinarlos se podrán efectuar cambios de parámetro admisibles que estén definidos solamente en el entorno de t_0 . De este hecho se hará uso en lo sucesivo.

Tangente en un punto regular

Mantengamos las notaciones de V.6.1. Para que se tenga $T_1(M_0) \neq \{0\}$ es necesario y suficiente que se tenga $f'(t_0) \neq 0$, es decir que M_0 sea **regular**. El primer

espacio fundamental $T_1(M_0)$ es entonces una *recta vectorial*. La recta afín $\mathcal{T}_1(M_0)$ recibe el nombre de **tangente** en M_0 a γ .

Consideremos esta tangente como soporte del arco simple de clase C^∞ definido por la parametrización afín:

$$t \mapsto M_0 + (t - t_0)f'(t_0) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Según la definición V.4.1, se ve inmediatamente que γ y $\mathcal{T}_1(M_0)$ tienen en M_0 un contacto de orden ≥ 1 . Para determinar el orden exacto del contacto de γ y $\mathcal{T}_1(M_0)$ elijamos un sistema de referencia de E de origen M_0 cuyo primer vector de base sea $e_1 = f'(t_0)$. La primera coordenada, supongamos x_1 , es entonces un parámetro admisible en $\mathcal{T}_1(M_0)$, y la parametrización correspondiente sigue siendo afín; verifica pues $\varphi^{(p)}(0) = 0$ para todo entero $p \geq 2$.

Por otra parte, existe un subarco δ de γ que pasa por M_0 , sobre el cual la primera coordenada x_1 es también un parámetro admisible (véase V.3.4); designaremos por g la parametrización correspondiente de δ .

Para que γ y $\mathcal{T}_1(M_0)$ tengan en M_0 un contacto de orden p ($p \leq k-1$), es necesario y suficiente, según V.4.5, que g verifique.

$$(1) \quad g''(0) = 0, \dots, g^{(p)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad g^{(p+1)}(0) \neq 0.$$

Ahora bien, para $r = 1, 2, \dots, k-1$, el vector $g^{(r+1)}(0)$ tiene su primera componente nula (ya que la primera componente de $g(x_1)$ es igual a x_1). Este vector sólo puede ser pues colineal con \vec{e}_1 si es nulo. De ello se deduce que el sistema de las relaciones (1) equivale a

$$(2) \quad T_1(M_0) = T_2(M_0) = \dots = T_p(M_0) \quad \text{y} \quad T_{p+1}(M_0) \neq T_p(M_0).$$

En consecuencia, si existe un entero p ($1 \leq p \leq k-1$) que verifique las relaciones (2), el orden de contacto de γ con su tangente en el punto M_0 es igual a p .

Si existe un entero p ($1 \leq p \leq k$) que verifique solamente las relaciones

$$T_1(M_0) = T_2(M_0) = \dots = T_p(M_0)$$

se vería igualmente que γ tiene un contacto de orden por lo menos igual a p con su tangente en el punto M_0 .

En general, se tiene $T_2(M_0) \neq T_1(M_0)$, y el orden de contacto de γ con su tangente es igual a 1.

Se tiene $T_2(M_0) = T_1(M_0)$ si, y solamente si, el vector $f''(t_0)$ es colineal con $f'(t_0)$: En este caso, se dice que M_0 es un **punto de inflexión** de γ . La inflexión se llamará *ordinaria* si el contacto de γ con su tangente en M_0 es exactamente de orden 2. Si este contacto es de orden ≥ 3 , se dice a veces que γ presenta un *aplanamiento* en M_0 .

Tangente orientada

Si γ es un **arco orientado** y si f, g designan dos parametrizaciones de γ que verifican $f(t_0) = g(u_0) = M_0$, los vectores $f'(t_0)$ y $g'(u_0)$ tienen a la vez la *misma dirección y el mismo sentido*, ya que si $g = f \circ \theta$ se deduce de f por el cambio de parámetro θ , se tiene $g'(u_0) = f'(t_0) \theta'(u_0)$, con $\theta'(u_0) > 0$.

El eje, que pasa por M_0 , de vector director $f'(t_0)$, es pues independiente de la parametrización f elegida, y se le da el nombre de **tangente orientada** a γ en M .

Plano osculador en un punto regular

Mantengamos las notaciones que anteceden y supongamos que M_0 sea un punto ordinario que no sea de inflexión de γ . Entonces la variedad afín $\mathcal{T}_2(M_0)$ es de dimensión 2, y se le da el nombre de **plano osculador** de γ en M_0 . De acuerdo con su definición, es el plano que pasa por M_0 de vectores directores $f'(t_0)$ y $f''(t_0)$.

En general, se tiene $\mathcal{T}_3(M_0) \neq \mathcal{T}_2(M_0)$. Si se tiene $\mathcal{T}_3(M_0) = \mathcal{T}_2(M_0)$, el plano osculador $\mathcal{T}_3(M_0)$ se dice que es **sobreosculador** de γ en M_0 : Esta terminología se justificará por el teorema V.6.2: En efecto, si \mathcal{H} es un hiperplano afín cualquiera que contiene a $\mathcal{T}_2(M_0)$, de ecuación cartesiana $\Phi = 0$, se tiene siempre $\Phi[f(t)] = o[(t - t_0)^2]$; pero si el plano osculador es **sobreosculador**, se tiene:

$$\Phi[f(t)] = o[(t - t_0)^3].$$

Una caracterización de las variedades afines fundamentales

Pudiendo ser considerada toda variedad afín como intersecciones de hiperplanos, es interesante poder caracterizar los hiperplanos que contienen a una variedad afín fundamental.

Teorema V.6.2

Sea γ un arco simple de clase $k \geq 1$ que pasa por un punto M_0 , definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, tal que $f(0) = M_0$. Para que un hiperplano afín \mathcal{H} , de ecuación cartesiana $\Phi = 0$, contenga a la variedad afín fundamental $\mathcal{T}_p(M_0)$ (donde $p \leq k$), es necesario y suficiente que se tenga: $\Phi(f(t)) = o(t^p)$.

Demostración. Según la fórmula de Taylor-Young, es

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \dots + \frac{t^p}{p!} f^{(p)}(0) + g(t), \quad \text{con } g(t) = o(t^p).$$

Designemos por F la parte *lineal* de la función afín Φ . Para que \mathcal{H} contenga a $\mathcal{C}_p(M_0)$, es necesario y suficiente que se tenga

$$(3) \quad \Phi(f(0)) = 0, \quad F(f'(0)) = 0, \quad \dots, \quad F(f^{(p)}(0)) = 0.$$

Las relaciones (3) implican:

$$\Phi[f(t)] = F[f(t) - f(0)] = F[g(t)] = o(t^p).$$

Recíprocamente, demostremos que si \mathcal{H} no contiene a $\mathcal{C}_p(M_0)$, no se puede tener $\Phi[f(t)] = o(t^p)$. Si $M_0 \notin \mathcal{H}$, es evidente (ya que entonces se tiene $\Phi[f(0)] \neq 0$). De lo contrario, existe por lo menos un entero $i \leq p$ tal que $F(f^{(i)}(0)) \neq 0$. Designemos por q el entero mínimo que verifica esta condición. De la fórmula de Taylor-Young se deduce entonces:

$$\Phi[f(t)] = F[f(t) - f(0)] = \frac{t^q}{q!} F[f^{(q)}(0)] + o(t^q)$$

lo cual demuestra que no es $\Phi[f(t)] = o(t^p)$ (ya que $q \leq p$ y $F[f^{(q)}(0)] \neq 0$).

Se puede traducir este resultado diciendo que los hiperplanos que contienen a $\mathcal{C}_p(M_0)$ son aquellos que tienen con γ un contacto de orden $\geq p$ en el punto M_0 (para justificarlo, véase p. 545).

Estudio de la sucesión $T_p(M_0)$

Por definición, se pasa de un sistema de generadores de $T_p(M_0)$ a un sistema de generadores de $T_{p+1}(M_0)$ por adjunción de un solo vector (véase definición V.6.1). Si se pone

$$d_p = \dim(T_p(M_0)) \quad (1 \leq p \leq k),$$

se tiene pues

$$d_{p+1} = d_p \quad \text{o} \quad d_{p+1} = 1 + d_p,$$

según que se tenga

$$T_{p+1}(M_0) = T_p(M_0) \quad \text{o} \quad T_{p+1}(M_0) \neq T_p(M_0).$$

Por otra parte, se tiene evidentemente $d_p \leq n$, con $n = \dim(E)$.

El conjunto Δ de los valores de d_p es pues un intervalo acotado de \mathbf{N} , de la forma $[0, q]$ ($0 \leq q \leq n$) si M_0 es *estacionario*, y de la forma $[1, q]$ ($1 \leq q \leq n$) si M_0 es *ordinario*.

Para cada $i \in \Delta$, designemos por $\delta(i)$ el mínimo entero p tal que $d_p = i$, y pongamos

$$S_i(M_0) = T_{\delta(i)}(M_0).$$

La sucesión (finita) de los espacios fundamentales $S_i (i \in \Delta)$ verifica

$$\dim [S_i(M_0)] = i.$$

● El espacio $S_i(M_0)$ será llamado **espacio fundamental de dimensión i** (cuando exista). La variedad afín de dirección $S_i(M_0)$ que pasa por M_0 , será designada por $\mathcal{S}_i(M_0)$.

Interpretación geométrica de $\mathcal{S}_1(M_0)$

Lo mismo que en el § III.11, designemos por \mathcal{G}_1 el conjunto de las rectas vectoriales de E provisto de la topología definida en este § (véase p. 225). El teorema que sigue prueba que la variedad fundamental $\mathcal{S}_1(M_0)$ (cuando existe) es el límite de una secante que pasa por M_0 , incluso si M_0 es *estacionario*.

Teorema V.6.3

Sea γ un arco simple definido por la parametrización $f: I \rightarrow E$ y que admite a la recta vectorial T como espacio fundamental de dimensión 1 en el punto $M_0 = f(t_0)$. Si para todo $t \in I \setminus \{t_0\}$ se designa por D_t la dirección de la recta afín que une $f(t)$ con $f(t_0)$, se tiene:

$$(1) \quad T = \lim_{t \rightarrow t_0} D_t.$$

En consecuencia, si γ es un arco **compacto** o **inmerso** en E , su soporte tiene a la recta afín $(M_0 T) = \mathcal{S}_1(M_0)$ como **tangente geométrica única** en el punto M_0 .

Demostración

a) Sea p el mínimo entero tal que el espacio fundamental p -ésimo $T_p(M_0)$ sea igual a $T = \mathcal{S}_1(M_0)$. Por definición, se tiene

$$f^{(k)}(t_0) = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq k \leq p-1 \quad \text{y} \quad f^{(p)}(t_0) \neq 0.$$

Según la fórmula de Taylor-Young es

$$f(t) - f(t_0) = \frac{(t - t_0)^p}{p!} [f^{(p)}(t_0) + g(t)], \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = 0.$$

La recta vectorial D_t es engendrada por el vector

$$\vec{V}(t) = p! \frac{f(t) - f(t_0)}{(t - t_0)^p} = f^{(p)}(t_0) + g(t)$$

y se tiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{V}(t) = f^{(p)}(t_0).$$

Finalmente, la recta vectorial $T = T_p(M_0)$ es engendrada por el vector $f^{(p)}(t_0)$. La relación (1) se desprende entonces de III.11.1.

b) Para cada $M \in \text{sop}(\gamma)$, pongamos $t_M = f^{-1}(M)$. Si γ es *compacto* o *inmerso* en E , la aplicación $f: I \rightarrow f(I)$ es un homeomorfismo (véase § 3); por lo tanto, la aplicación $M \mapsto t_M$ es *continua*. Por composición de límites se tiene, pues,

$$T = \lim_{M \rightarrow M_0, M \neq M_0} D_{t_M}.$$

Ahora bien, D_{t_M} es la dirección de la recta (M_0M) ; la recta $(M_0T) = \mathcal{C}_p(M_0)$ es pues la tangente geométrica a γ en M_0 .]

Observaciones

1. Al ser *simple* el arco γ , nos podemos referir siempre al caso de un arco *inmerso* en E ; basta tomar un subarco *compacto* de γ que pase por M_0 (véase ejemplo 2, p. 312).

2. El teorema V.6.3 es válido tanto si M_0 es estacionario como si es regular. Si M_0 es regular, necesita el concepto de contacto de γ con su tangente. Si M_0 es estacionario, ya no se aplica la teoría del contacto. En un punto tal, el arco γ puede aproximarse a la recta (M_0T) «menos rápidamente» que en el caso en que M_0 es regular.

En la práctica, si el punto M_0 es estacionario, se dice todavía que la recta (M_0T) es «la tangente» a γ en M_0 (o, también «la tangente de retroceso»), pero no debe perderse de vista que las propiedades de esta «tangente generalizada» no son las mismas que en el caso de un punto regular.

3. *Acción de la diferencial de un difeomorfismo.* Pongámonos en el caso (que puede considerarse como «general» en que $T_1(M_0) = \mathcal{S}_1(M_0)$) y transformemos el

arco γ por un C' -difeomorfismo Φ . Resulta fácilmente de las definiciones que la diferencial $D\Phi_{M_0}$ transforma $T_1(M_0)$ en la recta $T_1(\Phi(M_0))$ correspondiente al arco transformado $\Phi(\gamma)$ y al punto $\Phi(M_0)$. Dicho de otro modo, *la biyección afín de parte lineal $D\Phi_{M_0}$, que lleva M_0 a $\Phi(M_0)$, transforma la tangente en M_0 a γ en la tangente en $\Phi(M_0)$ a $\Phi(\gamma)$* (téngase en cuenta que, en general, la transformada por Φ de esta tangente es un arco no rectilíneo).

Interpretación geométrica de $\mathcal{S}_2(M_0)$

Suponiendo al arco γ inmerso en E , coloquémonos en el caso en que las variedades fundamentales $\mathcal{S}_1(M_0)$ y $\mathcal{S}_2(M_0)$ están definidas, y para cada punto M de $\text{sop}(\gamma)$ que no pertenezca a la «tangente» $\mathcal{S}_1(M_0)$, designemos por \mathcal{P}_M el plano que contiene a $\mathcal{S}_1(M_0)$ y que pasa por M .

Introduciendo una topología adecuada en el conjunto de los planos afines que contienen a $\mathcal{S}_1(M_0)$ se puede, con la hipótesis de que M_0 es adherente al conjunto de los $M \neq M_0$ para los cuales \mathcal{P}_M está definido, establecer la relación

$$\mathcal{S}_2(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0, M \neq M_0} (\mathcal{P}_M).$$

Se traduce esta propiedad diciendo que $\mathcal{S}_2(M_0)$ es el *plano osculador geométrico* a γ en M_0 (incluso si no se tiene $\mathcal{S}_2(M_0) = \mathcal{C}_2(M_0)$); pero no debe confundirse este concepto con el de plano osculador propiamente dicho, ya que no posee las mismas propiedades.

§ V.7 RESULTADOS PRÁCTICOS. EJEMPLOS

Mantengamos las notaciones del § anterior y sea γ un arco simple definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, derivable hasta un orden suficientemente grande. Designemos por (f_i) ($1 \leq i \leq n$) las coordenadas de f en un sistema de referencia afín \mathcal{R} de E y por $M_0 = f(t_0)$ un punto de γ .

• Si se tiene $f'(t_0) \neq 0$, **la tangente** a γ en el punto M_0 es la recta afín $\mathcal{C}_1(M_0)$ de ecuaciones paramétricas:

$$x_i = f_i(t_0) + \lambda f'_i(t_0) \quad (\lambda \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

y el orden de contacto de γ con su tangente en M_0 es igual al mínimo entero p tal que el vector $f^{(p+1)}(t_0)$ sea *no colineal* con $f'(t_0)$ (si es que tal entero p existe). Si se tiene $p \geq 2$, el punto M_0 es un *punto de inflexión* de γ .

• Si se tiene $f'(t_0) = 0$, y si p es el mínimo entero que verifica $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ (suponiendo las $(f^{(p)}(t_0))_{p \in \mathbf{N}}$ no todas nulas), el arco γ admite como *tangente generalizada* en el punto M_0 a la recta $\mathcal{S}_1(M_0) = \mathcal{C}_p(M_0)$ de ecuaciones paramétricas

$$x_i = f_i(t_0) + \lambda f_i^{(p)}(t_0) \quad (\lambda \in \mathbf{R}; i = 1, 2, \dots, n).$$

Ejemplos

1. El arco γ de \mathbf{R}^3 definido por la parametrización $x = t$, $y = t^3$, $z = t^4$ tiene al origen como punto de inflexión (obteniéndose este punto para $t = 0$). La tangente en este punto es la recta Ox ; el contacto de γ con esta recta es igual a 2.

2. El arco γ de \mathbf{R}^2 definido por la parametrización $x = t^2$, $y = t^3$ tiene al eje Ox como «tangente generalizada» en el origen. Si $d(M)$ designa la distancia a esta recta de un punto $M = (t^2, t^3)$ de γ , se tiene $d(M) = |t|^3$ y $OM = (t^4 + t^6)^{1/2}$, de donde (en el entorno de O): $d(M) \sim (OM)^{3/2}$. El arco γ «está menos cerca» de su tangente que en el caso de una tangente ordinaria.

Supongamos ahora E de dimensión 3. Si los vectores $f'(t_0)$ y $f''(t_0)$ son independientes, el **plano osculador** a γ en M_0 admite la ecuación cartesiana

$$\begin{vmatrix} x_1 - f_1(t_0) & x_2 - f_2(t_0) & x_3 - f_3(t_0) \\ f'_1(t_0) & f'_2(t_0) & f'_3(t_0) \\ f''_1(t_0) & f''_2(t_0) & f''_3(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

que se obtiene expresando que los tres vectores $\overrightarrow{M_0M}$, $f'(t_0)$, $f''(t_0)$ están ligados.

Cambiando de notación, se escribe esta ecuación en la forma:

$$(1) \quad \boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0}.$$

Con estas notaciones, observemos que los vectores $f'(t_0)$ y $f''(t_0)$ son linealmente independientes si, y solamente si, la matriz

$$\begin{bmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{bmatrix}$$

es de rango 2.

Apliquemos ahora el teorema V.6.2 poniendo $x(t) = f_1(t)$, $y(t) = f_2(t)$ y $z(t) = f_3(t)$. Para que el plano \mathcal{P} de ecuación cartesiana

$$ux + vy + wz + h = 0$$

sea osculador a γ en M_0 , es necesario y suficiente que se tenga

$$(2) \quad ux(t) + vy(t) + wz(t) + h = 0[(t - t_0)^3].$$

En el caso —el más frecuente en la práctica— en que las funciones f_1, f_2, f_3 son analíticas, la relación 2 significa que t_0 es una raíz de orden ≥ 3 de la ecuación en las intersecciones

$$ux(t) + vy(t) + wz(t) + h = 0$$

de \mathcal{P} y γ .

Si M_0 es un punto de inflexión de γ (es decir si se tiene $f'(t_0) \neq 0$ y si el vector $f''(t_0)$ es colineal con $f'(t_0)$ el plano osculador propiamente dicho no está definido. Pero si los $f^{(p)}(t_0)$, ($p \in \mathbf{N}^*$) no son todos colineales con $f'(t_0)$, y si p es el menor entero ≥ 1 tal que $f^{(p)}(t_0)$ no es colineal con $f'(t_0)$, el arco γ tiene como «plano osculador generalizado» al plano $\mathcal{S}_2(M_0) = \mathcal{C}_p(M_0)$ definido por la ecuación cartesiana

$$\begin{vmatrix} x_1 - f_1(t_0) & x_2 - f_2(t_0) & x_3 - f_3(t_0) \\ f'_1(t_0) & f'_2(t_0) & f'_3(t_0) \\ f^{(p)}_1(t_0) & f^{(p)}_2(t_0) & f^{(p)}_3(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Ejemplos

1. Sea γ la *hélice circular*, definida en \mathbf{R}^3 euclídeo por las ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($t \in \mathbf{R}$). El plano osculador a γ en el punto de parámetro t está definido por la ecuación cartesiana

$$\begin{vmatrix} x - a \cos t & y - a \sin t & z - bt \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

o sea

$$b(x \sin t - y \cos t) + a(z - bt) = 0.$$

2. Hemos visto ya que el arco de \mathbf{R}^3 definido por $x = t$, $y = t^3$, $z = t^4$, tiene al origen como punto de inflexión. Tiene al plano de ecuación $z = 0$ como «plano osculador generalizado» en este punto (se tiene aquí en efecto: $f'(0) = (1, 0, 0)$, $f''(0) = (0, 0, 0)$ y $f'''(0) = (0, 6, 0)$).

Utilización de coordenadas homogéneas

Resulta a veces cómodo formar la ecuación del plano osculador en *coordenadas homogéneas*. Por definición, si M es un punto de \mathbf{R}^3 , de coordenadas cartesianas

(x, y, z) , se da el nombre de coordenadas homogéneas de M a toda cuaterna (X, Y, Z, T) de reales que verifican $T \neq 0$ y

$$x = \frac{X}{T}, \quad y = \frac{Y}{T}, \quad z = \frac{Z}{T}.$$

Supongamos al arco γ definido por una parametrización de la forma:

$$f : t \mapsto \left(x(t) = \frac{X(t)}{T(t)}, \quad y(t) = \frac{Y(t)}{T(t)}, \quad z(t) = \frac{Z(t)}{T(t)} \right)$$

con $T(t) \neq 0$ para todo t . Se puede entonces decir que γ está definido, en coordenadas homogéneas, por la parametrización

$$t \mapsto (X(t), Y(t), Z(t), T(t)).$$

Si las funciones X, Y, Z, T , son de clase $k \geq 2$, se puede demostrar que el plano osculador a γ en el punto de parámetro t_0 (si existe) está definido por la ecuación homogénea

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & T_0 \\ X'_0 & Y'_0 & Z'_0 & T'_0 \\ X''_0 & Y''_0 & Z''_0 & T''_0 \end{vmatrix} = 0$$

(donde se ha puesto $X_0 = X(t_0)$, $X'_0 = X'(t_0)$, etc...).

Este método simplifica muchas veces los cálculos.

Para ilustrar esta técnica formemos la ecuación del plano osculador en el punto de parámetro t del arco de \mathbf{R}^3 definido por

$$x = \frac{\cos t}{\sinh t}, \quad y = \frac{\operatorname{sen} t}{\sinh t}, \quad z = \frac{\cosh t}{\sinh t} \quad (t \in \mathbf{R}_+^*).$$

Se puede aquí poner:

$$X(t) = \cos t, \quad Y(t) = \operatorname{sen} t, \quad Z(t) = \cosh t, \quad T(t) = \sinh t.$$

La ecuación buscada es pues $uX + vY + wZ + hT = 0$, con

$$\begin{aligned}
 u &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} t & \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \cos t & \operatorname{senh} t & \cosh t \\ -\operatorname{sen} t & \cosh t & \operatorname{senh} t \end{vmatrix} = -2 \operatorname{sen} t, \\
 v &= \begin{vmatrix} -\cos t & \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{sen} t & \operatorname{senh} t & \cosh t \\ \cos t & \cosh t & \operatorname{senh} t \end{vmatrix} = 2 \cos t, \\
 w &= \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t & \operatorname{senh} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & \cosh t \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & \operatorname{senh} t \end{vmatrix} = 2 \operatorname{senh} t, \\
 h &= \begin{vmatrix} -\cos t & \operatorname{sen} t & \cosh t \\ \operatorname{sen} t & \cos t & \operatorname{senh} t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t & \cosh t \end{vmatrix} = -2 \cosh t.
 \end{aligned}$$

Se obtiene, pues

$$X \operatorname{sen} t - Y \cos t - Z \operatorname{senh} t + T \cosh t = 0,$$

de donde la ecuación cartesiana:

$$x \operatorname{sen} t - y \cos t - z \operatorname{senh} t + \cosh t = 0.$$

§ V.8 CARACTERIZACIÓN DE LOS ARCOS CONTENIDOS EN UNA SUBVARIEDAD AFÍN

Sea E un espacio vectorial de dimensión n , y γ un arco simple de E . Si el soporte I de γ está contenido en una subvariedad afín V de E , es claro que todas las variedades afines fundamentales de γ , en uno cualquiera de sus puntos, están contenidas en V .

Si q designa la dimensión mayor de un subespacio fundamental de γ , se deduce que no existe ninguna variedad afín de dimensión $\leq q - 1$ que contenga a γ .

Vamos a estudiar las recíprocas de estas propiedades y para tener resultados satisfactorios nos convendrá imponer condiciones de regularidad bastante fuertes.

Arcos regulares cuyos puntos son todos de inflexión

V.8.1 || Sea γ un arco simple y regular de clase C^k , con $k \geq 2$. Si todos los puntos de γ son puntos de inflexión, entonces el soporte de γ es un intervalo de recta.

Demostración. Sea $f: I \rightarrow E$, $t \mapsto f(t)$ una parametrización de γ , de componentes (f_1, \dots, f_n) en un sistema de referencia fijo. Por hipótesis, la derivada de f no se anula y existe una función numérica λ que verifica

$$f''(t) = \lambda(t) f'(t)$$

para todo $t \in I$. Utilizando coordenadas se ve que esta función λ es de clase C^{k-2} , por lo tanto continua. Las relaciones

$$f_i''(t) = \lambda(t) f_i'(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

implican (para t_0 fijo en I)

$$f_i(t) = f_i(t_0) + \psi(t) f_i'(t_0),$$

con

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \exp \left[\int_{t_0}^u \lambda(\tau) d\tau \right] du;$$

o sea, en forma vectorial:

$$f(t) = f(t_0) + \psi(t) f'(t_0).$$

Se deduce de ello que el soporte Γ de γ está contenido en la recta D , que pasa por el punto $M_0 = f(t_0)$, y está dirigida por el vector $f'(t_0)$. Además, al ser Γ conexo, es un *intervalo* de D .]

Observación. Ha sido solamente por razón de sencillez del enunciado que hemos supuesto γ *simple*. De hecho, hemos demostrado el resultado más general siguiente:

V.8.1 bis Sea γ un arco **regular** definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$ de clase C^2 tal que, para todo $t \in I$, el vector $f''(t)$ es colineal con $f'(t)$.
 || Entonces, el soporte de γ es un intervalo de recta.

Extensión

Para establecer un resultado general, vamos a utilizar el lema siguiente, que se desprende de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales (véase tomo 4, capítulo I).

V.8.2 Sea E un espacio vectorial de dimensión n ⁽¹⁾, I un intervalo de \mathbf{R} , y $\varphi : I \rightarrow E$ una función de clase D^p que verifica una relación de la forma

$$(\forall t \in I) \quad \varphi^{(p)}(t) + \lambda_1(t) \varphi^{(p-1)}(t) + \cdots + \lambda_p(t) \varphi(t) = 0,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son funciones numéricas continuas en I , con $p < n$. Existe entonces un subespacio vectorial V de E , de dimensión $\leq p$, tal que, para todo $t \in I$, se tiene $\varphi(t) \in V$.

Demostración. Elijamos un punto $t_0 \in I$ y designemos por V el espacio vectorial engendrado por los p vectores $\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(p-1)}(t_0)$. Vamos a demostrar que, para todo $t \in I$, se tiene $\varphi(t) \in V$.

Elijamos para ello una base (e_i) de E tal que V esté definido por las ecuaciones cartesianas

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_r = 0$$

y designemos por $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ las componentes de φ en esta base. Las funciones φ_i son soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden p ,

$$(1) \quad y^{(p)} + \lambda_1(t) y^{(p-1)} + \cdots + \lambda_p(t) y = 0$$

y para $i = 1, 2, \dots, r$ verifican las condiciones iniciales

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i'(t_0) = \cdots = \varphi_i^{(p-1)}(t_0) = 0.$$

Ahora bien, la única solución de (1) que verifica estas condiciones iniciales es la solución nula (véase tomo 4, teorema I.9.1). Se tiene pues $\varphi_i(t) = 0$ para todo $t \in I$ y todo $i = 1, 2, \dots, r$; de donde el resultado.]

Se deduce:

V.8.3 Sea γ un arco simple y regular de clase C^k ($k \geq 2$). Se supone que, para todo punto M de γ , los espacios fundamentales $T_{k-1}(M)$ y $T_k(M)$ están confundidos y son de dimensión $k - 1$. Entonces el soporte de γ está contenido en una variedad afín de dimensión $k - 1$.

Demostración. Sea $f : I \rightarrow E$ una parametrización de γ . Por hipótesis, para todo $t \in I$, los vectores $f'(t), f''(t), \dots, f^{(k-1)}(t)$ son independientes, y los vectores $f'(t), f''(t), \dots, f^{(k)}(t)$ están ligados. Existen pues $k - 1$ funciones numéricas $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ en I que verifican

⁽¹⁾ Destaquemos que este resultado sigue siendo verdadero para un e.v.n. cualquiera de dimensión infinita.

$$(\forall t \in I) \quad f^{(k)}(t) = \lambda_1(t)f'(t) + \cdots + \lambda_{k-1}(t)f^{(k-1)}(t).$$

Además, expresando los números $\lambda_i(t)$ por medio de las componentes de f en una base fija, se ve que las funciones λ_i son continuas. Por aplicación de V.8.2 a la función $\varphi = f'$, resulta que existe un subespacio vectorial V de E , de dimensión $\leq k - 1$, tal que, para todo $t \in I$, se tiene $f'(t) \in V$. Se deduce fácilmente que existe una variedad afín \mathcal{V} , de dirección V , que contiene a $f(I)$. Se puede, en efecto, elegir una base de E tal que V esté definida por las ecuaciones

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \dots, x_r = 0.$$

Las componentes (f_i) de f en esta base verifican entonces las relaciones

$$(\forall t \in I) \quad f'_1(t) = f'_2(t) = \cdots = f'_r(t) = 0,$$

de donde

$$f_1(t) = \text{Cte} = a_1, \dots, f_r(t) = \text{Cte} = a_r,$$

y la variedad afín \mathcal{V} de ecuaciones $x_i = a_i$ ($1 \leq i \leq r$) responde a las condiciones exigidas.

Observemos que para todo punto M de γ , se tiene $T_{k-1}(M) \subset V$, de donde

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(V) = k - 1 \quad \text{y} \quad T_{k-1}(M) = V. \quad \square$$

Aplicación

Para $k = 3$ se obtiene el resultado que sigue, el cual nos va a permitir más adelante (§ VI.8) caracterizar las curvas de torsión nula.

Si γ es un arco simple regular, de clase C^3 y sin punto de inflexión, cuyo plano osculador en cada punto es sobreosculador, entonces el soporte de γ está contenido en un plano.

Observación. Hay que tener en cuenta que las conclusiones de V.8.1 y V.8.3 podrían fallar si se abandonaran ciertas hipótesis: por ejemplo, si γ es un arco simple no regular definido por una parametrización f y si los vectores f' , f'' están ligados en todo punto, el soporte Γ de γ no está necesariamente contenido en una recta única. Hay ejemplos sencillos que demuestran que Γ puede ser una *línea poligonal* cualquiera.

Caso en que una de las variedades afines fundamentales pasa por un punto fijo

El lema V.8.2 nos permite establecer también:

V.8.4 Sea γ un arco simple y regular de clase C^k , con $k \geq 1$. Se supone que existe un punto fijo A de E tal que, para todo punto M de γ se satisfacen las condiciones siguientes:

- i) La variedad afín $\mathcal{C}_k(M)$ es de dimensión k y pasa por A ,
- ii) La variedad afín $\mathcal{C}_{k-1}(M)$ no pasa por A .

Entonces el soporte de γ está contenido en una variedad afín de dimensión k que pasa por A .

Demostración. Tomemos como origen a A y designemos por $f: I \rightarrow E$ una parametrización de γ . Según i), para todo $t \in I$, los vectores $f'(t), \dots, f^{(k)}(t)$ son independientes y los vectores $f(t), f'(t), \dots, f^{(k)}(t)$ están ligados. Según ii), para todo $t \in I$, los vectores $f(t), \dots, f^{(k-1)}(t)$ son independientes. Existen por lo tanto k funciones numéricas $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ que verifican

$$(\forall t \in I) \quad f^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f^{(i)}(t)$$

y se ve fácilmente que las funciones λ_i son continuas.

La proposición V.8.2 muestra entonces que existe un espacio vectorial V , de dimensión $\leq k$, que contiene a $f(I)$. V se identifica a una variedad afín, de igual dimensión, que pasa por A . Por otra parte, la inclusión $\mathcal{C}_k(M) \subset V$ implica $\dim(V) = k$ y $\mathcal{C}_k(M) = V$.]

Aplicaciones

Observemos en primer lugar que para $k = 1$, la hipótesis $A \notin \mathcal{C}_{k-1}(M)$ se reduce a $M \neq A$.

Tomando $k = 1$, después $k = 2$, se obtienen los resultados que siguen, utilizados en Cinemática:

1. Un arco simple y regular cuya tangente pasa por un punto fijo A y cuyo soporte no contiene a A , tiene como soporte un intervalo de una recta que pasa por A .
2. Sea γ un arco simple y regular, sin punto de inflexión, cuyo plano osculador pasa por un punto fijo A y cuya tangente no pasa nunca por A . Entonces el soporte de γ está contenido en un plano que pasa por A .

Se puede demostrar que estos resultados siguen siendo válidos con hipótesis menos restrictivas, si los arcos considerados son de clase C^2 o C^3 .

§ V.9 ESTUDIO AFÍN DE LOS ARCOS PLANOS SIMPLES

● A partir de aquí y hasta el final del capítulo, el e.v.n. de base E se supone de dimensión 2.

Nuestro objetivo consiste aquí en el estudio local práctico de un arco plano simple γ de clase k ($k \geq 2$) en el entorno de un punto ordinario o estacionario. El arco γ se supondrá definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$.

(Recordemos que un punto $M_0 = f(t_0)$ de γ se dice que es *ordinario* si $f'(t_0) \neq 0$, y que es *estacionario* si $f'(t_0) = 0$ (véase def. V.3.2).)

Estudio en el entorno de un punto ordinario M_0

Se puede suponer siempre, por traslación sobre el parámetro, que se tiene $M_0 = f(0)$.

Haremos la hipótesis siguiente: *existe un entero $q \geq 2$ tal que los vectores $f'(0)$ y $f^{(q)}(0)$ son independientes* ⁽¹⁾. Designaremos por p el más pequeño de los enteros q que verifican esta condición.

El desarrollo limitado de orden p de f en el entorno de 0 es entonces de la forma:

$$(1) \quad f(t) = f(0) + [t + t^2 P(t)]f'(0) + \frac{t^p}{p!}f^{(p)}(0) + o(t^p)$$

donde $P(t)$ designa un polinomio de coeficientes reales (que es nulo si $p = 2$).

En el sistema de referencia afín de origen M_0 , definido por los vectores $f'(0)$ y $(1/p!)f^{(p)}(0)$, las componentes X, Y de $f(t)$ son de la forma

$$X = t + o(t) \quad Y = t^p + o(t^p).$$

Ahora bien, la primera coordenada X es un parámetro admisible sobre γ en el entorno de M_0 (véase V.3.4). De las relaciones anteriores se deduce pues ⁽²⁾:

$$t = X + o(X), \quad Y = X^p + o(X^p).$$

De ahí resulta que el arco γ y el arco de ecuación $Y = X^p$, tienen un contacto de orden $\geq p$ en M_0 .

⁽¹⁾ Si esta hipótesis no se verifica, no se puede establecer ninguna teoría general, a no ser que el arco γ sea analítico (es decir tal que las funciones X, Y sean analíticas, véase tomo 2, capítulo IV): en este caso se puede demostrar que γ se reduce a un intervalo de recta.

⁽²⁾ Por un abuso de lenguaje que en la práctica resulta cómodo, designamos simplemente por $Y(X)$ la expresión de la segunda coordenada en función del parámetro X (obtenida por eliminación de t entre las ecuaciones $X = X(t)$ e $Y = Y(t)$).

Para la discusión haremos notar que se tiene $p = 2$ si, y solamente si, los vectores $f'(0)$ y $f''(0)$ son *independientes*, es decir si M_0 no es punto de inflexión de γ (véase § 4). Se trata por lo tanto del caso general.

a) **Caso $p = 2$.** Este caso se presenta si, y solamente si, las funciones dadas $t \mapsto X(t)$ y $t \mapsto Y(t)$ verifican $X'(0) Y''(0) - Y'(0) X''(0) \neq 0$.

Se dice entonces que γ presenta en M_0 la disposición **ordinaria**. La parábola $Y = X^2$ es *osculatriz* a γ en M_0 (pero se tendrá en cuenta que no es la única parábola oscultriz a γ en este punto, véase ejercicio VI.14).

Al ser las funciones consideradas de clase $k \geq 2$, sus desarrollos limitados de orden 2 vienen dados por la fórmula de Taylor-Young (véase tomo 2, § IV.6). La relación

$$Y = X^2 + o(X^2) \quad \text{implica pues} \quad \frac{d^2 Y}{dX^2}(0) = 2,$$

y puesto que la función $Y''(X)$ es continua, se tiene $Y''(X) > 0$ para los X próximos a 0. Se ve pues que el soporte de γ es, en el entorno de M_0 , el grafo, en el sistema de referencia (M_0XY) , de una función *convexa* $X \mapsto Y(X)$ (véase la figura 1).

b) **Caso $p \geq 3$.** Es el caso en que las funciones dadas $t \mapsto X(t)$ y $t \mapsto Y(t)$ verifican

$$X'(0) Y''(0) - Y'(0) X''(0) = 0.$$

En este caso M_0 es un **punto de inflexión** de γ .

Si p es impar, la función $X \mapsto Y(X)$ es del signo de X en el entorno de 0. Se dice que el soporte de γ *atraviesa* la tangente M_0X .

Si p es par, la función $X \mapsto Y(X)$ es > 0 para X próximo a 0, $X \neq 0$. En este caso, la disposición es análoga a la disposición ordinaria, pero la forma del soporte de γ está mucho más «aplanada» sobre M_0X . Por esta razón, se dice que γ presenta en M_0 un *aplanamiento* (véase la figura 1).

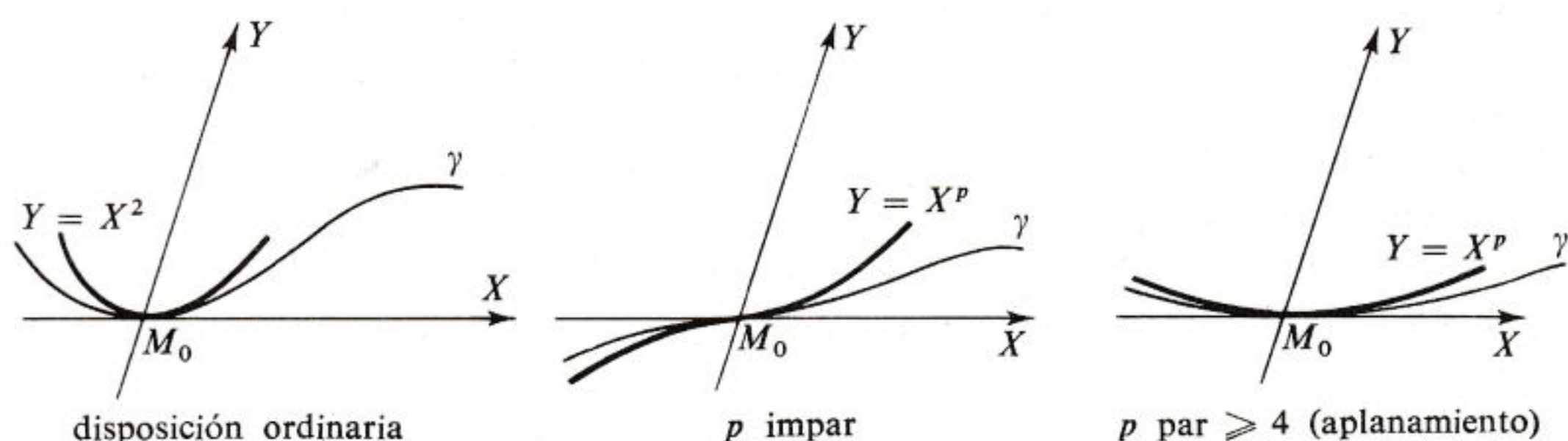


Figura 1.

Estudio en el entorno de un punto estacionario M_0

Manteniendo las mismas notaciones haremos la hipótesis siguiente:

(H) Existe por lo menos un par (m, n) de enteros ≥ 2 tales que los vectores $f^{(m)}(0)$ y $f^{(n)}(0)$ son independientes.

Designaremos entonces por p el menor entero ≥ 2 tal que $f^{(p)}(0) \neq 0$ y por q el menor entero $\geq p + 1$ tal que los vectores $f^{(p)}(0)$ y $f^{(q)}(0)$ sean independientes. El desarrollo limitado de orden q de $f(t)$ en el entorno de 0 es de la forma

$$f(t) = f(0) + \frac{t^p}{p!} [1 + tP(t)] f^{(p)}(0) + \frac{t^q}{q!} f^{(q)}(0) + o(t^q)$$

donde P designa un polinomio de coeficientes reales (que es nulo si $q = p + 1$).

Observemos en primer lugar que para $t \neq 0$ y suficientemente próximo a 0, el punto $M = f(t)$ es ordinario, ya que se tiene

$$f'(t) = \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(0) + o(t^{p-1}).$$

En el sistema de referencia afín de origen M_0 , definido por los vectores $1/p! f^{(p)}(0)$ y $1/q! f^{(q)}(0)$, las componentes $X(t)$, $Y(t)$ de $f(t)$ son de la forma

$$X(t) = t^p + o(t^p), \quad Y(t) = t^q + o(t^q).$$

Se tiene, pues,

$$\frac{Y(t)}{X(t)} \sim t^{q-p}, \quad \text{de donde} \quad \frac{Y(t)}{X(t)} = o(t)$$

ya que $q - p \geq 1$. Existe por lo tanto un subarco de γ que pasa por M_0 y cuyo soporte tiene a la recta M_0X como *tangente geométrica* en M_0 .

Recordemos que esta recta es la «tangente generalizada» a γ en M_0 (véase § 7).

La posición relativa del soporte de γ y del eje M_0X para t próximo a 0, viene dada por la relación $Y/X \sim t^{q-p}$. Las diversas disposiciones posibles vienen especificadas en el cuadro de la figura 2.

La relación $Y/X \sim t^{q-p}$ proporciona una idea de la separación entre el arco y su tangente. Por ejemplo, si $t > 0$, se tiene $Y \sim X^{q/p}$. En general, se tiene $p = 2$, $q = 3$, de donde $Y \sim X^{3/2}$ si $t > 0$ e $Y \sim -(-X)^{3/2}$ para $t < 0$. En este caso, el arco se aparta *más* de su tangente que en un punto ordinario (véase p. 328, ejemplo 2).

En el caso de retroceso de segunda especie, es preciso establecer la posición relativa de las porciones que corresponden a $t > 0$ y $t < 0$ con un método adap-

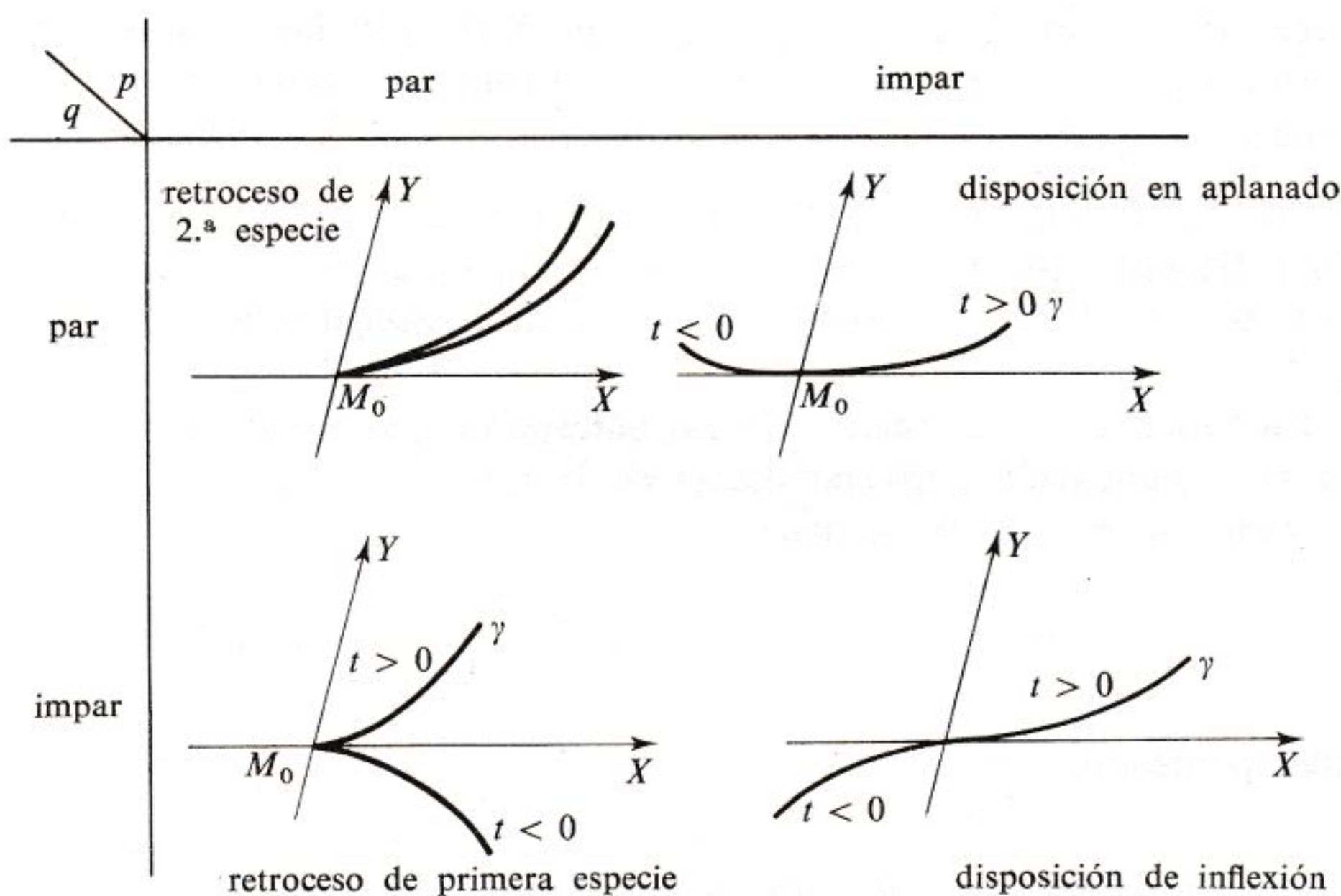


Figura 2.

tado al caso particular de que se trate. (Por ejemplo, se podrá estudiar la ecuación $Y(t) = X$ en el entorno de $t = 0$ y $X = 0$, siendo t la incógnita y X el parámetro; del mismo modo se podrá estudiar $X(t) = Y$.)

Conclusión práctica para el estudio local de un arco simple

Se trata de determinar un desarrollo limitado a un orden suficiente en el entorno del punto t_0 de la parametrización dada f . A este efecto, se utilizarán todos los *métodos corrientes de cálculo de los desarrollos limitados*.

Entre los puntos ordinarios se determinará, si es posible, los puntos de inflexión, pero en la práctica el estudio de estos puntos resulta muchas veces laborioso, a veces hasta inextricable.

§ V.10 RAMAS INFINITAS DE LOS ARCOS PLANOS

Sea I un intervalo de $\bar{\mathbf{R}}$, $t_0 \in I$ y $f: I \setminus \{t_0\} \rightarrow E$ una aplicación inyectiva de clase C^∞ . Según que t_0 sea o no un extremo de I , f define uno o dos arcos planos. Hablaremos sin embargo de «el arco γ definido por f ». Por una traslación sobre el parámetro t (si $t_0 \in \mathbf{R}$) o por el cambio de parámetro $t \mapsto 1/t$ (si $t_0 = \pm \infty$) po-

demostraremos referirnos siempre al caso $t_0 = 0$. Sean $X(t)$, $Y(t)$ las coordenadas de $f(t)$ en un sistema de referencia. Se dice que γ presenta una *rama infinita* para $t = 0$ si se tiene $\lim_{t \rightarrow 0} (|X(t)| + |Y(t)|) = +\infty$ (esta condición no depende del sistema de referencia considerado, y permanece invariante en todo cambio de parámetro admisible). En este caso, haremos las hipótesis siguientes: *0 es interior a I y existe un entero $m > 0$ tal que la función $t \mapsto t^m f(t)$ se prolonga a una función de clase C^∞ en $I^{(1)}$.*

Designaremos por p el **menor de los enteros m** que verifican esta condición y por g la prolongación correspondiente de la función $t \mapsto t^p f(t)$.

Para todo entero $n > 0$, se tiene:

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \dots + \frac{t^{p+n}}{(p+n)!} g^{(p+n)}(0) + o(t^{p+n});$$

de donde, poniendo

$$A_j = \frac{1}{(p+j)!} g^{(p+j)}(0) \quad \text{para } j \geq -p,$$

$$(1) \quad f(t) = t^{-p} g(t) = \sum_{j=-p}^n t^j A_j + o(t^n) = t^{-p} A_{-p} + \dots + t^n A_n + o(t^n).$$

Por la definición de p se tiene $g(0) \neq 0$, de donde $A_{-p} \neq 0$. La dirección definida por el vector A_{-p} recibe el nombre de **dirección asintótica** relativa al valor 0 del parámetro.

Primer caso: Existe un entero $r > 0$, tal que los vectores A_{-r} y A_{-p} son independientes.

En este caso, sea q el mayor de estos enteros r ($q < p$). En un sistema de referencia afín de origen O cualquiera, de vectores A_{-p} y A_{-q} , las coordenadas de $f(t)$ son, según (1), de la forma

$$X(t) = \frac{1}{t^p} [1 + o(1)], \quad Y(t) = \frac{1}{t^q} [1 + o(1)],$$

de donde

$$\frac{Y(t)}{X(t)} \sim t^{p-q},$$

(1) Esta condición se cumple siempre si las funciones X , Y son cocientes de funciones analíticas en el entorno de $t = 0$.

y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(t)}{X(t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} X(t) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} Y(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0, t < 0} X(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p \text{ par} \\ -\infty & \text{si } p \text{ impar} \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow 0, t < 0} Y(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } q \text{ par} \\ -\infty & \text{si } q \text{ impar} \end{cases}$$

Se dice entonces que γ se compone, en el entorno de $t = 0$, de dos **ramas parabólicas de dirección asintótica** Ox .

La disposición de las ramas parabólicas que corresponden a $t > 0$ y $t < 0$ resulta fácil de determinar salvo si p y q son pares los dos. En este caso, habrá que efectuar un estudio particular (estudio análogo al de los retrocesos de segunda especie, p. 339).

Ejemplos

1. El arco definido por $x = t + t^2$, $y = t + t^3$ admite una rama parabólica de dirección Oy (cuando t tiende hacia $\pm \infty$).

2. El arco definido por $x = \frac{1}{\sin t}$, $y = \frac{1}{t + \sin t}$ tiene una rama parabólica cuya dirección es la recta $y = x$ (cuando t tiende hacia 0).

Segundo caso: Los vectores $A_{-p}, A_{-p+1}, \dots, A_{-1}$ son colineales y existe un entero $r > 0$ tal que los vectores A_{-p} y A_r son independientes.

En este caso, sea q el menor de los enteros r que verifican esta condición. Utilizaremos el sistema de referencia afín (único) de vectores A_{-p}, A_q , cuyo origen es tal que $A_0 = 0$.

Según (1), las componentes de $f(t)$ respecto a este sistema de referencia son de la forma

$$X = \frac{1}{t^p} [1 + o(t)], \quad Y = t^q [1 + o(t)];$$

de donde

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} X(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0, t < 0} X(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p \text{ par} \\ -\infty & \text{si } p \text{ impar} \end{cases}$$

e $Y(t) \sim t^q$.

Se dice que la recta Ox es una **asíntota**. La posición relativa de $f(t)$ y Ox en el entorno de $t = 0$ se deduce de la relación $Y \sim t^q$. Para t próximo a 0, el arco γ

se compone de dos ramas, que corresponden respectivamente a $t > 0$ y $t < 0$; la posición relativa de estas ramas se determina fácilmente, salvo en el caso de que p y q sean pares, caso que requiere un estudio directo.

Las disposiciones posibles se hallan representadas en el cuadro que damos a continuación (fig. 3).

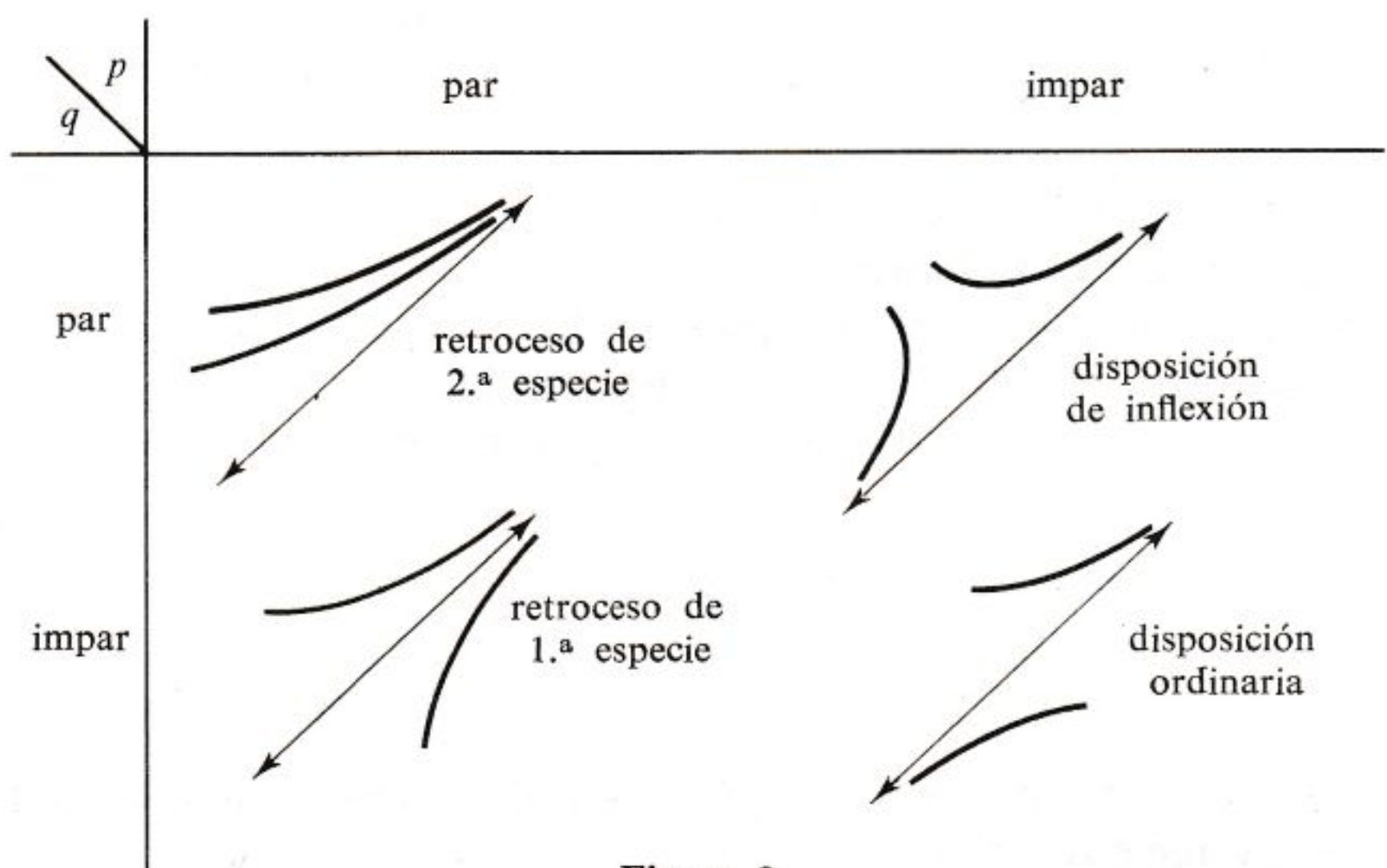


Figura 3.

Tercer caso: Todos los vectores $A_j (j \in \mathbf{Z}, j \neq 0 \text{ y } j > -p)$ son colineales con A_{-p} . Puesto que el origen O se elige siempre de manera que $A_0 = 0$, la recta Ox de vector director A_{-p} sigue llamándose **asíntota**. Pero la disposición relativa de γ y de Ox no viene dada por (1) y precisa de un estudio directo.

(Si las funciones X, Y son analíticas, este caso sólo puede darse cuando el soporte de γ se reduce a una parte de Ox .)

Conclusión práctica para el estudio de las ramas infinitas

Se intentará efectuar un desarrollo limitado de $g(t) = t^p f(t)$ con un orden suficiente para poner en evidencia los vectores A_{-p}, A_{-q} o A_{-p}, A_q (si existen). Si las componentes $X(t)$ e $Y(t)$ de $f(t)$ son conocidas (en un sistema de referencia afín) todo se reduce a calcular sus desarrollos asintóticos a partir de los desarrollos usuales y de las reglas de cálculo en los desarrollos limitados (véase tomo 2, cap. IV).

Observación. Si no se satisfacen las hipótesis que nos han permitido establecer (1), se hará un estudio directo de la rama infinita siguiendo el proceso conocido. Suponiendo, para fijar ideas, que $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} |X(t)| = +\infty$, se estudiará el límite

$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} Y(t)$; después, si ha lugar, $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{Y(t)}{X(t)}$. Finalmente, si este último límite m existe y si es *finito no nulo*, se estudiará

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} [Y(t) - mX(t)].$$

Si este último límite h existe, queda por examinar el comportamiento de $Y(t) - mX(t) - h$ cuando $t \rightarrow 0$ ($t > 0$). Se procede del mismo modo para la rama correspondiente a $t < 0$.

En algunos casos particulares se podrá combinar el método general con este método directo, con objeto de simplificar lo más posible los cálculos.

Ejemplos

1. El arco definido por $x = \frac{1}{\sin t}$, $y = \frac{\cos t}{\sin t}$ tiene la recta $y = x$ como asíntota (cuando t tiende hacia 0).
2. El arco definido por $x = \cosh t$, $y = t \cosh t$ admite una rama parabólica en la dirección Oy (cuando t tiende hacia $\pm \infty$).
3. El arco definido por

$$x = \exp\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \exp\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

tiene la recta $y = x$ por asíntota (cuando t tiende hacia $\pm \infty$); admite también como asíntotas la recta $x = 0$ (cuando t tiende hacia 0 para valores < 0) y la recta $y = 0$ (cuando t tiende hacia 0 para valores > 0).

§ V.11 CURVAS PLANAS DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE

Sea $f: U \rightarrow E$ una función de clase C^k ($k \geq 1$) en un abierto U del plano afín E y sea Γ_f el conjunto de los puntos $M \in U$ que verifican $f(M) = 0$. El par (f, Γ_f) recibe el nombre de **curva de ecuación** $f = 0$ o de **curva definida implícitamente** por $f = 0$. Por abuso de lenguaje se puede escribir Γ_f en lugar de (f, Γ_f) , pero debe tenerse en cuenta que el conjunto Γ_f no determina la función f y que la estructura de la «curva» (f, Γ_f) puede depender de la elección de f (para un soporte dado Γ_f).

Vamos a estudiar aquí la estructura local de una tal curva.

● En todo lo que sigue, designaremos por Df_M la diferencial de la función f en el punto M , y por $Df_M \cdot \vec{V}$ la imagen de un vector \vec{V} de E por la aplicación lineal Df_M .

Definición V.11.1

De un punto M de la curva de ecuación $f = 0$ se dice que es **ordinario** (o **regular**) si la diferencial Df_M es **no nula**; se dice que es **singular** si $Df_M = 0$.

Interpretando geométricamente la teoría de las funciones implícitas, se obtiene:

Teorema V.11.1

Sea M_0 un punto ordinario de la curva plana Γ de ecuación $f = 0$. Existe entonces un entorno V de M_0 tal que $\Gamma \cap V$ es el soporte de un arco γ_0 (de clase C^k lo mismo que f) que admite una parametrización cartesiana, por lo tanto regularmente inmerso en E ; la tangente a este arco en M_0 es la **recta afín** definida por la ecuación

$$(1) \quad Df_{M_0} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0.$$

Demostración. Designemos por $F(x, y)$ el valor de f en el punto M de coordenadas (x, y) en un sistema de referencia $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de E ; sean (x_0, y_0) las coordenadas de M_0 en este sistema de referencia. Entonces Df_{M_0} es la aplicación lineal

$$u\vec{i} + v\vec{j} \mapsto uF'_x(x_0, y_0) + vF'_y(x_0, y_0)$$

y puesto que se tiene $Df_{M_0} \neq 0$, se puede, permutando si es preciso las coordenadas, suponer que se tiene $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Según el teorema de las funciones implícitas (véase tomo 2 p. 284) existen entonces intervalos abiertos I, J y una aplicación $\varphi: I \rightarrow J$ de clase C^k que verifica $\varphi(x_0) = y_0$, tal que las relaciones:

$$(x, y) \in I \times J \quad \text{y} \quad F(x, y) = 0$$

son equivalentes a: $x \in I$ e $y = \varphi(x)$. El conjunto V formado por los puntos M cuyas coordenadas verifican $x \in I$ e $y \in J$ responden a las condiciones pedidas, y γ_0 es el arco de ecuación cartesiana $y = \varphi(x)$.

La tangente en M_0 a γ_0 es la recta de ecuación $y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$. Según el teorema de las funciones implícitas se tiene

$$\varphi'(x_0) = -F'_x(x_0, y_0)/F'_y(x_0, y_0).$$

La tangente queda pues definida por la ecuación

$$(2) \quad (x - x_0) F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) F'_y(x_0, y_0) = 0$$

que equivale a (1).]

Se observará que la ecuación (2) es válida incluso cuando se tiene $F'_y(x_0, y_0) = 0$. En la práctica, será esta la ecuación que utilizaremos.

Observación. Suponiendo que la función f es de clase C^k , con $k \geq 1$, la aplicación $M \mapsto Df_M$ es continua. El conjunto de los puntos $M \in U$ que verifican $Df_M \neq 0$ es por lo tanto abierto; según una observación ya hecha en la página 313 resulta de ahí que $\Omega \cap \Gamma$ es una subvariedad de dimensión 1 de E .

Puntos de inflexión

Sigamos con las notaciones de la demostración anterior suponiendo $k \geq 2$. Para que M_0 sea un punto de inflexión de γ_0 , es necesario y suficiente que se tenga $\varphi''(x_0) = 0$.

Pero, para x suficientemente próximo a x_0 , se tiene

$$\varphi'(x) = -F'_x(x, y)/F'_y(x, y),$$

de donde, por derivación de las funciones compuestas

$$\varphi'' = \frac{F_x'^2 F_{xy}'' - F_x' F_y'(F_{x^2}'' + F_{y^2}'') + F_y'^2 F_{xy}''}{F_y'^3}.$$

Se deduce:

V.11.2 Sea F una función de clase C^k ($k \geq 2$) en un abierto de \mathbf{R}^2 y sea Γ la curva definida implícitamente, en un sistema de referencia afín dado, por la ecuación $F(x, y) = 0$. Para que un punto ordinario de Γ sea **punto de inflexión**, es necesario y suficiente que sus coordenadas (x, y) verifiquen $H(x, y) = 0$, con:

$$H = F_x'^2 F_{xy}'' - F_x' F_y'(F_{x^2}'' + F_{y^2}'') + F_y'^2 F_{xy}''.$$

La función H recibe el nombre de **hessiana** de F . Se escribe

$$H = \begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y \\ F'_y & F''_{x^2} & F''_{xy} \\ F'_x & F''_{xy} & F''_{y^2} \end{vmatrix}.$$

Singularidades corrientes

Si M_0 es un punto singular de la curva de ecuación $f=0$, sólo se puede establecer una teoría general cuando f es analítica. Estudiaremos más adelante el caso en que f es un polinomio (caso en el cual se dice que la curva Γ_f es *algebraica*). En el «caso bueno» existe un entorno V de M_0 tal que $\Gamma_f \cap V$ es la reunión de los soportes de un número finito de arcos geométricos, llamados «ramas» de la curva Γ_f en M_0 .

Puesto que tendremos que considerar varios sistemas de referencia afines del plano, volveremos a las definiciones generales en vigor al comienzo de este §. La aplicación $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ se supondrá pues definida en un abierto U del plano afín \mathcal{E} , y de clase C^k , con $k \geq 2$. Se designa por Γ_f la curva de ecuación $f=0$ y se designa por M_0 un punto *singular* de Γ_f , es decir un punto tal que la diferencial Df_{M_0} sea nula y tal que $f(M_0)=0$.

Designaremos por $D^2f_{M_0}$ la *forma bilineal simétrica* asociada a la diferencial segunda de f en M_0 (véase tomo 2, V.3 y V.8). Con las notaciones del tomo 2 la forma $D^2f_{M_0}$ se halla definida por

$$(\forall \vec{V}_1, \vec{V}_2 \in E), \quad D^2f_{M_0}(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = [f''(M_0) \cdot \vec{V}_1] \cdot \vec{V}_2.$$

La *forma cuadrática* asociada a $D^2f_{M_0}$ será designada por q_{M_0} .

A cada base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de E corresponde una función única $F_{\mathcal{B}}: U_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbf{R}$, donde $U_{\mathcal{B}}$ es el abierto de \mathbf{R}^2 formado por los pares (x, y) tales que $M_0 + x\vec{i} + y\vec{j} \in U$ y donde $F_{\mathcal{B}}(x, y) = F(M_0 + x\vec{i} + y\vec{j})$ para todo $(x, y) \in U_{\mathcal{B}}$. Es evidente que $F_{\mathcal{B}}$ es de clase C^k .

Habiendo fijado una tal base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de E , pongamos

$$r = \frac{\partial^2 F_{\mathcal{B}}}{\partial x^2}(0, 0), \quad s = \frac{\partial^2 F_{\mathcal{B}}}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad t = \frac{\partial^2 F_{\mathcal{B}}}{\partial y^2}(0, 0),$$

y sea Q la forma cuadrática definida en \mathbf{R}^2 por

$$(\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall y \in \mathbf{R}), \quad Q_{\mathcal{B}}(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

Según el estudio hecho en el tomo 2, § V.8, la forma cuadrática q_{M_0} queda entonces definida por

$$q_{M_0}(x\vec{i} + y\vec{j}) = Q_{\mathcal{B}}(x, y) \quad (x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}).$$

Por otra parte, la hipótesis $Df_{M_0}=0$ se transforma en las relaciones

$$\frac{\partial F_{\mathcal{B}}}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial F_{\mathcal{B}}}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Nos limitaremos a estudiar el punto singular M_0 con la hipótesis suplementaria de que la forma cuadrática q_{M_0} es no degenerada. (Cualquiera que sea la base \mathcal{B} que se elija, esta hipótesis equivale a $s^2 - rt \neq 0$.)

Primer caso: La forma cuadrática q_{M_0} es definida (positiva, o negativa).

Cualquiera que sea la base \mathcal{B} que se elija, este caso se presenta si, y solamente si, se tiene: $s^2 - rt < 0$.

En este caso, el estudio hecho en el tomo 2, § VI.1, prueba que f admite en M_0 un extremo estricto; existe entonces un entorno V de M_0 tal que se tiene

$$f(M) \neq f(M_0) \quad \text{para} \quad M \in V \setminus \{M_0\}.$$

En este caso, el punto M_0 es pues un punto aislado del conjunto Γ_f . Se dice entonces que M_0 es un punto singular aislado de Γ_f .

Segundo caso: La forma cuadrática q_{M_0} no es definida. Cualquiera que sea la base \mathcal{B} elegida, este caso se presenta si, y solamente si, se tiene: $s^2 - rt > 0$.

Para estudiar este caso supondremos que f es de clase C^k , con $k \geq 3$. Con esta hipótesis vamos a establecer el resultado que sigue:

V.11.3 $\left\| \begin{array}{l} \text{Existe una base } \mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}) \text{ de } E, \text{ un entorno } W \text{ de } M_0 \text{ y un difeomorfismo } \Psi \text{ de clase} \\ C^{k-2} \text{ de } W \text{ sobre un entorno } V \text{ de } (0, 0) \text{ tales que} \\ F_{\mathcal{B}} \circ \Psi(M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j}) = X^2 - Y^2 \quad \text{para} \quad X\vec{i} + Y\vec{j} \in W \quad (X \in \mathbf{R}, Y \in \mathbf{R}). \end{array} \right.$

Este resultado nos permitirá precisar la forma de Γ_f en el entorno de M_0 (véase teorema V.11.4). Pero además, presenta un interés propio, y se utilizará en la teoría de superficies (véase VIII.5).

Al objeto de establecer V.11.3, utilizaremos el lema siguiente (que será generalizado en el ejercicio V.10).

Lema

$\left\| \begin{array}{l} \text{Sea } a \text{ un real } > 0, \text{ y } \Omega \text{ el abierto de } \mathbf{R}^2 \text{ formado por los } (x, y) \text{ tales que } |x| < a, \\ |y| < a. \text{ Si } G : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ es una función numérica de clase } C^k \text{ (con } k \geq 2), \text{ tal que} \\ \\ G'_x(0, 0) = G'_y(0, 0) = 0, \quad \text{y} \quad G(0, 0) = 0, \end{array} \right.$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{existen tres funciones numéricas } P, Q, R, \text{ de clase } C^{k-2} \text{ sobre } \Omega \text{ las cuales verifican} \\ \\ (\forall (x, y) \in \Omega) \quad G(x, y) = x^2 P(x, y) + 2xyQ(x, y) + y^2 R(x, y) \\ \\ P(0, 0) = \frac{1}{2} G''_{x^2}(0, 0), \quad Q(0, 0) = \frac{1}{2} G''_{xy}(0, 0), \quad R(0, 0) = \frac{1}{2} G''_{y^2}(0, 0). \end{array} \right.$$

Demostración del lema

a) Considerando fijo el punto (x, y) en Ω , definamos una función $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$(\forall t \in [0, 1]) \quad \varphi(t) = G(tx, ty).$$

Esta función φ es evidentemente de clase C^k , y según la regla de derivación de las funciones compuestas, para todo $t \in [0, 1]$, se tiene

$$\varphi'(t) = xG'_x(tx, ty) + yG'_y(tx, ty)$$

de donde

$$\varphi''(t) = x^2 G''_{x^2}(tx, ty) + 2xyG''_{xy}(tx, ty) + y^2 G''_{y^2}(tx, ty).$$

Por otra parte, las condiciones impuestas a G implican $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Aplicando a φ en $[0, 1]$ la fórmula de Taylor con resto integral de orden 1 (véase tomo 2, Prop. X.9.3) se obtiene

$$G(x, y) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 (1 - t) \varphi''(t) dt,$$

de donde

$$(1) \quad G(x, y) = x^2 P(x, y) + 2xyQ(x, y) + y^2 R(x, y)$$

con

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} P(x, y) = \int_0^1 (1 - t) G''_{x^2}(tx, ty) dt \\ Q(x, y) = \int_0^1 (1 - t) G''_{xy}(tx, ty) dt \\ R(x, y) = \int_0^1 (1 - t) G''_{y^2}(tx, ty) dt. \end{cases}$$

b) Las relaciones (1 bis) definen tres funciones P, Q, R , que verifican (1) para todo $(x, y) \in \Omega$. Además, como las funciones G''_{x^2} , G''_{xy} y G''_{y^2} son de clase C^{k-2} , las funciones P, Q y R son también de clase C^{k-2} en Ω como resulta de la aplicación de los teoremas de continuidad y derivabilidad de integrales dependientes de parámetros (véase tomo 2, § XI.7).

Finalmente se tiene en consecuencia

$$P(0, 0) = \int_0^1 (1 - t) G''_{x^2}(0, 0) dt = G''_{x^2}(0, 0) \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2} G''_{x^2}(0, 0)$$

e igualmente

$$Q(0, 0) = \frac{1}{2} G''_{xy}(0, 0) \quad R(0, 0) = \frac{1}{2} G''_{y^2}(0, 0).$$

El lema queda demostrado. \square

Demostración de V.11.3.

Prosigamos ahora el estudio del punto singular M_0 de la curva Γ_f a fin de establecer V.11.3. Cualquiera que sea la base \mathcal{B} que se elija, se tiene:

$$q_{M_0}(x\vec{i} + y\vec{j}) = x^2 \frac{\partial^2 F_{\mathcal{B}}}{\partial x^2}(0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 F_{\mathcal{B}}}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 F_{\mathcal{B}}}{\partial y^2}.$$

Ahora bien, puesto que la forma q_{M_0} es de signatura $(1, 1)$, existe una base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ tal que se tiene:

$$q_{M_0}(x\vec{i} + y\vec{j}) = x^2 - y^2$$

(véase tomo 1, teorema XII.4.3).

Habiendo fijado una tal base \mathcal{B} , pongamos $F = F_{\mathcal{B}}$; evidentemente se tiene:

$$F''_{x^2}(0, 0) = 1, \quad F''_{xy}(0, 0) = 0, \quad F''_{y^2}(0, 0) = -1$$

y, según se ha visto ya,

$$F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0.$$

Sea a un real > 0 , tal que las relaciones $|x| < a$ e $|y| < a$ impliquen

$$M_0 + x\vec{i} + y\vec{j} \in U.$$

Podemos aplicar el lema anterior a la restricción de F al cuadrado abierto $\Omega =]-a, +a[\times]-a, +a[$, luego existen tres funciones numéricas A, B, C de clase C^{k-2} en Ω que verifican

$$(2) \quad A(0, 0) = 1, \quad B(0, 0) = 0, \quad C(0, 0) = -1,$$

y

$$(\forall (x, y) \in \Omega) \quad F(x, y) = x^2 A(x, y) + 2xyB(x, y) + y^2 C(x, y).$$

Las funciones A, B, C son continuas en Ω y, en el punto $(0, 0)$, se tiene

$$A = 1 \quad \text{y} \quad B^2 - AC = 1;$$

existe pues un real $b > 0$ ($b \leq a$) tal que, para $|x| < b$ e $|y| < b$, se tiene:

$$(3) \quad \begin{aligned} & A(x, y) > 0 \quad \text{y} \quad B^2 - AC > 0, \quad \text{de donde} \\ & F(x, y) = \left(x\sqrt{A} + y\frac{B}{\sqrt{A}} \right)^2 - \left(y\sqrt{\frac{B^2 - AC}{A}} \right)^2. \end{aligned}$$

Pongamos, para $|x| < b$ e $|y| < b$:

$$\varphi(x, y) = x\sqrt{A} + y\frac{B}{\sqrt{A}}, \quad \psi(x, y) = y\sqrt{\frac{B^2 - AC}{A}}$$

y sea $\Phi :]-b, +b[\times]-b, +b[\rightarrow \mathbf{R}^2$ la aplicación de componentes (φ, ψ) . Esta aplicación es de clase C^{k-2} , por lo tanto diferenciable (ya que $k \geq 3$); teniendo en cuenta (2) se ve fácilmente que su matriz jacobiana en el origen es

$$\begin{bmatrix} \varphi'_x(0, 0) & \psi'_x(0, 0) \\ \varphi'_y(0, 0) & \psi'_y(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En otros términos, la diferencial de Φ en el punto $(0, 0)$ es la aplicación idéntica de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^2 . Por otra parte, se tiene $\Phi(0, 0) = (0, 0)$.

Según el *teorema de inversión local* (véase tomo 2, teorema VI.5.1), existe un real $c > 0$ y un entorno V de $(0, 0)$ contenido en $] -b, b[\times] -b, b[$ tales que Φ es un difeomorfismo de V sobre el abierto $W_1 =] -c, c[\times] -c, c[$.

Designemos por W el entorno de M_0 formado por los puntos

$$M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j} \quad (X, Y) \in W_1.$$

La aplicación $\Psi : W \rightarrow V$ tal que,

$$\Psi(M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j}) = \Phi^{-1}(X, Y)$$

es un difeomorfismo de clase C^{k-2} de W sobre V . Según (3), se tiene:

$$F \circ \Psi(M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j}) = X^2 - Y^2 \text{ (si } M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j} \in W \text{)}.$$

El enunciado (V.11.3) queda de este modo totalmente demostrado.]

Aplicación al estudio del punto singular M_0

Sean (x, y) las componentes de $\Phi^{-1}(X, Y)$. La aplicación

$$\Theta : M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j} \mapsto M_0 + x\vec{i} + y\vec{j}$$

es, según nuestro estudio, un difeomorfismo de W sobre un entorno W' de M_0 . Este difeomorfismo es de clase C^{k-2} y transforma el conjunto Δ de los puntos

$$M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j} \in W \quad \text{tales que } X^2 - Y^2 = 0,$$

en el conjunto $\Gamma_f \cap W'$.

Consideremos a Δ como reunión de los soportes de los arcos γ_1, γ_2 de clase C^{k-2} parametrizados por $X = t, Y = \pm t$ ($|t| < c$). Estos arcos son evidentemente simples y regulares; se trans-

forman por Θ en dos arcos γ'_1, γ'_2 de clase C^{k-2} cuyos soportes tienen como reunión el conjunto $\Gamma_f \cap W'$, siendo por otra parte M_0 el único punto común a estos soportes.

Un cálculo análogo al de J_0 muestra que la diferencial L_0^{-1} de Θ^{-1} en el punto M_0 admite por matriz, en la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{r}{2}} & \frac{s}{\sqrt{2r}} \\ 0 & \sqrt{\frac{s^2 - rt}{2r}} \end{bmatrix}$$

De ello se deduce que la imagen, por L_0 , del haz de rectas de ecuación $X^2 - Y^2 = 0$ en E es el haz de rectas de ecuación

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0, \quad \text{o sea} \quad q_{M_0}(M_0 + x\vec{i} + y\vec{j}) = 0.$$

Ahora bien, el haz de ecuación $X^2 - Y^2 = 0$ está formado por las dos tangentes en M_0 a los arcos γ_1, γ_2 . La diferencial L_0 transforma estas tangentes en las tangentes en M_0 a los arcos γ'_1, γ'_2 , y la ecuación del haz de estas tangentes es pues $q_{M_0}(M_0 + x\vec{i} + y\vec{j}) = 0$. Observemos finalmente que la diferencial de la función

$$F \circ \Psi : M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j} \mapsto X^2 - Y^2 \quad (|X| < c, |Y| < c)$$

se anula solamente en el punto M_0 . Al ser Ψ un difeomorfismo se deduce que la diferencial de $f : M_0 + x\vec{i} + y\vec{j} \mapsto F(x, y) = f(M_0 + x\vec{i} + y\vec{j})$ $((x, y) \in V)$ se anula solamente en el punto M_0 . Dicho de otro modo: M_0 es el único punto singular de Γ_f que pertenece a W' .

Con el fin de dar un enunciado cómodo a los resultados obtenidos, diremos que el punto singular M_0 de Γ_f es *no degenerado y de ramas reales* para expresar que la forma cuadrática q_{M_0} es *no degenerada y no definida*, es decir, de signatura $(1, 1)$. Según el estudio anterior, el aspecto de Γ_f en el entorno de un tal punto M_0 es el de un «nodo simple» con *tangentes distintas*.

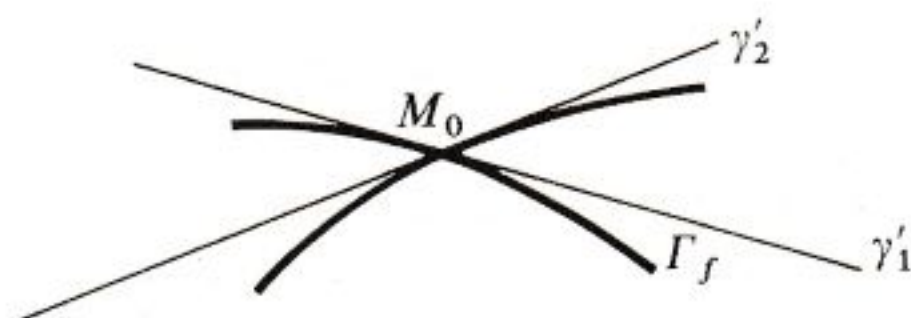


Figura 4.

Los arcos γ'_1, γ'_2 (véase la figura 4) que corresponden a γ_1 y γ_2 (notaciones anteriores) reciben el nombre de «ramas de Γ_f en M_0 ».

Resumiremos este estudio en el teorema siguiente:

Teorema V.11.4

|| Sea U un abierto de un plano afín E , $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^k , con $k \geq 3$,

y M_0 un punto singular no degenerado de ramas reales de la curva Γ_f de ecuación $f = 0$. Existe entonces un entorno V_{M_0} de M_0 tal que:

a) M_0 es el único punto singular de Γ_f que pertenece a V_{M_0} .

b) $\Gamma_f \cap V_{M_0}$ es la reunión de los soportes de dos arcos simples y regulares, de clase C^{k-2} , siendo M_0 el único punto común a estos soportes.

Además, las tangentes a estos dos arcos en M_0 constituyen el haz de ecuación

$$q_{M_0}(\overrightarrow{M_0 M}) = 0,$$

donde q_{M_0} designa la forma cuadrática asociada a la diferencial segunda de F en M_0 .

Recordemos que si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ es una base del espacio vectorial E ligado a E , y si ponemos

$$F(x, y) = f(M_0 + x\vec{i} + y\vec{j}), \quad \overrightarrow{M_0 M} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0), \quad s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0, 0),$$

la ecuación

$$q_{M_0}(\overrightarrow{M_0 M}) = 0$$

equivale a

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

Observación. De un punto singular M_0 se dice que es *degenerado* (sobre Γ_f) si la forma cuadrática q_{M_0} es degenerada. El estudio de un punto tal se propone como ejercicio V.10. (Este ejercicio hace ver que en general, el comportamiento de Γ_f en el entorno de un tal punto es el de un «retroceso de primera especie».)

§ V.12 EJEMPLOS DE CURVAS ALGEBRAICAS

Se dice que la curva plana de ecuación $f = 0$ es *algebraica y de grado d* si existe un sistema de referencia en el cual f se expresa mediante un polinomio F de grado d de coordenadas x, y ; ocurre entonces lo mismo con cualquier otro sistema de referencia. El número de factores irreducibles de F es también independiente del sistema de referencia; si F es irreducible, se dice también que la curva Γ es *irreducible*.

Ejemplos

1. El polinomio $F(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 - y^2$ es reducible; la curva de ecuación $F = 0$ se descompone en la recta de ecuación $x + y = 0$ y la elipse de ecuación

$$x^2 - xy + y^2 + x - y = 0$$

2. El polinomio $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$ ($a \neq 0$) es irreducible. La curva de ecuación $F = 0$ en un sistema de referencia ortonormal de un plano euclídeo es una *lemniscata de Bernoulli*. Admite la parametrización global

$$x = a \cos t \cos 2t, \quad y = a \sin t \cos 2t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Estudio en el entorno de un punto M_0

Elijamos un sistema de referencia de origen M_0 . La curva se define entonces mediante una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, donde F designa un polinomio que verifica $F(0, 0) = 0$, o sea

$$F(x, y) = \varphi_d(x, y) + \varphi_{d-1}(x, y) + \dots + \varphi_p(x, y)$$

con $d \geq p \geq 1$ y $\varphi_p \neq 0$, designando por φ_k la parte homogénea de grado k de F ($d = \text{gr}(F)$).

• El punto M_0 es *ordinario* si $p = 1$, y en este caso, se ve inmediatamente que la tangente a F en M_0 es la recta de ecuación $\varphi_1(x, y) = 0$.

• El punto M_0 es *singular* si $p \geq 2$, y en este caso, se puede demostrar que el conjunto de las tangentes geométricas a Γ en M_0 está contenido en el conjunto plano de ecuación $\varphi_p(x, y) = 0$.

Si $p = 2$ y si la ecuación $\varphi_2(x, y) = 0$ define dos rectas distintas, se puede aplicar el teorema V.11.4 (puesto que la forma cuadrática $Q_{\mathcal{B}}$ es aquí igual a φ_2).

El ejemplo que sigue muestra la manera de proceder para el estudio del comportamiento de Γ en el entorno de M_0 .

Ejemplo

Estudiar la curva de ecuación $F(x, y) = 0$, con $F(x, y) = x^5 - y^4 + x^2(x + y)$.

Se tiene aquí $p = 3$ y $\varphi_3(x, y) = x^2(x + y)$. Admitiremos que en el entorno del origen Γ tiene dos ramas reales, tangentes respectivamente a las rectas de ecuación $x = 0$, $x + y = 0$. Vamos a estudiar la posición de Γ respecto a estas tangentes.

a) Para estudiar la posición de Γ respecto a la recta $x + y = 0$, tomemos $v = \frac{x + y}{x}$ como variable auxiliar, lo que equivale a hacer el cambio de variables definido por $x = u$, $y = -u + uv$.

Al ser el origen un punto singular de orden 3 de Γ , el polinomio $G_1(u, v) = F(u, uv - u)$ es divisible por u^3 . Pongamos

$$F_1(u, v) = \frac{1}{u^3} G_1(u, v) = u^2 - u(v - 1)^4 + v$$

y sea Γ_1 la curva de ecuación $F_1(u, v) = 0$ en el plano de variables u, v . Esta curva Γ_1 pasa por el origen; el método consiste en estudiar la curva Γ_1 en el entorno del origen y en deducir los signos comparados de u, v , de donde se deducen los de x e $y + x$.

La tangente a Γ_1 en el origen es la recta $u - v = 0$. Se tiene pues el cuadro siguiente que proporciona los signos de v y uv para un u dado, en el entorno de $u = 0$:

$x = u$	v	$uv = x + y$
+	+	+
-	-	+

De ello se deduce que el arco correspondiente de Γ queda por encima de la tangente $x + y = 0$ en el entorno de O .

b) Estudiemos del mismo modo el arco de tangente en O a Oy . La introducción de la variable auxiliar $v = x/y$ lleva al cambio de variable $y = u$, $x = uv$. Como antes, el polinomio $G_1(u, 0) = F(uv, u)$ es divisible por u^3 . Poniendo

$$F_1(u, v) = \frac{1}{u^3} G_1(u, v) = u^2 v^5 - u + v^2(v + 1),$$

la curva Γ_1 de ecuación $F_1(u, v) = 0$, pasa por el origen. Al ser la recta $u = 0$ tangente a Γ_1 en el origen, no se puede llegar de inmediato a ninguna conclusión.

El método consiste entonces en reiterar el procedimiento. Siendo el origen un punto simple de Γ_1 , se hace el nuevo cambio de variables $v = \alpha$, $u = \alpha\beta$ y el polinomio

$$G_2(\alpha, \beta) = F_1(\alpha, \alpha\beta)$$

es divisible por α . Se pone

$$F_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} G_2(\alpha, \beta) = \alpha^5 \beta^2 - \beta + \alpha(\alpha + 1).$$

En el plano de las variables α, β , la curva Γ_2 , de ecuación $F_2(\alpha, \beta) = 0$, pasa por el origen; la tangente a F_2 en este punto es la recta de ecuación $\alpha - \beta = 0$. De ello se deduce el cuadro siguiente, que proporciona los signos comparados de β , $u = y = \alpha\beta$, $x = uv$, para $v = \alpha$ dado, en el entorno de $\alpha = 0$ (véase la figura 5).

$v = \alpha$	β	$u = y = \alpha\beta$	$x = uv$
+	+	+	+
-	-	+	-

Este estudio muestra que la rama de Γ tangente a Oy presenta en el origen un punto de retroceso de primera especie.

Finalmente, el aspecto en el origen viene dado por la figura 5 que sigue.

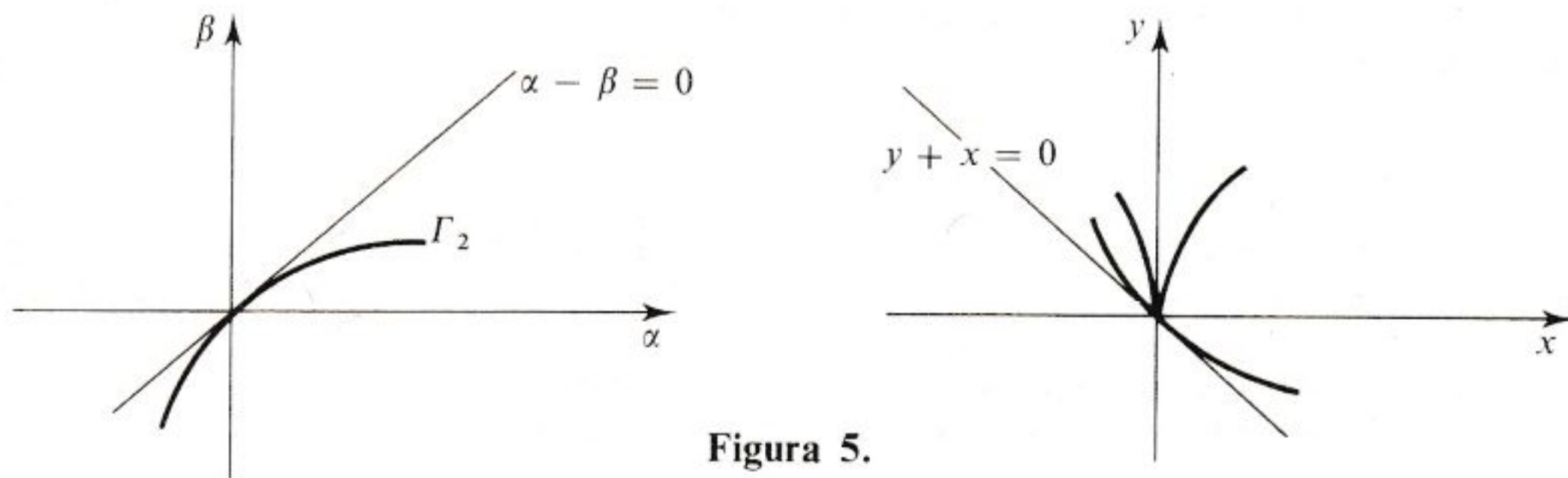


Figura 5.

• Volvamos al caso general y sea $y - mx = 0$ [resp. $x - my = 0$] la ecuación de una de las rectas del haz de tangentes en el origen (definido por $\varphi_p(x, y) = 0$). Se puede aplicar el método expuesto anteriormente haciendo el cambio de variables

$$x = u, \quad y - mx = uv \text{ [resp. } y = u, x - my = v]$$

y se estudia, en el entorno del origen, la curva de ecuación

$$F_1(u, v) = u^{-p} F(u, uv + mu) = 0 \text{ [resp. } F_1(u, v) = u^{-p} F(v + mu, u) = 0].$$

Si el origen es un punto ordinario de Γ_1 , o un punto múltiple con tangentes distintas y si ninguna de las rectas $u = 0, v = 0$ es tangente a Γ_1 en el origen, se tienen inmediatamente los signos comparados de u, v y de ellos los de x, y en el entorno de $u = 0$. De ahí se deduce la disposición en el entorno del origen de cada una de las ramas de Γ tangentes en el origen a la recta $y = mx$.

En caso contrario, se reitera la operación (tal como hemos hecho en el ejemplo anterior): Se demuestra (y nosotros lo admitimos aquí) que después de un número finito de operaciones tales se obtiene una curva Γ_k que tiene al origen como punto ordinario o como punto múltiple, con tangentes distintas, y que no tiene a ninguno de los ejes de coordenadas como tangente en este punto, lo cual permite resolver el problema.

Se puede observar que este procedimiento consiste en sustituir cada vez el estudio de la curva Γ_k por una curva Γ_{k+1} para la cual las singularidades son «más sencillas». Es un caso particular del método denominado del «estallido de las singularidades».

Un método análogo permitiría estudiar las ramas infinitas de Γ . Señalemos simplemente que si Γ es una curva de grado d definida por la ecuación

$$\varphi_d(x, y) + \dots + \varphi_p(x, y) = 0$$

las direcciones asintóticas de Γ están contenidas en el conjunto de las rectas vectoriales definidas por la ecuación $\varphi_d(x, y) = 0$.

Trazado global. Método de las regiones

Consideremos de nuevo la curva de ecuación

$$(1) \quad x^5 - y^4 + x^2(x + y) = 0$$

de la cual ya hemos estudiado el punto singular en el origen. Va a resultar ventajoso efectuar una división del plano en *regiones*, es decir, una determinación de los dominios que no contienen ningún punto de la curva. Esto nos evitará, a veces, el estudio de la posición de la curva respecto a una asíntota o a una tangente en un punto singular.

Aquí, la ecuación (1) implica

$$(x^5 - y^4)(x + y) < 0,$$

lo cual permite fijar la posición de la curva respecto a la recta $x + y = 0$ (que es una de las tangentes en el origen) y a la curva de ecuación $x^5 - y^4 = 0$. Si $x + y > 0$, se tiene $x^5 > y^4$; si $x + y < 0$, se tiene $x^5 < y^4$. Se puede pues afirmar que la curva no tiene ningún punto en las regiones rayadas del plano (véase la figura 6).

La multiplicidad de la única dirección asintótica $x = 0$ es igual a 1; ordenando respecto a y la ecuación de la curva, se ve que no hay asíntota. Poniendo $x = 1/u, y = 1/v$ y estudiando la curva en (u, v) en el entorno de 0, se concluye la existencia de una rama parabólica compuesta,

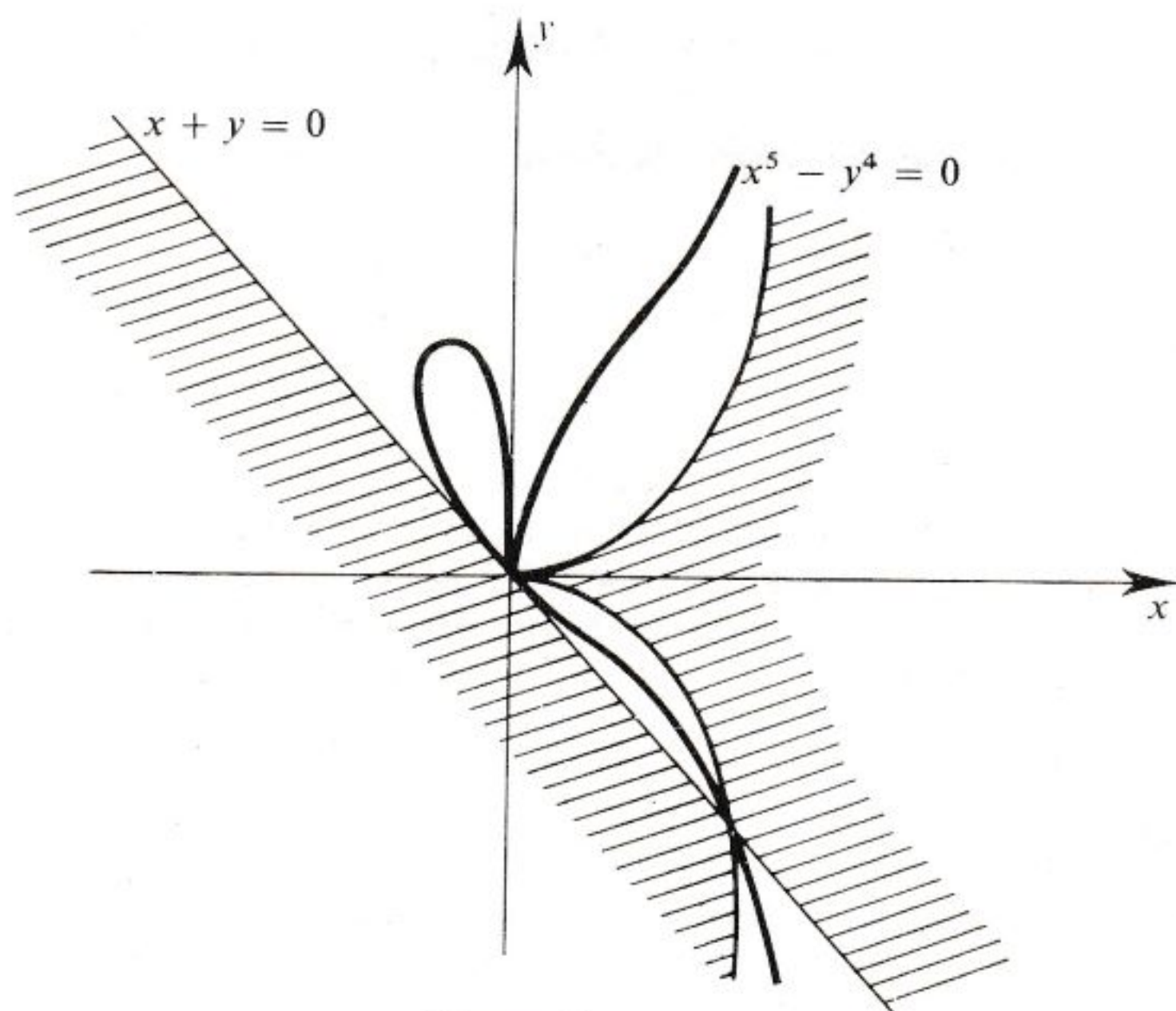


Figura 6.

en el entorno del infinito, por dos arcos, de los cuales uno está en la región $(x > 0, y > 0)$ y el otro en la región $(x > 0, y < 0)$.

La existencia de un «bucle» se asegura a través de las propiedades de las curvas algebraicas reales indescomponibles (las componentes conexas no reducidas a un punto no tienen ni punto de detención ni punto anguloso). La técnica de los desarrollos limitados de funciones implícitas permitiría ver que $x^5 - y^4 = 0$ es una curva asíntota de $x^5 - y^4 + x^2(x + y) = 0$.

Capítulo VI

Propiedades métricas de los arcos

En todo este capítulo designaremos por \mathcal{E}_n un espacio afín euclídeo de dimensión n , por E_n el espacio vectorial asociado, y estudiaremos las propiedades de los arcos geométricos de \mathcal{E}_n dependientes de la estructura euclídea que se introduzca.

Lo mismo que en el capítulo V, el espacio \mathcal{E}_n se identificará con E_n mediante la elección de un origen; pero este origen ya no se considerará fijo en todos los casos.

El producto escalar en E_n se designará siempre por $x \cdot y$ y la norma asociada por $\|x\|$.

En los ejemplos, el espacio \mathbf{R}^n se supondrá siempre provisto de la estructura (vectorial o afín) euclídea canónica.

§ VI.1 CONCEPTO GENERAL DE ARCO RECTIFICABLE. LONGITUD

Antes de dedicarnos al estudio del caso euclídeo, vamos a definir la longitud de un arco γ en un e.v.n. cualquiera E . Para ello, utilizaremos una aproximación del arco γ por medio de *líneas poligonales inscritas*.

Sea pues E un e.v.n. cuya norma se designará por $x \mapsto \|x\|$ y sea γ un *arco compacto* de E definido por una parametrización continua: $f: [a, b] \rightarrow E$.

A toda subdivisión $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ de $[a, b]$ ($t_0 = a$, $t_p = b$), asociemos la *línea poligonal* (M_0, M_1, \dots, M_p) de la cual se dice que está *inscrita* en γ y tiene vértices $M_i = f(t_i)$. La *longitud* de esta línea es el número

$$L_{\sigma, f} = \sum_{i=0}^{p-1} \|\overrightarrow{M_i M_{i+1}}\| = \sum_{i=0}^{p-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|.$$

Designemos por \mathcal{S} el conjunto de las subdivisiones de $[a, b]$ y por

$$L_f = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} (L_{\sigma, f}) \quad (0 \leq L_f \leq +\infty)$$

el extremo superior de los números $L_{\sigma, f}$ en $\overline{\mathbf{R}}$, que es un real positivo si los números $L_{\sigma, f}$ tienen una cota superior y $+\infty$ en caso contrario.

Si $g : [\alpha, \beta] \rightarrow E$ es otra parametrización de γ , existe una biyección continua $\theta : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ tal que $g = f \circ \theta$; esta biyección es estrictamente monótona. Si θ es creciente, la imagen de una subdivisión de $[a, b]$ es una subdivisión de $[\alpha, \beta]$, y recíprocamente; si θ es decreciente, establece todavía una correspondencia biyectiva entre las subdivisiones de $[a, b]$ y las de $[\alpha, \beta]$, pero invirtiendo el orden de estas subdivisiones.

En los dos casos, las parametrizaciones f y g definen el mismo conjunto de líneas poligonales inscritas en γ y se tiene por lo tanto $L_g = L_f$. En otros términos, $L = L_f$ es un elemento de $\overline{\mathbf{R}}$ independiente de la f que se elija, y diremos que L es el *extremo superior de las longitudes de las líneas poligonales inscritas en γ* .

Definición VI.1.1

Un arco γ de un e.v.n. E se dice que es **rectificable** si el extremo superior de las longitudes de las líneas poligonales inscritas en γ es **finito**. Cuando esto ocurre, tal extremo superior L es un real positivo, del que se dice que es la **longitud** de γ .

En lo que sigue, la longitud de un arco rectificable γ se designará por $L(\gamma)$. Se observará que solamente se tiene $L(\gamma) = 0$ cuando γ se reduce a un punto (es decir, cuando sus parametrizaciones son constantes).

Observaciones

1. Si se sustituye la norma de E por una norma equivalente, el conjunto de los arcos rectificables sigue siendo el mismo, pero la longitud de un arco rectificable depende de la norma que se elija.

2. Por definición, las parametrizaciones de un arco geométrico se supone que son continuas. Pero no hace falta suponer que f sea continua para definir

$$L_f = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} L_{\sigma, f}.$$

Una aplicación $f : [a, b] \rightarrow E$ tal que L_f sea finito, se dice que es de *variación total acotada*; el número L_f se dirá que es su *variación total* sobre $[a, b]$ (véase tomo 2, ejercicio II.29 para el caso de las funciones numéricas).

Vamos a estudiar ahora el caso de los arcos de clase C^k , con $k \geq 1$; el resultado fundamental que sigue permitirá hacer los efectivos los cálculos.

Teorema VI.1.1

En un e.v.n. completo E , todo arco compacto γ de clase C^k con $k \geq 1$ es **rectificable**; si $f : [a, b] \rightarrow E$ designa una parametrización de γ la longitud de γ es:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

(Se observará que la integral que figura en el segundo miembro de (1) está definida, ya que la continuidad de la función f' implica la de la función $t \mapsto \|f'(t)\|$).

Demostración

a) Demostremos en primer lugar que γ es *rectificable*.

Supuesto el espacio E completo, la función f' es integrable en $[a, b]$; para todos los $u, v \in [a, b]$, se tiene:

$$f(v) - f(u) = \int_u^v f'(t) dt,$$

de donde:

$$(1) \quad \|f(v) - f(u)\| \leq \int_u^v \|f'(t)\| dt.$$

Si $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ es una subdivisión de $[a, b]$, se tiene, pues,

$$L_{\sigma, f} = \sum_{i=0}^{p-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

El conjunto de los números $L_{\sigma, f}$ está pues *acotado superiormente* por el número

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt,$$

lo cual demuestra que es rectificable y que su longitud verifica $L(\gamma) \leq L$.

b) Para cada subdivisión $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ de $[a, b]$, pongamos:

$$\Delta_\sigma = \int_a^b \|f'(t)\| dt - L_{\sigma, f} = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt - \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \right).$$

Según a) se tiene $\Delta_\sigma \geq 0$; para acabar de establecer la igualdad $L_f = L$, basta demostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe una subdivisión que verifica $\Delta_\sigma \leq \varepsilon$.

Al ser fijo el número $\varepsilon > 0$, la continuidad *uniforme* de f' en el compacto $[a, b]$ implica la existencia de un número $h > 0$ tal que, para todos los $u, v \in [a, b]$ que verifican $|v - u| \leq h$, se tiene

$$(2) \quad \|f'(v) - f'(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

de donde

$$|\|f'(v)\| - \|f'(u)\|| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Sea entonces $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ una subdivisión de $[a, b]$ de *paso* $\leq h$ (es decir que verifica $|t_{i+1} - t_i| \leq h$ para todo $i = 0, 1, \dots, p-1$). Para cada

$$i = 0, 1, \dots, p-1,$$

se tiene en primer lugar

$$(3) \quad \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt - (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{i+1} - t_i).$$

Por otra parte, sea φ la función vectorial definida en $[t_i, t_{i+1}]$ por

$$\varphi(t) = f(t) - t f'(t_i) :$$

la función φ es derivable y verifica

$$\varphi'(t) = f'(t) - f'(t_i),$$

de donde, utilizando (2),

$$\| \varphi'(t) \| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Por aplicación de la desigualdad del teorema del incremento finito, se tiene pues:

$$\| \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) \| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{i+1} - t_i),$$

o sea

$$\| f(t_{i+1}) - f(t_i) - (t_{i+1} - t_i) f'(t_i) \| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{i+1} - t_i);$$

de donde se deduce, para $i = 0, 1, \dots, n-1$:

$$(4) \quad | \| f(t_{i+1}) - f(t_i) \| - (t_{i+1} - t_i) \| f'(t_i) \| | \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{i+1} - t_i).$$

Por comparación de (3) y (4) se obtiene

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| f'(t) \| dt - \| f(t_{i+1}) - f(t_i) \| \right| \leq \frac{2\varepsilon}{2(b-a)} (t_{i+1} - t_i);$$

de donde, al sumar, queda $\Delta_\sigma \leq \varepsilon$.]

Observación. Hemos demostrado que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $h > 0$ tal que toda subdivisión σ de paso $\leq h$ verifica $\Delta_\sigma \leq \varepsilon$. De esto se deduce que si (σ_n) es una sucesión de subdivisiones de $[a, b]$, cuyos pasos tienden hacia 0, la longitud de las líneas poligonales correspondientes tienden hacia la longitud de γ . De hecho este resultado se cumple para un arco rectificable cualquiera (véase [7], teorema 24.6).

Se observará también que, de acuerdo con su definición, la longitud de un arco es siempre por lo menos igual a la de la cuerda que une sus extremos (véase desigualdad (1)).

Equivalencia de la longitud de un arco pequeño con la longitud de la cuerda

Vamos a ver que en el caso de un arco γ **regular**, la longitud de un «pequeño» subarco de γ , de extremos P, Q , es equivalente a la longitud de la «cuerda» $[PQ]$. De un modo más preciso se tiene:

Teorema VI.1.2

En el e.v.n. completo E , sea γ un arco **regular** de clase C^1 , definido por una parametrización $f: I \rightarrow E$, y sea $t_0 \in I$.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un real $h > 0$ tal que las relaciones $u < v$, $|u - t_0| \leq h$ y $|v - t_0| \leq h$ implican $f(u) \neq f(v)$ y

$$\left| \frac{\int_u^v \|f'(t)\| dt}{\|f(v) - f(u)\|} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Demostración. Por hipótesis (al suponerse γ regular) se tiene $f'(t_0) \neq 0$. Sea entonces α un real que verifica $0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \|f'(t_0)\|$. La continuidad de f' implica la existencia de un real $h > 0$, tal que para $|t - t_0| \leq h$ se tiene

$$(5) \quad \|f'(t) - f'(t_0)\| \leq \alpha.$$

Aplicando la desigualdad del teorema del incremento finito a la función

$$\varphi: t \mapsto f(t) - f'(t_0),$$

se ve que las relaciones $|u - t_0| \leq h$ y $|v - t_0| \leq h$ ($u, v \in I$) implican

$$(6) \quad \|f(v) - f(u)\| - (v - u) \|f'(t_0)\| \leq \alpha |v - u|,$$

de donde

$$(7) \quad \|f(v) - f(u)\| \geq |v - u| (\|f'(t_0)\| - \alpha) \geq \frac{1}{2} |v - u| \|f'(t_0)\|.$$

Por otra parte, la relación (5) implica

$$|\|f'(t)\| - \|f'(t_0)\|| \leq \alpha,$$

de donde

$$\left| \int_u^v \|f'(t)\| dt - (v - u) \|f'(t_0)\| \right| \leq \alpha |v - u|.$$

Por comparación con (6), se deduce:

$$\left| \int_u^v \|f'(t)\| dt - \|f(v) - f(u)\| \right| \leq 2\alpha |v - u|,$$

y finalmente, utilizando (7)

$$\left| \int_u^v \|f'(t)\| dt - \|f(v) - f(u)\| \right| \leq 4\alpha \|f'(t_0)\| \|f(v) - f(u)\|.$$

Tomando

$$\alpha = \inf \left(\frac{1}{2} \|f'(t_0)\|, \frac{\varepsilon}{4} \|f'(t_0)\| \right)$$

se obtiene la relación buscada.]]

§ VI.2 CASO EUCLÍDEO

En el espacio afín euclídeo \mathcal{E}_n sea γ un arco compacto definido por una parametrización $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{E}_n$ de clase C^1 . Designemos por (f_1, \dots, f_n) las coordenadas de f en un sistema de referencia ortonormal cualquiera. La relación (1) del § anterior se escribe entonces

$$(1) \quad L(\gamma) = \int_a^b [f_1'^2(t) + \dots + f_n'^2(t)]^{1/2} dt$$

o sea, simbólicamente

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}.$$

Se dice también que la métrica de \mathcal{E}_n (en el sentido de la Geometría riemanniana) está definida, en coordenadas cartesianas ortonormales, por

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2.$$

Ejemplos

1. Sea γ la elipse definida en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 por la parametrización $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$; su longitud es

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

(Observemos que, para $|a| \neq |b|$, el cálculo efectivo de $L(\gamma)$ exigiría el empleo de funciones elípticas.)

2. Sea calcular la longitud $L(T)$ del *arco de cisoide* definido, en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 , por

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2} \quad (0 \leq t \leq T).$$

La relación (1) proporciona aquí

$$L(T) = \int_0^T (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2} dt,$$

o sea, una vez hechos los cálculos,

$$L(T) = a \int_0^T \frac{t}{t^2+1} \sqrt{t^2+4} dt.$$

Poniendo $u = t^2$, se obtiene

$$L(T) = \frac{a}{2} \int_0^{T^2} \frac{\sqrt{u+4}}{u+1} du.$$

Para calcular esta última integral se pone $v = \sqrt{u+4}$, de donde una vez hechos los cálculos

$$L(T) = a \left\{ -2 + \sqrt{T^2+4} + \frac{\sqrt{3}}{2} [\text{Log}(7+4\sqrt{3}) + \text{Log}(T^2+1) - \text{Log}(T^2+2\sqrt{3}\sqrt{T^2+4}+7)] \right\}$$

Cálculo en coordenadas polares o cilíndricas

a) Sea $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un sistema de referencia ortonormal del plano \mathcal{E}_2 . A cada par $(t \mapsto r(t), t \mapsto \theta(t))$ de funciones numéricas de clase C^1 en un intervalo $[a, b]$

de \mathbf{R} , haremos corresponder el arco γ de \mathcal{E}_2 , de clase C^1 , definido, en el sistema de referencia \mathcal{R} , por las ecuaciones paramétricas

$$x = r(t) \cos \theta(t), \quad y = r(t) \sin \theta(t)$$

y diremos simplemente que γ es el arco de \mathcal{E}_2 definido, en *coordenadas polares*, por las ecuaciones paramétricas

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t).$$

El punto $M = f(t)$, de parámetro t , está aquí definido por

$$\overrightarrow{OM} = r(t) \vec{u}[\theta(t)], \quad \text{con} \quad \vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta;$$

de donde

$$f'(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r'(t) \vec{u}[\theta(t)] + r(t) \theta'(t) \vec{v}[\theta(t)]$$

con $\vec{v}(\theta) = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta$.

Estas relaciones implican

$$\|f'(t)\|^2 = (r'(t))^2 + r^2(t) (\theta'(t))^2,$$

y la longitud de γ viene dada por

$$(2) \quad L(\gamma) = \int_a^b [r'^2(t) + r^2(t) \theta'^2(t)]^{1/2} dt,$$

o sea, simbólicamente:

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Se dice también que la métrica de \mathcal{E}_2 (en el sentido riemanoiano) está definida, en coordenadas polares, por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Ejemplo

En \mathcal{E}_2 , consideremos la *lemniscata de Bernoulli* definida, en coordenadas polares, por $r = a \cos 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Su longitud es

$$L = \int_0^{2\pi} (r'^2(\theta) + r^2(\theta))^{1/2} d\theta = a \int_0^{2\pi} (1 + 3 \sin^2 2\theta)^{1/2} d\theta.$$

El cálculo efectivo de esta integral exigiría el empleo de funciones elípticas.

b) Del mismo modo, sea $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_3 , sean r, θ, z tres funciones numéricas de clase C^1 en un intervalo $[a, b]$ de \mathbf{R} y, para todo $t \in [a, b]$, sea $M = f(t)$ el punto de coordenadas cilíndricas

$$(r(t), \theta(t), z(t))$$

en el sistema de referencia \mathcal{R} . El arco γ de clase C^1 definido por la parametrización $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$ se dirá definido, *en coordenadas cilíndricas*, por las ecuaciones paramétricas

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = z(t).$$

Mediante un cálculo análogo al anterior, se ve que la longitud de γ es

$$(2) \quad L(\gamma) = \int_a^b [r'^2(t) + r^2(t) \theta'^2(t) + z'^2(t)]^{1/2} dt,$$

o sea, simbólicamente

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}.$$

Cálculo en coordenadas esféricas

Finalmente, sean r, θ, φ tres funciones numéricas de clase C^1 en $[a, b]$ y, para todo $t \in [a, b]$, sea $M = f(t)$ el punto de coordenadas esféricas

$$(r(t), \theta(t), \varphi(t))$$

en el sistema de referencia $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (véase §II.5). El arco γ de clase C^1 definido por la parametrización f se dice definido, en *coordenadas esféricas*, por las ecuaciones paramétricas $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Vamos a ver que la longitud de γ viene dada por

$$(3) \quad L(\gamma) = \int_a^b [r'^2(t) + r^2(t) \theta'^2(t) + r^2(t) \varphi'^2(t) \sin^2 \theta(t)]^{1/2} dt,$$

o sea, simbólicamente

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}.$$

Demostración. Consideremos la aplicación $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $(r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ definida por

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

basta calcular las diferenciales dx , dy , dz y comprobar que la *forma cuadrática* $dx^2 + dy^2 + dz^2$ viene dada por

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

(en el lenguaje de la Geometría riemanniana, se traduce este hecho diciendo que la forma

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

es la *métrica* de \mathcal{E}_3 en coordenadas esféricas).

Para abreviar el cálculo, evitando el empleo de formas cuadráticas, designemos por Σ la aplicación de \mathbf{R}^3 en \mathcal{E}_3 que a la terna (r, θ, φ) asocia el punto $M = \Sigma(r, \theta, \varphi)$ de coordenadas esféricas r , θ , φ . El arco γ considerado viene entonces definido por la parametrización $f: t \mapsto \Sigma[r(t), \theta(t), \varphi(t)]$. Se tiene pues

$$f'(t) = r'(t) \Sigma_r' + \theta'(t) \Sigma_\theta' + \varphi'(t) \Sigma_\varphi',$$

estando tomadas las derivadas parciales de Σ en el punto $(r'(t), \theta'(t), \varphi'(t))$.

Resulta fácil ver que existe un sistema de referencia *ortonormal* $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ (que depende del punto $M = \Sigma(r, \theta, \varphi)$) tal que se tiene

$$d\Sigma(r, \theta, \varphi) = \vec{I} dr + \vec{J} r d\theta + \vec{K} r \sin\theta d\varphi$$

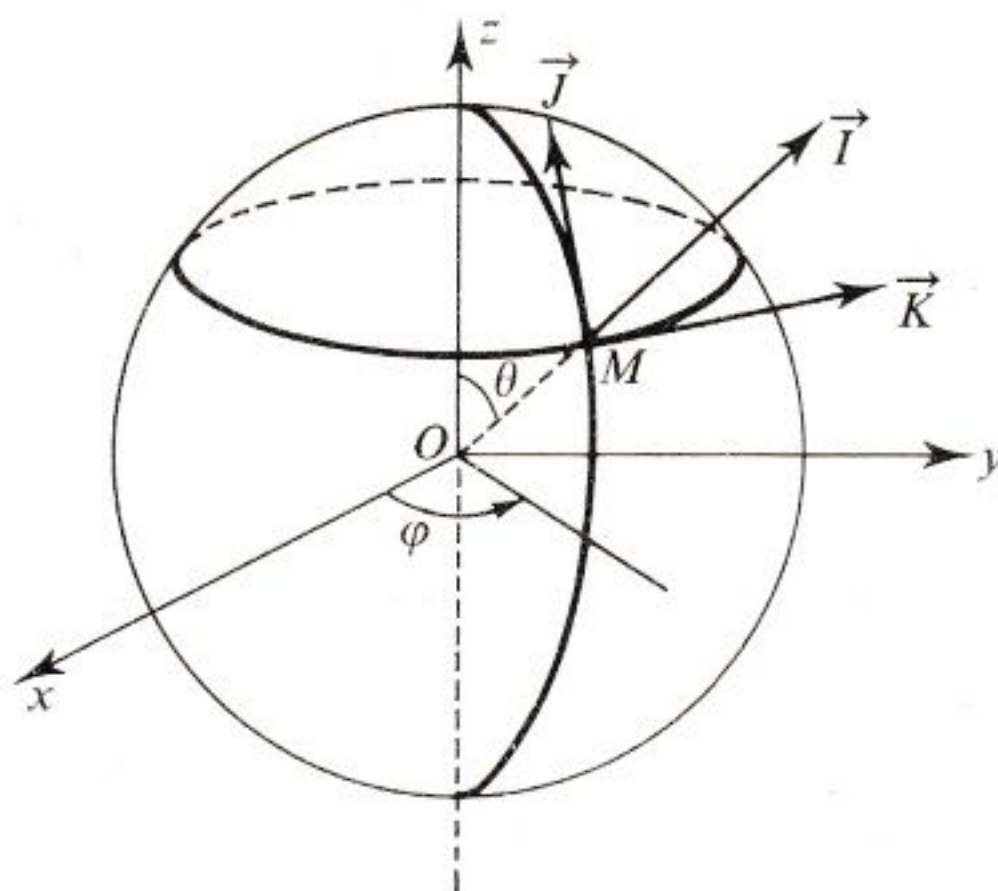


Figura 1.

(véase la figura 1); si M no pertenece a Oz , \vec{I} es colineal con \vec{OM} , \vec{J} es tangente en M al meridiano de M , y \vec{K} es tangente en M al paralelo de M). Se tiene pues

$$f'(t) = r'(t) \vec{I} + r\theta'(t) \vec{J} + r \sin\theta \varphi'(t) \vec{K}$$

de donde

$$\|f'(t)\|^2 = r'^2(t) + r^2 \theta'^2(t) + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2(t)$$

y finalmente la fórmula (3).

§ VI.3 PARÁMETROS NORMALES. CURVATURA. CONTACTO

A partir de ahora, consideremos únicamente arcos del espacio afín euclídeo \mathcal{E}_n ($n \geq 2$). Recordemos que la aplicación $E_n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \|x\|$ es de clase C^∞ ; es, en efecto, la compuesta de tres aplicaciones de clase C^∞ : la aplicación lineal $E_n \rightarrow E_n \times E_n$, $x \mapsto (x, x)$, la aplicación bilineal

$$E_n \times E_n \rightarrow \mathbf{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

y la aplicación $t \mapsto \sqrt{t}$ de \mathbf{R}_+^* en \mathbf{R} .

Definición VI.3.1

Sea γ un arco de clase C^1 . Se da el nombre de **parametrización normal** de γ a toda parametrización $f: I \rightarrow \mathcal{E}_n$ tal que, para todo $t \in I$, se tiene $\|f'(t)\| = 1$.

Es claro que la existencia de tal parametrización implica que γ es *regular*. Inversamente, vamos a ver que *todo arco regular admite parametrizaciones normales*.

Teorema VI.3.1

Sea $f: I \rightarrow \mathcal{E}_n$ una parametrización admisible cualquiera de un arco **regular** γ de clase C^k ($1 \leq k \leq +\infty$) y sea t_0 un punto cualquiera de I . Para todo $t \in I$, pongamos

$$(1) \quad s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \, du.$$

a) Entonces la función (1) define un **cambio de parámetro admisible** para γ , o sea haciéndolo explícito: (1) determina una biyección de clase C^k de I en un intervalo J , cuya inversa $\varphi: J \rightarrow I$ es también de clase C^k .

b) Para cada constante $s_0 \in \mathbf{R}$, las parametrizaciones

$$(i) \quad s \mapsto f \circ \varphi(s - s_0) \quad \text{y} \quad (ii) \quad s \mapsto f \circ \varphi(s_0 - s)$$

son parametrizaciones **normales** de γ .

c) Toda parametrización normal de γ es de la forma (i) o (ii) según que defina o no la misma orientación de γ que f .

Demostración. El aserto a) resulta del hecho de que, por hipótesis, la función f' no se anula en I y de que, en consecuencia, la función

$$t \mapsto \|f'(t)\|$$

es de clase C^k .

Para establecer b) pongamos $g = f \circ \varphi(s - s_0)$. Se tiene:

$$g'(s) = [f' \circ \varphi(s - s_0)] \varphi'(s - s_0) = \frac{f' \circ \varphi(s - s_0)}{\|f' \circ \varphi(s - s_0)\|}$$

de donde $\|g'(s)\| = 1$. Por lo tanto, g es una parametrización normal de γ . Del mismo modo se establecería que las parametrizaciones de la forma ii) son normales.

Inversamente, sea h una parametrización normal cualquiera de γ . Existe entonces un cambio de parámetro admisible θ tal que $h = g \circ \theta$, de donde, para todo valor del parámetro u ,

$$h'(u) = g'[\theta(u)] \theta'(u)$$

y, puesto que es $\|h'(u)\| = \|g'[\theta(u)]\| = 1$, se tiene $|\theta'(u)| = 1$.

Al ser continua la función θ' se tiene necesariamente $\theta'(u) = 1$ para todo u , o $\theta'(u) = -1$ para todo u .

Si h define la misma orientación de γ que f , se tiene $\theta'(u) = 1$, de donde $\theta(u) = u - s_0$, con $s_0 = \text{Cte}$, y $h(s) = g(s - s_0)$, y por lo tanto h es de la forma (1).

Si h define la orientación opuesta, se tiene $\theta'(u) = -1$, de donde $\theta(u) = s_0 - u$ con $s_0 = \text{Cte}$, y $h(s) = g(s_0 - s)$, y por lo tanto, h es de la forma ii).]

Observación: Supongamos que el arco γ sea simple y sea S su soporte. Del teorema VI.3.1 resulta de inmediato que existen exactamente *dos aplicaciones continuas* $\vec{v}: S \rightarrow E_n$ tales que, para todo $M \in S$, el vector $\vec{v}(M)$ sea *unitario y tangente* a γ en M .

Si g designa una parametrización normal cualquiera de γ , estas dos aplicaciones son $g' \circ g^{-1}$ y $-g' \circ g^{-1}$. Corresponden a la idea intuitiva de «vector unitario tangente a S variando continuamente».

Terminología

Si el arco γ es *simple*, y *orientado* en el sentido de las t crecientes, el número $s(t)$ definido por (1) recibe el nombre de **abscisa curvilínea** del punto $M = f(t)$, contada a partir del punto $M_0 = f(t_0)$ tomado como *origen*.

Por extensión, si g es una parametrización normal de un arco regular orientado, el punto $M = g(s)$ se dice que es *el punto de abscisa curvilínea s* (para la parametrización considerada).

Corolario

Todo arco **regular y orientado** de clase C^k ($k \geq 1$) admite una infinidad de parametrizaciones normales; si g designa una de ellas, las otras son todas las aplicaciones de la forma

$$s \mapsto g(s - s_0) \quad (s_0 = \text{Cte}).$$

En consecuencia, sea γ un arco **regular y orientado** de clase C^k ($k \geq 1$), definido por una parametrización normal g , y sea $M = g(s)$ un **punto simple** de γ , entonces, para $r = 1, 2, \dots, k$, el vector $g^{(r)}(s)$ depende solamente del punto M elegido y no de la parametrización g .

En efecto, si $h : s \mapsto g(s - s_0)$ es otra parametrización normal de γ se tiene:

$$M = h(s + s_0) \quad \text{y} \quad h^{(r)}(s + s_0) = g^{(r)}(s).$$

Se observará que si r es *par*, el vector $g^{(r)}(s)$ tampoco depende de la orientación de γ . Si r es *impar*, un cambio de orientación de γ hace cambiar este vector por su opuesto.

Estas observaciones nos van a permitir asociar a cada arco regular de \mathcal{E}_n *invariantes métricos* definidos con ayuda de parametrizaciones normales.

Observemos que se obtendrían resultados análogos para los arcos de clase D^k , suponiendo $k \geq 2$.

● Convenio importante

Es evidente que todo teorema válido para arcos de clase C^k sigue siendo válido para arcos de clase C^p ($p \geq k$) o D^p ($p \geq k + 1$); del mismo modo, todo teorema válido para arcos de clase D^k sigue siendo válido para arcos de clase D^p ($p \geq k$) o C^p ($p \geq k$).

Por ello, con el fin de aligerar la exposición, enunciaremos a partir de aquí los teoremas y resultados esenciales solamente con las hipótesis mínimas, dejando para el lector la tarea de deducir los resultados más generales.

Por ejemplo, en lugar de decir que «todo arco de clase C^k ($k \geq 1$) o D^k ($k \geq 2$) es rectificable», nos contentaremos con el enunciado: «todo arco de clase C^1 es rectificable».

Caso de parametrizaciones periódicas

En el teorema VI.3.1, supongamos que f sea una parametrización *periódica*, de período $T > 0$, cuya restricción a todo intervalo $[t_0, t_0 + T]$ sea inyectiva. Estableceremos el convenio de decir que tal parametrización define un arco *cerrado simple*.

Entonces la función s definida por (1) es periódica, de período

$$L = \int_{t_0}^{t_0+T} \|f'(u)\| \, du;$$

el número L así obtenido es *la longitud del arco simple* γ . Por lo tanto todas las parametrizaciones normales de γ son periódicas, de período L ; si g designa una

de ellas, el vector $g^{(r)}(s)$ ($1 \leq r \leq k$) sigue dependiendo solamente del punto $M=g(s)$ y de la orientación de γ .

Podemos pues extender a este caso las definiciones relativas a los arcos simples propiamente dichos.

Tangente. Normal principal. Curvatura

Sea γ un arco **regular orientado** de clase D^2 definido por una parametrización normal $g : I \rightarrow \mathcal{E}_n$, $s \mapsto g(s)$.

La función vectorial $\vec{\tau} : I \rightarrow \mathcal{E}_n$, $s \mapsto g'(s)$ recibirá el nombre de **función vector unitario tangente** a γ . Al igual que g , queda definida salvo una traslación del parámetro.

Si $M = g(s)$ es un punto simple de γ , el vector $\vec{\tau}(s)$ asociado depende solamente del punto M y no de la parametrización normal elegida g de γ . Este es el **vector unitario tangente** a γ en M .

Si se cambia la orientación de γ por su opuesta, este vector queda cambiado por su opuesto.

El hiperplano que pasa por M y es ortogonal al vector $\vec{\tau}(s)$ se dice que es **normal** a γ en M ; las rectas que pasan por M y son ortogonales a $\vec{\tau}(s)$ se dice que son **normales** a γ en M .

La función numérica ρ definida en I por $\rho(s) = \|g''(s)\|$ recibe el nombre de **función curvatura** de γ . Si $M = g(s)$ es un punto simple de γ , el número $\rho(s)$ asociado no depende de la parametrización normal elegida; se dice que es la **curvatura** de γ en el punto M .

Se observará que *la curvatura en el punto M es nula si, y solamente si, M es un punto de inflexión de γ .*

Si el arco γ no tiene punto de inflexión, la función vectorial

$$\vec{\nu} : s \mapsto \frac{g''(s)}{\rho(s)}$$

está definida en sobre todo I .

Esta función verifica $\|\vec{\nu}(s)\| = 1$; de la relación $\|g'(s)\|^2 = 1$ resulta por derivación $g'(s) \cdot g''(s) = 0$, o sea $\tau(s) \cdot \vec{\nu}(s) = 0$ para todo $s \in I$. La función vectorial $\vec{\nu}$ recibe el nombre de **función normal principal** a γ .

Se observará que *esta función no depende de la orientación de γ .*

Si $M = g(s)$ es un punto simple de γ , el vector $\vec{\nu}(s)$ asociado no depende ni de la orientación de γ ni de la parametrización normal elegida g ; la recta que pasa por M y de vector director $\vec{\nu}(s)$ recibe el nombre de normal principal a γ en M , y ésta es la única normal a γ contenida en el plano osculador a γ en M .

Siguiendo con la hipótesis de que M no es punto de inflexión, el número $R(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ recibe el nombre de **radio de curvatura** de γ en M ; el punto I definido por $\overrightarrow{MI} = R(s) \vec{v}(s)$ recibe el nombre de **centro de curvatura** de γ en M .

Se observará que el punto I es *independiente* de la orientación elegida en γ (ya que $\vec{v}(s)$ y $\rho(s)$ lo son). Daremos más adelante una caracterización geométrica de este punto.

Caso de una parametrización cualquiera

Sea $f: I \rightarrow \mathcal{E}_n$ una parametrización de clase D^2 que define un arco orientado γ , regular y sin punto de inflexión; se reduce al caso de una parametrización normal g haciendo un cambio de parámetro $t \mapsto s(t)$ tal que $ds/dt = \|f'(t)\|$. Mediante un cálculo fácil, se tiene entonces (puesto que $f(t) = g(s(t))$)

$$f'(t) = g'(s) \frac{ds}{dt}; \quad f''(t) = g'(s) \frac{d^2s}{dt^2} + g''(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

de donde, con las mismas notaciones de antes

$$(C) \quad f''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{t}(s) + \rho(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{v}(s).$$

Esta relación muestra que el vector «aceleración» $f''(t) = \frac{d^2 M}{dt^2}$ está contenido en el plano osculador de γ en el punto $M = f(t) = g(s)$; de un modo más preciso, este vector está contenido en el *semiplano* limitado por la tangente a γ en M y que contiene al vector \vec{v} . Este hecho se traduce diciendo que el vector aceleración $f''(t)$ está en la *concavidad* de γ . Estas observaciones son muy importantes en Cinemática (ver cap. X). Observemos aquí que si se tiene $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ (caso de un movimiento *uniforme*) la fórmula (C) se reduce a

$$f''(t) = \rho(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{v}(s).$$

Ejemplo

En el plano euclídeo \mathcal{E}_2 , referido a un sistema ortonormal, sea γ la *circunferencia orientada* de radio $a > 0$, definida por la parametrización

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t.$$

Un parámetro normal es $s = t/a$, y la circunferencia γ está descrita pues a la velocidad uniforme $a = ds/dt$. Se tiene aquí

$$\vec{\tau}(s) = \frac{1}{a} \frac{dM}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2M}{dt^2} = a^2 \rho(s) \vec{\nu}(s)$$

de donde

$$\rho(s) = \frac{1}{a^2} \left\| \frac{d^2M}{dt^2} \right\| = \frac{1}{a},$$

y las componentes de los vectores $\vec{\tau}, \vec{\nu}$ en el punto de parámetro t

$$\vec{\tau} \quad \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{vmatrix} \quad \vec{\nu} \quad \begin{vmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{vmatrix}.$$

El radio de curvatura de γ es pues igual a su radio a , el vector $\vec{\nu}$ es el vector unitario normal a γ dirigido hacia su centro, y el centro de curvatura de γ coincide con su centro (lo cual justifica la terminología).

Idénticos resultados se obtendrían para una circunferencia de \mathcal{E}_n . De un modo general, si el soporte de un arco γ de \mathcal{E}_n está contenido en una subvariedad afín \mathcal{V} , se obtienen los mismos invariantes al considerar γ como arco del espacio afín euclídeo \mathcal{V} .

En los §§ que siguen haremos un estudio más detallado de las funciones $\vec{\tau}, \rho, \vec{\nu}$, primero en el caso de curvas planas y después en el caso de curvas de \mathcal{E}_3 .

Observaremos antes que del estudio hecho en el § V.8 se deduce inmediatamente:

VI.3.2 Si γ es un arco regular de \mathcal{E}_n cuya función de curvatura es nula, entonces
 || el soporte de γ es un intervalo de recta.

Este resultado se puede deducir de la observación que sigue a la proposición V.8.1; pero también se obtiene inmediatamente teniendo en cuenta que si la función g'' es nula, g es afín.

Aplicaciones a la teoría del contacto

Vamos a ver que el orden exacto del contacto de dos arcos regulares queda inmediatamente determinado cuando se dan sus parametrizaciones normales.

Haremos antes la observación que sigue: si γ_1, γ_2 designan dos arcos simples regulares *tangentes* en el punto M_0 , se les puede orientar siempre de modo que tengan la misma *tangente orientada* en M_0 ; se deduce que admiten, respectivamente, parametrizaciones normales g_1, g_2 definidas en el entorno de 0 y que verifican $g_1(0) = g_2(0) = M_0, g'_1(0) = g'_2(0)$. (Se dice entonces que el punto M_0 ha sido tomado como *origen* en cada uno de los arcos.) Supondremos pues que estas condiciones se cumplen.

Teorema VI.3.3

Sean γ_1, γ_2 dos arcos simples regulares de clase k ($k \geq 2$) definidos mediante parametrizaciones normales g_1, g_2 que verifican

$$g_1(0) = g_2(0) = M_0 \quad \text{y} \quad g'_1(0) = g'_2(0)$$

(por lo tanto tangentes en M_0).

Para que γ_1 y γ_2 tengan en M_0 un contacto de orden $\geq p$ ($2 \leq p \leq k$), es necesario y suficiente que se tenga:

$$(1) \quad g_1^{(r)}(0) = g_2^{(r)}(0) \quad \text{para} \quad 2 \leq r \leq p.$$

En consecuencia, si k es suficientemente grande, el orden exacto del contacto de γ_1 y γ_2 es igual a $\omega - 1$, donde ω designa la valoración del desarrollo limitado (supuesto no nulo) de $g_1 - g_2$ hasta el orden k en el entorno del origen.

Si $k = +\infty$ y si se tiene $g_1^{(r)}(0) = g_2^{(r)}(0)$ para todo $r \geq 2$, entonces el contacto de γ_1 y γ_2 en M_0 es de orden infinito.

Demostración. Sean f_1, f_2 parametrizaciones cualesquiera de γ_1, γ_2 definidas en el entorno de 0 que verifican $f_1(0) = f_2(0) = M_0$. Basta con demostrar que para cada modo de elegir el par (f_1, f_2) y cada entero r que verifique $1 \leq r \leq k$, la relación

$$(2) \quad f_2(t) - f_1(t) = o(t^r)$$

implica

$$g_2(s) - g_1(s) = o(s^r);$$

ello probará, en efecto, que las relaciones:

$$(3) \quad f_1^{(r)}(0) = f_2^{(r)}(0) \quad (1 \leq r \leq p)$$

son equivalentes a las relaciones (1).

Vamos a referirnos para ello al teorema V.4.5 considerando los grafos de g_1, g_2 en el espacio afín $\mathbf{R} \times \mathcal{E}_n$ (asociado al espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R} \times E_n$).

a) Observemos en primer lugar que las relaciones (2) implican $f'_2(0) = f'_1(0)$. Cambiando si es preciso t por $-t$, podemos suponer que el vector (no nulo) $f'_2(0) = f'_1(0)$ es del mismo sentido que el vector $g'_2(0) = g'_1(0)$. Entonces, f_1 y f_2 definen respectivamente la misma orientación de γ_1 y γ_2 que g_1 y g_2 . Según el teorema VI.2.1 se tiene entonces $f_1 = g_1 \circ s_1$ y $f_2 = g_2 \circ s_2$ con,

$$s_1(t) = \int_0^t \|f'_1(t)\| dt, \quad s_2(t) = \int_0^t \|f'_2(t)\| dt.$$

para todo valor de t .

Ahora bien, las relaciones (2) implican

$$\|f'_2(t)\| - \|f'_1(t)\| = o(t^{r-1})$$

(ya que se tiene $|\|f'_2(t)\| - \|f'_1(t)\|| \leq \|f'_2(t) - f'_1(t)\|$ y $f'_2(t) - f'_1(t) = o(t^{r-1})$). De ello se deduce, por integración

$$(4) \quad s_2(t) - s_1(t) = o(t^r).$$

b) Designemos por Γ_1, Γ_2 los arcos de $\mathbf{R} \times \mathcal{E}_n$ definidos respectivamente por las parametrizaciones cartesianas

$$G_1 : s \mapsto (s, g_1(s)); \quad G_2 : s \mapsto (s, g_2(s)).$$

Son arcos de clase k , simples y regulares; el cambio de parámetro definido por $s = s_i(t)$ es admisible para $\Gamma_i (i = 1, 2)$. Los arcos Γ_1, Γ_2 admiten pues respectivamente las parametrizaciones

$$F_1 : t \mapsto (s_1(t), f_1(t)); \quad F_2 : t \mapsto (s_2(t), f_2(t)).$$

En esta forma, las relaciones (2) y (4) muestran que Γ_1 y Γ_2 tienen un contacto de orden $\geq r - 1$ en el punto $(0, M_0)$. Aplicando el teorema V. 4.5 a las parametrizaciones cartesianas G_1, G_2 , se ve que g_1, g_2 verifican

$$g_2(s) - g_1(s) = o(s^r);$$

de donde el resultado.]]

Corolario

Sean γ_1, γ_2 dos arcos simples, regulares y de clase D^2 de \mathcal{E}_n , y sea M_0 un punto común a estos dos arcos. Para que γ_1 y γ_2 sean osculadores en M_0 (es decir, para que su contacto en M_0 sea de orden ≥ 2), es necesario y suficiente que γ_1 y γ_2 sean tangentes en M_0 y que:

- o bien M_0 sea punto de inflexión para cada uno de ellos,
- o bien γ_1 y γ_2 tengan en M_0 la misma normal principal y la misma curvatura.

En particular, si γ es un arco simple regular y el punto I es el centro de curvatura correspondiente al punto M del arco, la circunferencia de centro I , que pasa por M y está contenido en el plano osculador a γ en M , es osculatriz a γ en M ⁽¹⁾, y es la única circunferencia osculatriz a γ en M .

(Esta circunferencia recibe el nombre de **circunferencia de curvatura** de γ en M , o de **circunferencia osculatriz** a γ en M .)

Demostración. Nos podemos limitar al caso en el que γ_1 y γ_2 son tangentes en M_0 ; podemos entonces elegir parametrizaciones normales g_1, g_2 de γ_1, γ_2 que verifiquen $g_1(0) = g_2(0) = M_0, g'_1(0) = g'_2(0)$. Para que γ_1 y γ_2 sean osculadores, es necesario y suficiente que se tenga $g''_1(0) = g''_2(0)$, lo cual se cumple si (y solamente si) se tiene: $g''_1(0) = g''_2(0) = 0$ (caso en que M_0 es punto de inflexión de γ_1 y γ_2) o si se tiene: $\rho_1(0) = \rho_2(0)$, con $\rho_i(0) = \|g''_i(0)\|$ y

$$\vec{v}_1(0) = \vec{v}_2(0), \quad \text{con} \quad \vec{v}_i(0) = \frac{g''_i(0)}{\rho_i(0)};$$

de donde el resultado.]]

Evolventes

Sea γ un arco orientado regular de clase k definido mediante una parametrización normal $g: I \rightarrow \mathcal{E}_n$. Para todo real s_0 fijo, el arco γ_1 , de clase $k-1$, definido por la parametrización

$$g: I \rightarrow \mathcal{E}_n, \quad s \mapsto g(s) - (s - s_0) \vec{\tau}(s)$$

recibe el nombre de **evolvente** de γ . En términos intuitivos es el «lugar» del punto P de la tangente a γ orientada, definido por $\overline{MP} = -(s - s_0)$ (donde $M = g(s)$).

⁽¹⁾ *N. del T.* Tiene con γ un contacto de orden ≥ 2 en M .

Si γ es de clase $k \geq 2$ se tiene:

$$g'_1(s) = g'(s) - \vec{\tau}(s) - (s - s_0) \vec{\tau}'(s) = - (s - s_0) \rho(s) \vec{v}(s).$$

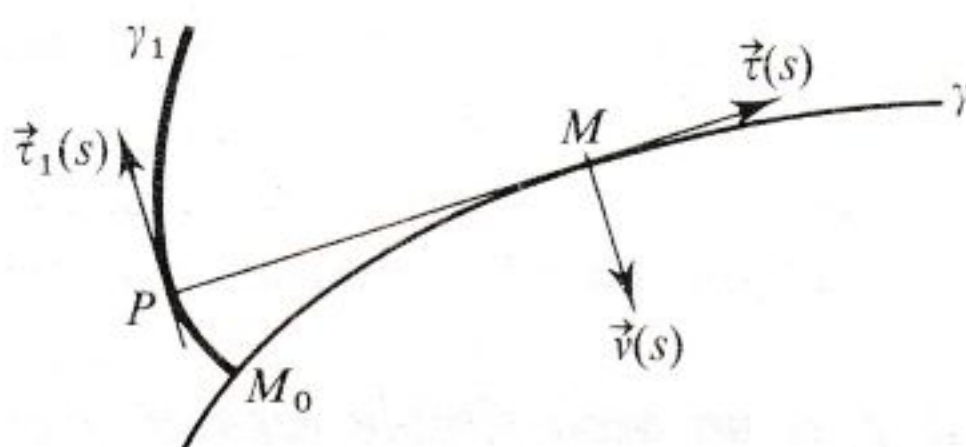


Figura 2.

Si se tiene $s \neq s_0$ y $\rho(s) \neq 0$, el vector unitario tangente a γ_1 en el punto $g_1(s)$ es pues $\vec{\tau}_1(s) = \pm \vec{v}(s)$, según el signo de $s - s_0$ (véase la figura 2).

El problema inverso (búsqueda de un arco del cual γ sea una evolvente) nos lleva al concepto de *evoluta* de un arco: Este problema se estudiará en el caso plano, en el § VII.5 (véase también ejercicio VI.4.1).

§ VI.4 CASO DE UN PLANO ORIENTADO. FÓRMULAS DE FRENET

En este § y en los que siguen, el plano euclídeo \mathcal{E}_2 se supondrá **orientado**, y vamos a precisar para los arcos de \mathcal{E}_2 , los conceptos generales anteriormente definidos en \mathcal{E}_n .

Sistema de referencia de Frenet

Sea γ un arco orientado y regular de \mathcal{E}_2 definido por una parametrización normal $g: I \rightarrow \mathcal{E}_2$, de clase C^1 .

Para todo $s \in I$, pongamos (como en el § 2)

(1)

$$\vec{\tau}(s) = g'(s);$$

y designemos por $\vec{\tau}_1(s)$ el vector deducido de $\vec{\tau}(s)$ por la rotación de $+\pi/2$. La función vectorial $\vec{\tau}_1$ será denominada *función normal orientada unitaria*. Si el punto $M = g(s)$ es un punto simple de γ el vector $\vec{\tau}_1(s)$ (que no depende de la g elegida) será llamado **vector normal a γ en M unitario y orientado** (véase la figura 3).

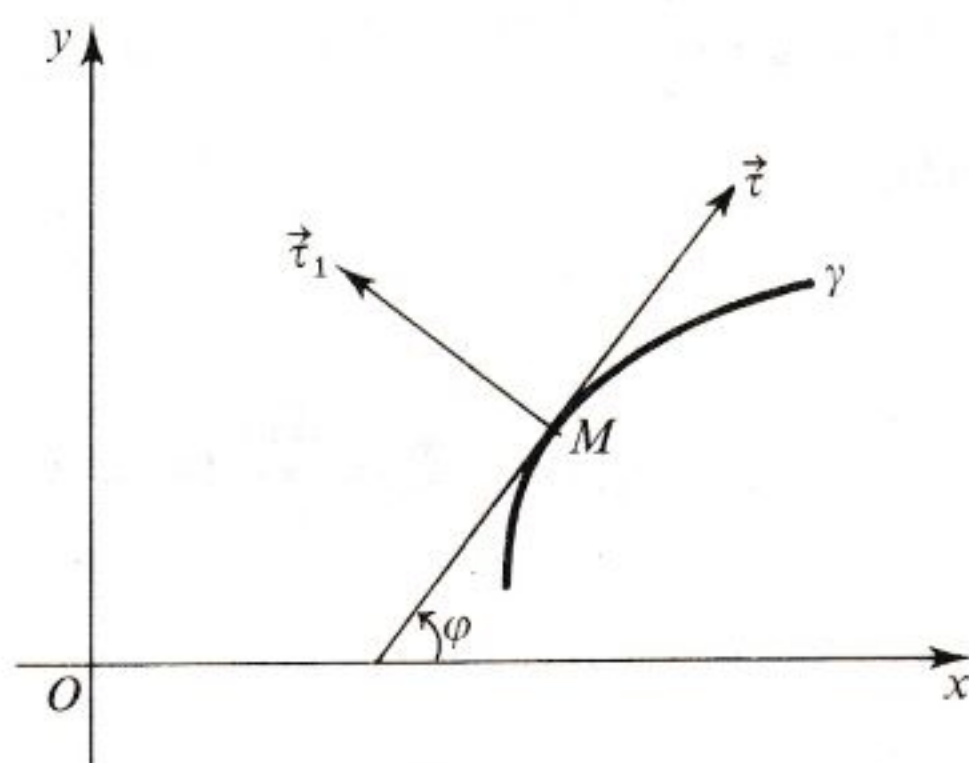


Figura 3.

Observemos que un cambio de orientación de γ cambia a la vez a $\vec{\tau}(s)$ y $\vec{\tau}_1(s)$ en sus opuestos.

Por el contrario, un cambio de orientación de \mathcal{E}_2 deja a $\vec{\tau}(s)$ inalterado y cambia a $\vec{\tau}_1(s)$ en $-\vec{\tau}_1(s)$.

Curvatura algebraica y fórmulas de Frenet

Supongamos ahora que γ sea de clase D^2 . Derivando la relación $\|\vec{\tau}(s)\| = 1$, se obtiene:

$$\vec{\tau}(s) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds}(s) = 0.$$

Existe pues una función escalar $\rho_1 : s \mapsto \rho_1(s)$, definida en I que verifica

$$(2) \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho_1 \vec{\tau}_1.$$

Por comparación con las definiciones dadas en la página 372, se ve que la función *curvatura* de γ es entonces la función $\rho : s \mapsto |\rho_1(s)|$.

La función ρ_1 será llamada **función curvatura algebraica** (u orientada) de γ . Si el punto $M = \gamma(s)$ es simple, el número $\rho_1(s)$ se llamará *curvatura algebraica* de γ en el punto M .

Se observará que un cambio de orientación de γ o de \mathcal{E}_2 cambia la curvatura algebraica ρ_1 por su opuesta (esto resulta inmediatamente del estudio de las funciones $\vec{\tau}$ y $\vec{\tau}_1$ y del hecho de que la derivada $d\vec{\tau}/ds$ permanece invariante en un cambio de orientación de γ).

Se observará por otra parte que la función *normal principal* $\vec{\nu}$ sólo está definida en I cuando γ no admite punto de inflexión, es decir cuando la función ρ_1 no se anula; en este caso, está definida por

$$(3) \quad \vec{v}(s) = \vec{\tau}_1(s) \quad \text{si } \rho_1(s) > 0; \quad \vec{v}(s) = -\vec{\tau}_1(s) \quad \text{si } \rho_1(s) < 0.$$

Al derivar la relación

$$\vec{\tau}(s) \cdot \vec{\tau}_1(s) = 0,$$

se obtiene

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}(s) \cdot \vec{\tau}_1(s) + \vec{\tau}(s) \cdot \frac{d\vec{\tau}_1}{ds}(s) = 0,$$

de donde, utilizando (1)

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = -\rho_1.$$

Por otra parte, al ser el vector $\vec{\tau}_1(s)$ unitario, se tiene

$$\vec{\tau}_1 \cdot \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = -\rho_1 \vec{\tau}.$$

Las relaciones

$$(4) \quad \boxed{\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho_1 \vec{\tau}_1 \quad \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = -\rho_1 \vec{\tau}}$$

reciben el nombre de **fórmulas de Frenet** para el arco plano γ .

Observemos que el **centro de curvatura** de γ en el punto $M = g(s)$ es el punto I definido por

$$\overrightarrow{MI} = \frac{\vec{v}(s)}{\rho(s)} \quad (\text{si } \rho(s) \neq 0).$$

Teniendo en cuenta las relaciones (2) y que $\rho(s) = |\rho_1(s)|$, se obtiene

$$(5) \quad \overrightarrow{MI} = \frac{\vec{\tau}_1(s)}{\rho_1(s)}.$$

El número $R(s) = 1/\rho_1(s)$ recibirá el nombre de *radio de curvatura algebraica* de γ en el punto M .

Observación: Si el arco γ es de clase C^2 y **sin punto de inflexión**, existe una *constante* ε , igual a $+1$ o a -1 , tal que $\rho_1(s) = \varepsilon\rho(s)$ para todo s .

Cálculo práctico de la curvatura

Teóricamente, para determinar la *función curvatura* ρ basta con buscar una parametrización normal g de γ y aplicar la fórmula

$$\rho(s) = \| g''(s) \| .$$

Pero en la práctica, no resulta siempre posible hacer explícito el parámetro normal utilizando funciones conocidas. En los ejemplos tratados en el § 3, hemos encontrado casos en que no conocíamos la primitiva de la función $s \mapsto \| g'(s) \|$; incluso cuando se conocía una primitiva de esta función (como en el caso del arco de cisoide estudiado en la página 364), el parámetro normal podía tener una expresión demasiado complicada como para ser utilizable. De hecho, es raro el caso en que existe interés en buscar efectivamente una parametrización normal; vamos a ver de qué manera se puede calcular la curvatura partiendo de una parametrización admisible cualquiera del arco considerado.

El cálculo se basará en la relación

$$(6) \quad \rho_1 = \left[\vec{\tau}, \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right] = [g'(s), g''(s)] ,$$

la cual se desprende inmediatamente de (1) y (4), ya que se tiene $[\vec{\tau}, \vec{\tau}_1] = 1$.

(Recordemos que la notación $[\vec{u}, \vec{v}]$ designa el *producto mixto* de dos vectores \vec{u}, \vec{v} de E_2 , véase la página 79.)

Sea entonces $f = g \circ s$ una parametrización admisible cualquiera de γ . Si, para simplificar, designamos por M el punto $g(s) = f(t)$, con $s = s(t)$, tenemos

$$(7) \quad \begin{aligned} f'(t) &= \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = g'(s) \frac{ds}{dt} \\ f''(t) &= \frac{d^2M}{dt^2} = g''(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + g'(s) \frac{d^2s}{dt^2} , \end{aligned}$$

de donde

$$[f'(t), f''(t)] = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 [g'(s), g''(s)] ,$$

o sea

$$(8) \quad \boxed{\rho_1(s) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-3} [f'(t), f''(t)]} .$$

Se escribe muchas veces la fórmula (8) en la forma

$$\boxed{\rho_1 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-3} \left[\frac{dM}{dt}, \frac{d^2M}{dt^2} \right]}$$

y se puede traducir esta relación diciendo que el «símbolo diferencial» $\left[\frac{dM}{dt}, \frac{d^2M}{dt^2} \right] dt^3$ es *invariante* en los cambios de parámetro admisibles sobre γ .

Se observará que la fórmula (7) proporciona las componentes del «vector aceleración» $f''(t) = d^2M/dt^2$ en la base $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ asociada al punto $f(t) = g(s)$, o sea:

$$f''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \rho_1 \vec{\tau}_1.$$

Este es un caso particular de la fórmula (C) del § 3.

Cálculo en coordenadas cartesianas

Designemos por $(x(t), y(t))$ las coordenadas de $f(t)$ en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 ; se tiene

$$\frac{ds}{dt} = [x'^2(t) + y'^2(t)]^{1/2}$$

y

$$[f'(t), f''(t)] = x'(t) y''(t) - y'(t) x''(t),$$

de donde, por aplicación de (8), la curvatura algebraica de γ en el punto $M = f(t)$ es

$$\rho_1 = \frac{x'(t) y''(t) - y'(t) x''(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}}.$$

Ejemplo

Tomemos como γ la parábola de \mathbf{R}^2 de ecuación $y = x^2/2p$, con $t = x$. La curvatura de γ en el punto $(x, x^2/2p)$ es

$$\rho = \frac{p^2}{(x^2 + p^2)^{3/2}}.$$

En particular el radio de curvatura de la parábola γ en su vértice es igual a su *parámetro* p .

Cálculo de ρ en coordenadas polares

Supongamos que el punto $M = f(t)$ esté definido mediante un sistema $(r(t), \theta(t))$ de coordenadas polares relativas a un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{E}_2 , siendo las funciones r y θ de clase $k \geq 2$.

Se tiene aquí (véase § 2)

$$\frac{ds}{dt} = (r'^2 + r^2 \theta'^2)^{1/2}.$$

Poniendo, como de costumbre,

$$\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta, \quad \vec{v}(\theta) = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta,$$

se tiene por otra parte

$$\frac{dM}{dt} = r' \vec{u}(\theta) + r\theta' \vec{v}(\theta), \quad \frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}(\theta), \quad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}(\theta)$$

de donde

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = (r'' - r\theta'^2) \vec{u}(\theta) + (r\theta'' + 2r'\theta') \vec{v}(\theta),$$

$$\left[\frac{dM}{dt}, \frac{d^2 M}{dt^2} \right] = r^2 \theta'^3 + rr' \theta'' - rr'' \theta' + 2r'^2 \theta'.$$

La curvatura algebraica en el punto $M = f(t)$ es pues

$$(9) \quad \boxed{\rho_1 = \frac{r^2 \theta'^3 + rr' \theta'' - rr'' \theta' + 2r'^2 \theta'}{(r'^2 + r^2 \theta'^2)^{3/2}}}.$$

Si se tiene $\theta(t) = t$ para todo t ⁽¹⁾, la fórmula (9) se reduce a

$$\rho_1 = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}.$$

⁽¹⁾ Señalemos que nos podemos limitar siempre a este caso, por medio de un cambio de parámetro admisible, cuando γ es un arco regular que no tiene ninguna tangente que pase por el origen.

En el caso en que la función $\theta \mapsto r(\theta)$ no se anule resulta cómodo poner $\varphi(\theta) = 1/r(\theta)$. Mediante un cálculo fácil se tiene entonces

$$\rho_1 = \frac{\varphi^3 \left(\varphi + \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \right)}{\left[\varphi^2 + \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}.$$

En este caso, los *puntos de inflexión* de γ son los que verifican

$$\varphi(\theta) + \varphi''(\theta) = 0.$$

§ VI.5 ESTUDIO LOCAL DE UN ARCO PLANO

Sea γ un arco simple regular de \mathcal{E}_2 , de clase D^3 , definido por una parametrización normal g .

Nos proponemos estudiar el comportamiento de γ en el entorno de un punto $M_0 = g(s_0)$. Por traslación del parámetro, nos referiremos al caso en el que $s_0 = 0$; elegiremos el sistema de referencia ortonormal directo $\mathcal{R}_0 = (M_0; \vec{i}, \vec{j})$ definido por $\vec{i} = \vec{\tau}(0) = g'(0)$, $\vec{j} = \vec{\tau}_1(0)$. Según la fórmula de Taylor hasta el orden 3 aplicada a g , se tiene

$$g(s) = s\vec{i} + \frac{s^2}{2} g''(0) + \frac{s^3}{6} g'''(0) + o(s^3),$$

con

$$g''(0) = \rho_1(0) \vec{j} \quad \text{et} \quad g'''(0) = \rho'_1(0) \vec{j} + \rho_1^2(0) \vec{i}$$

(ya que se tiene $g''' = \frac{d}{ds}(\rho_1 \vec{\tau}_1) = \rho'_1 \vec{\tau}_1 - \rho_1^2 \vec{\tau}$).

Las coordenadas $x(s)$, $y(s)$ del punto $M = g(s)$ en el sistema de referencia \mathcal{R} verifican, pues,

$$(1) \quad \begin{cases} x(s) = s - \frac{s^3}{6} \rho_1^2(0) + o(s^3) \\ y(s) = \frac{s^2}{2} \rho_1(0) + \frac{s^3}{6} \rho'_1(0) + o(s^3). \end{cases}$$

• Si $\rho_1(0) = 0$ (caso de un punto de inflexión) el arco γ atraviesa su tangente en el punto M_0 , salvo que se tenga $\rho'_1(0) = 0$ (caso en que γ es sobreosculador a su tangente).

• Si $\rho_1(0) \neq 0$ el arco γ queda, en el entorno de M_0 , del mismo lado de su tangente que su centro de curvatura Ω en M_0 .

Para precisar el comportamiento de γ designemos por Γ una circunferencia cualquiera tangente a γ en M_0 , definida por su parametrización normal

$$(2) \quad X(s) = a \sin\left(\frac{s}{a}\right), \quad Y(s) = a \left(1 - \cos \frac{s}{a}\right),$$

por lo tanto de radio igual a $|a|$. Se tiene:

$$(3) \quad \begin{cases} X(s) = s - \frac{s^3}{6a^2} + o(s^3) \\ Y(s) = \frac{s^2}{2a} + o(s^3) \end{cases}$$

Por comparación con (1) nos encontramos de nuevo con el hecho de que la curvatura algebraica de la circunferencia Γ es igual a $1/a$ y nos encontramos también de nuevo con el hecho de que Γ es oscultriz a γ si, y solamente si, se tiene

$$a = \frac{1}{\rho_1(0)} = R_1(0).$$

Suponiendo $a = 1/\rho_1(0)$, se tiene

$$x(s) - X(s) = o(s^3) \quad \text{y} \quad y(s) - Y(s) = \frac{s^3}{6} \rho'_1(0) + o(s^3):$$

• si $\rho'_1(0) \neq 0$, el signo de $y(s) - Y(s)$ cambia con el de s (es decir cuando M pasa por M_0), en este caso, el arco γ atraviesa su circunferencia oscultriz (véase la figura 4);

• si $\rho'_1(0) = 0$, no se pueden precisar las posiciones relativas de γ y Γ si no es utilizando desarrollos limitados de orden ≥ 3 . Pero las fórmulas (1) y (3) muestran que γ y Γ tienen un contacto de orden ≥ 3 .

En conclusión, para que la circunferencia oscultriz a γ en el punto $M_0 = g(s_0)$ sea sobreoscultriz a γ , es necesario y suficiente que la función curvatura $|\rho_1|$ tenga una derivada nula en el punto s_0 .

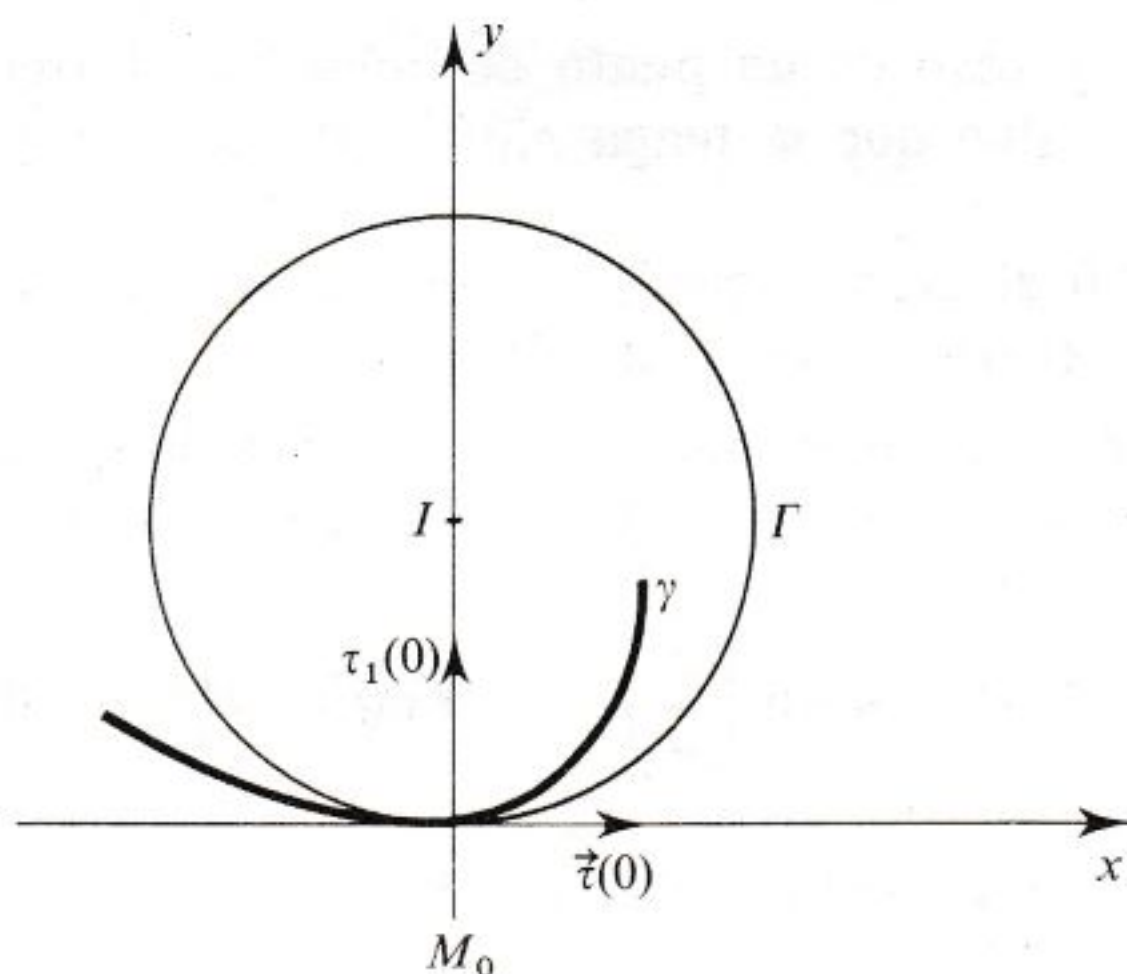


Figura 4.

Observación. Si el arco γ tiene un *eje de simetría* que pasa por M_0 , se ve fácilmente que este eje no puede ser otro que el eje M_0y . En este caso, el desarrollo limitado de $y(s)$ contiene solamente términos de exponente *par* y se tiene necesariamente $\rho_1'(0) = 0$.

La circunferencia osculatriz a un arco en un punto situado sobre un eje de simetría de este arco es necesariamente sobreosculatriz.

Por ejemplo, las circunferencias oscultrices a una cónica en sus vértices son sobreoscultrices a esta cónica.

Interpretación geométrica de la circunferencia de curvatura

Designemos por Γ_a la circunferencia definida por la parametrización (2), con $a \in \mathbf{R}$ cualquiera. Esta circunferencia admite la ecuación cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

Para que pase por el punto M de coordenadas $(x(t), y(t))$ de γ , es necesario y suficiente que se tenga $a = \lambda(t)$, con

$$\lambda(t) = \frac{x^2(t) + y^2(t)}{2y(t)} = \frac{x^2(t)}{2y(t)} + \frac{1}{2}y(t).$$

Según las relaciones (1) se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^2(t)}{2y(t)} = \frac{1}{\rho_1(0)}.$$

La circunferencia osculatriz a γ en M_0 aparece pues como el «límite» de la circunferencia $\Gamma_{\lambda(t)}$ cuando t tiende hacia 0 (pudiendo justificarse la palabra «límite» por la introducción de una topología adecuada en el conjunto de las circunferencias de \mathcal{E}_2).

De un modo más preciso, si nos reducimos a un subarco de γ , que pase por M_0 y sobre el cual la coordenada x sea un parámetro admisible, se puede enunciar:

Para todo $M \in \gamma$ y suficientemente próximo a M_0 , existe una circunferencia única γ_M tangente a γ en M_0 y que pasa por M ; la circunferencia osculatriz a γ en M_0 es el límite de γ_M cuando M tiende hacia M_0 en γ .

Puede resultar útil recordar que si γ es un arco geométrico regularmente inmerso tangente en el origen al primer eje de coordenadas, su curvatura geométrica en el origen es:

$$\rho = \lim_{x \rightarrow 0, (x, y) \in \gamma} \frac{x^2}{2y}.$$

Concavidad

Elegido de este modo el sistema de referencia, la coordenada x es un parámetro admisible en el entorno del punto M_0 . Existe pues un subarco de γ , que contiene a M_0 y que admite una ecuación cartesiana de la forma $y = \varphi(x)$, tal que $y(s) = \varphi(x(s))$. De las relaciones (1) se deduce (puesto que $x(s) \sim s$):

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} \rho_1(0) + o(x^3).$$

Se tiene pues, $\varphi''(0) = \rho_1(0)$; si M_0 no es punto de inflexión, $\varphi''(x)$ tiene el signo de $\rho_1(0)$ en el entorno del origen. De ahí se deduce la existencia de un subarco de γ que vuelve su concavidad hacia el lado de la tangente determinado por el centro de curvatura de I , y se dice, abreviadamente, que el centro de curvatura está en la concavidad de γ .

§ VI.6 FUNCIONES ANGULARES ASOCIADAS A UN ARCO PLANO

Sea γ un arco regular y orientado de \mathcal{E}_2 definido por una parametrización normal $g: I \rightarrow \mathcal{E}_2$ y sea $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un sistema de referencia ortonormal directo de \mathcal{E}_2 .

Para cada $s \in I$ el vector tangente $\vec{\tau}(s)$ puede ser definido mediante una parametrización cualquiera del ángulo orientado $(\vec{i}, \vec{\tau}(s))$. Pero no es evidente a priori que exista una función continua $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$ tal que, para todo $s \in I$, se tenga

$$(\vec{i}, \vec{\tau}(s)) = \varphi(s) \pmod{2\pi}.$$

Si designamos por $x(s)$, $y(s)$ las coordenadas de $\gamma(s)$ en el sistema de referencia \mathcal{R} , este problema se reduce a la determinación de una función numérica continua φ en I que verifique

$$(\forall s \in I) \quad \cos[\varphi(s)] = x'(s), \quad \sin[\varphi(s)] = y'(s),$$

o sea en forma compleja

$$(1) \quad (\forall s \in I) \quad e^{i\varphi(s)} = x'(s) + iy'(s).$$

En otros términos, tenemos que buscar una *determinación continua del logaritmo* de la función compleja

$$F : s \mapsto x'(s) + iy'(s);$$

problema que todavía no hemos tratado.

Empezaremos pues estableciendo el resultado general siguiente, que vamos a utilizar repetidamente (por ejemplo, para el estudio de los arcos planos en coordenadas polares).

Levantamiento de una aplicación continua del módulo 1 ⁽¹⁾

Teorema VI.6.1

Sea I un intervalo no vacío de \mathbf{R} y $F : I \rightarrow \mathbf{C}$ una función compleja continua en I que verifica

$$(1) \quad (\forall t \in I) \quad |F(t)| = 1.$$

i) Entonces existe una **función numérica continua** $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ que verifica

$$(2) \quad (\forall t \in I) \quad \exp[i\varphi(t)] = F(t).$$

ii) Para que otra función numérica continua $\psi : I \rightarrow \mathbf{R}$ verifique $F(t) = \exp[i\psi(t)]$ para todo $t \in I$, es necesario y suficiente que exista una **constante** $k \in \mathbf{Z}$, tal que se tenga $\psi(t) = \varphi(t) + 2k\pi$ para todo $t \in I$.

⁽¹⁾ Este teorema es un caso particular de un resultado general relativo a espacios fibrados.

|| iii) Si F es de clase C^1 por lo menos, toda función numérica continua φ que verifique (2) es de la misma clase que F y verifica $i\varphi' = F'/F$.

Demostración. Si J es un subintervalo cualquiera de I , diremos para abreviar, que la función numérica $\psi : J \rightarrow \mathbf{R}$ es un **levantamiento** de F sobre J , si ψ es continua y verifica para todo $t \in J$: $\exp[\psi(t)] = F(t)$.

a) Establezcamos en primer lugar el enunciado ii). Primeramente, si φ es una función numérica continua en I que verifica (2), resulta evidente que la función continua

$$\varphi_k : t \mapsto \varphi(t) + 2k\pi, \text{ donde } k \in \mathbf{Z} (k = \text{Cte}) \text{ verifica también (2).}$$

Inversamente, sean φ y ψ dos levantamientos de f sobre I . Se tiene:

$$(\forall t \in I) \quad \exp(i[\psi(t) - \varphi(t)]) = 1, \text{ de donde } \psi(t) - \varphi(t) \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

La función $\frac{1}{2\pi}(\psi - \varphi)$ es continua en el conjunto conexo I y sus valores están en \mathbf{Z} : Es pues *constante* (véase tomo 2, prop. III.11.2).

b) Estudiemos primeramente el caso elemental en que F es (por lo menos) de clase C^1 , lo cual equivale a establecer primero el enunciado iii).

En este caso, es fácil ver que se obtiene un levantamiento φ de F sobre I poniendo

$$(3) \quad (\forall t \in I) \quad \varphi(t) = \varphi_0 - i \int_{t_0}^t \frac{F'(u)}{F(u)} du,$$

designando por t_0 un punto cualquiera de I y por φ_0 un real cualquiera que verifique $e^{i\varphi_0} = F(t_0)$.

Se tiene en efecto (por ser F'/F continua):

$$\varphi' = -i \frac{F'}{F},$$

de donde

$$\frac{d}{dt} (F(t) e^{-i\varphi(t)}) = F'(t) e^{-i\varphi(t)} - F'(t) e^{-i\varphi(t)} = 0$$

y

$$F(t) e^{-i\varphi(t)} = \text{Cte} = F(t_0) e^{-i\varphi(t_0)} = 1.$$

Finalmente, si F es de clase C^k ($k \geq 1$) [resp. D^k ($k \geq 2$)], la relación $\varphi' = -iF'/F$ muestra que φ es también de clase C^k ($k \geq 1$) [resp. D^k ($k \geq 2$)].

c) Queda por demostrar la existencia de un levantamiento de F en el caso en que esta función solamente se supone continua.

Para ello, supongamos primero que I es compacto, o sea $I = [a, b]$, y designemos por E el conjunto de los puntos $t \in [a, b]$ tales que F admite un levantamiento sobre $[a, t]$. El conjunto E es acotado y no vacío (puesto que contiene a a); admite pues una cota superior c .

Vamos a establecer que $c = b$ y que $c \in E$, lo cual demostrará también que F admite un levantamiento sobre I .

Al ser la función F uniformemente continua en I , existe $\alpha > 0$ tal que

$$(\forall t \in I, \forall t' \in I), (|t - t'| \leq \alpha) \Rightarrow (|F(t) - F(t')| \leq \frac{1}{2}).$$

I) Demostremos que sobre todo intervalo J de la forma $I \cap [u, u + \alpha]$ (donde $u \in \mathbf{R}$), F admite un levantamiento.

En efecto, supongamos que J es no vacío, y sea $t_0 \in J$. Para todo $t \in J$, se tiene:

$$(4) \quad \left| \frac{F(t)}{F(t_0)} - 1 \right| = |F(t) - F(t_0)| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

La *determinación principal* del logaritmo de $F(t)/F(t_0)$ existe pues para todo $t \in J$. La función φ definida en J por

$$(\forall t \in J) \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) - i \operatorname{Log} \frac{F(t)}{F(t_0)}$$

es entonces un levantamiento de F sobre J . Es claro que si F es derivable, también φ lo es.

II) Según I) se tiene: $c > a$. Siempre según I), la función F admite un levantamiento φ_2 sobre el intervalo $J = I \cap \left[c - \frac{\alpha}{2}, c + \frac{\alpha}{2} \right]$. Sea $t_0 \in J$ tal que $a < t_0 < c$. Por definición de c , existe un levantamiento φ_1 de F sobre $[a, t_0]$. Sea k el entero relativo tal que $\varphi_2(t_0) = \varphi_1(t_0) + 2k\pi$. Según ii), las restricciones de φ_1 y φ_2 a $J \cap [a, t_0]$ son iguales. Pongamos entonces $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ si $t \in [a, t_0]$ y $\varphi(t) = \varphi_2(t) - 2k\pi$ si $t \in J$. Queda claro que φ es un levantamiento de F sobre el intervalo $[a, t_0] \cup J$.

De ahí se deduce en primer lugar que $c \in E$ (ya que $c \in [a, t_0] \cup J$). Después se ve por reducción al absurdo que $c = b$. Ya que, si se tuviera $c < b$, el intervalo $[a, t_0] \cup J$ contendría un real $> c$, lo cual estaría en contradicción con la definición de c . Con esto quedan pues establecidos nuestros enunciados.

d) Si I no es compacto, tomemos un punto cualquiera $t_0 \in I$ y un real φ_0 tal que $e^{i\varphi_0} = F(t_0)$. Para todo subintervalo compacto J de I que contiene t_0 , existe (según a) y c)) un levantamiento único de F sobre J que verifica $\varphi_J(t_0) = \varphi_0$; si J_1, J_2 son dos intervalos con esta propiedad se tiene $\varphi_{J_1} = \varphi_{J_2}$ sobre $J_1 \cap J_2$.

Para cada $t \in I$, existe un subintervalo compacto J de I que contiene t y t_0 y el valor de $\varphi_J(t)$ no depende del J elegido. Si se designa este valor por $\varphi(t)$, la función φ así definida en I es un levantamiento de F .

Ángulo de la tangente a un arco con eje fijo

Volviendo al problema planteado al principio de este §, podemos ahora enunciar

VI.6.2 Sea γ un arco regular orientado de clase C^k ($k \geq 1$) o D^k ($k \geq 2$) de \mathcal{E}_2 definido por una parametrización normal $g: I \rightarrow \mathcal{E}_2$; y sea (\vec{i}, \vec{j}) una base ortonormal directa de E_2 . Existe entonces una función numérica φ , única mod (2π) , en I y tal que para todo $s \in I$ se tiene:

$$(5) \quad \vec{\tau}(s) = \vec{i} \cos(\varphi(s)) + \vec{j} \sin(\varphi(s)),$$

lo cual equivale a

$$(6) \quad (\vec{i}, \vec{\tau}(s)) = \varphi(s) \pmod{2\pi};$$

además, la función es de clase C^{k-1} (resp. D^{k-1}).

Demostración. Tomemos un origen O cualquiera y designemos por $x(s)$, $y(s)$ las coordenadas de $g(s)$ en el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Basta aplicar el teorema VI.6.1 a la función $s \mapsto F(s) = x'(s) + iy'(s)$.

Se observará que la relación (5) equivale al sistema

$$(7) \quad \frac{dx}{ds} = \cos[\varphi(s)], \quad \frac{dy}{ds} = \sin[\varphi(s)].$$

Cuando el arco γ está definido por una parametrización cualquiera f , de coordenadas x, y , el sistema (7) sigue siendo válido a condición de escribirlo en la forma diferencial

$$\boxed{dx = \cos \varphi \, ds, \quad dy = \sin \varphi \, ds}.$$

Esta función φ queda definida salvo un múltiplo (constante) de 2π . Diremos que es la **función angular** asociada a γ (y al sistema de referencia considerado). Diremos también que es una **determinación continua del ángulo de la tangente a γ con el eje Ox** .

Si se sustituye la base (\vec{i}, \vec{j}) por otra base ortonormal directa (\vec{i}_1, \vec{j}_1) de E_2 , la función φ queda cambiada por la función $\varphi_1: s \mapsto \varphi(s) - \alpha$, designando por α una determinación del ángulo (\vec{i}_1, \vec{j}_1) .

Expresión de la curvatura

Si γ es de clase $k \geq 2$, la función φ es derivable y verifica

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho_1 \vec{\tau}_1 = -\vec{i}\varphi' \operatorname{sen} \varphi + \vec{j}\varphi' \cos \varphi,$$

con $\vec{\tau}_1 = -\vec{i} \operatorname{sen} \varphi + \vec{j} \cos \varphi$; de donde:

$$(8) \quad \boxed{(\forall s \in I) \quad \rho_1(s) = \varphi'(s)}.$$

Resulta cómodo escribir la relación (8) en la forma diferencial

$$\boxed{d\varphi = \rho_1 ds}.$$

De ello se deduce:

VI.6.3 *Sea γ un arco regular orientado de clase k de \mathcal{E}_2 definido por una parametrización normal g de clase $k+1$. Para que la **función angular** asociada φ defina un cambio de parámetro admisible en γ es necesario y suficiente que γ **carezca de punto de inflexión**.*

En efecto, si g es de clase $k+1$, φ es de clase k y define un cambio de parámetro admisible si (y solamente si) su derivada no se anula.]]

Caso de un arco definido en coordenadas polares

Mantengamos las notaciones de VI.6.2 y supongamos que γ esté definido en *coordenadas* polares, respecto al sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$ por las ecuaciones paramétricas normales

$$r = r(s), \quad \theta = \theta(s),$$

siendo las funciones r y θ de clase k en I .

Poniendo como siempre

$$\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \operatorname{sen} \theta, \quad \vec{v}(\theta) = -\vec{i} \operatorname{sen} \theta + \vec{j} \cos \theta,$$

se tiene

$$\vec{\tau}(s) = r'(s) \vec{u}(\theta(s)) + r(s) \theta'(s) \vec{v}(\theta(s)).$$

Por otra parte, la relación de Chasles $(\vec{i}, \vec{\tau}) = (\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{\tau})$ muestra que el número $V(s) = \varphi(s) - \theta(s)$ es una determinación del ángulo $(\vec{u}(\theta(s)), \vec{\tau}(s))$. Se tiene pues

$$\cos V(s) = r'(s) \quad \text{y} \quad \sin V(s) = r(s) \theta'(s)$$

de donde

$$\operatorname{tg}(V(s)) = \frac{r(s) \theta'(s)}{r'(s)}.$$

Pondremos estas fórmulas en forma diferencial, o sea

$$\boxed{dr = \cos V \, ds, \quad r \, d\theta = \sin V \, ds}$$

$$\boxed{r \, d\theta = dr \operatorname{tg} V} \quad ;$$

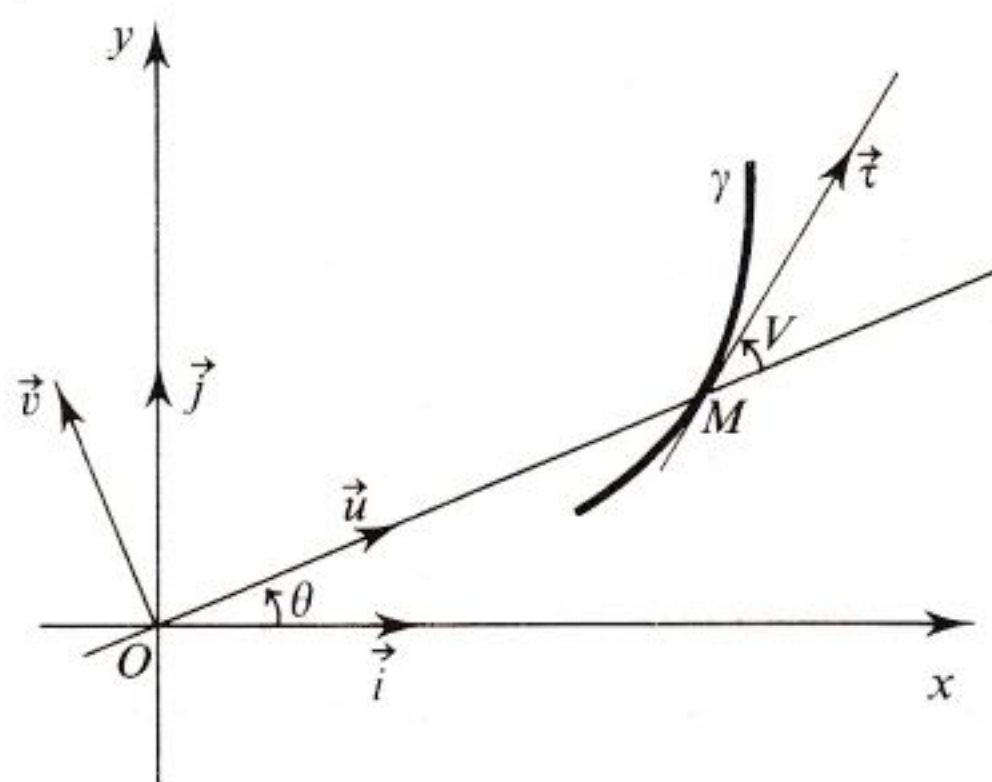


Figura 5.

y en esta forma siguen siendo válidas para una parametrización polar cualquiera.

Ejemplos

1. Sea γ el arco de clase C^∞ de \mathcal{E}_2 definido por las ecuaciones paramétricas

$$(9) \quad x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Se tiene

$$dx = (1 + \cos t) \, dt, \quad dy = \operatorname{sen} t \, dt,$$

de donde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2(1 + \cos t) dt^2 = 4 \cos^2 \frac{t}{2} dt^2;$$

orientando γ en el sentido de las t crecientes, se obtiene

$$ds = 2 \cos \frac{t}{2} dt \quad \left(\text{ya que se tiene } \cos \frac{t}{2} \geq 0 \right)$$

y, para $|t| < \pi$

$$\cos \varphi = \frac{dx}{ds} = \cos \frac{t}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{dy}{ds} = \sin \frac{t}{2}.$$

Se obtiene pues una determinación continua del ángulo de la tangente a γ con el eje Ox poniendo

$$\varphi(t) = \frac{t}{2};$$

la curvatura geométrica de γ en el punto de parámetro t es

$$\rho_1(t) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{4 \cos \frac{t}{2}}.$$

Designemos por I el centro de curvatura de γ en el punto M de parámetro t . Se tiene

$$\overrightarrow{MI} = \frac{\vec{\tau}_1(t)}{\rho_1(t)},$$

donde $\vec{\tau}_1(t)$ designa el vector normal orientado definido por

$$(\vec{i}, \vec{\tau}_1(t)) = \frac{\pi}{2} + \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{t}{2};$$

de donde las coordenadas del centro de curvatura I son

$$\begin{aligned} x_I &= t + \sin t + 4 \cos \frac{t}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2} \right) = t - \sin t \\ y_I &= 1 - \cos t + 4 \cos \frac{t}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2} \right) = 1 + \cos t \end{aligned}$$

Se observará que no hemos tenido necesidad de poner el parámetro normal en forma explícita; un cálculo sencillo proporciona aquí

$$s(t) = \operatorname{sen} \frac{t}{2} + \text{Cte}.$$

El arco γ definido por (9) es un *arco de cicloide* (véase ejercicio VII.22). Los puntos $(-\pi, 2)$ y $(\pi, 2)$ obtenidos respectivamente para $t = -\pi$ y $t = \pi$ son puntos estacionarios de γ .

2. Sea \mathcal{L} el arco de lemniscata definido en coordenadas polares por la ecuación

$$r = \sqrt{\cos 2\theta} \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

Se tiene aquí

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = \frac{d\theta^2}{\cos 2\theta},$$

de donde, orientando \mathcal{L} en el sentido de las θ crecientes

$$ds = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \cos V = \frac{dr}{ds} = -\operatorname{sen} 2\theta, \quad \operatorname{sen} V = \frac{r d\theta}{ds} = \cos 2\theta.$$

Una determinación continua del ángulo del vector tangente $\vec{\tau}$ con el radio vector es pues

$$V(\theta) = \frac{\pi}{2} + 2\theta.$$

De ahí se deduce una determinación continua del ángulo $\varphi = (\vec{i}, \vec{\tau})$

$$\varphi(\theta) = \theta + V(\theta) = \frac{\pi}{2} + 3\theta.$$

La curvatura algebraica es pues

$$\rho_1 = \frac{d\varphi}{ds} = 3 \frac{d\theta}{ds} = 3 \sqrt{\cos 2\theta};$$

de donde, mediante un cálculo fácil, las coordenadas (x_I, y_I) del centro de curvatura resultan ser

$$\begin{cases} x_I = r \cos \theta - \frac{\sin \varphi}{\rho_1} = \frac{2 \cos^3 \theta}{3 \sqrt{\cos 2 \theta}} \\ y_I = r \sin \theta + \frac{\cos \varphi}{\rho_1} = \frac{-2 \sin^3 \theta}{3 \sqrt{\cos 2 \theta}} \end{cases}$$

§ VI.7 ECUACIONES INTRÍNSECAS DE UN ARCO PLANO

Volvamos a las notaciones del § 4 y sea γ un arco plano orientado definido por una parametrización normal $g : I \rightarrow \mathcal{E}_2$.

Al dar la **función curvatura orientada** $\rho_1 : I \rightarrow \mathbf{R}$ se tiene lo que se llama una **ecuación intrínseca algebraica** de γ .

Según el estudio hecho en el § 4 la ecuación intrínseca algebraica de un arco regular queda definida salvo una traslación de la variable.

Vamos a ver que el arco γ queda determinado *salvo un desplazamiento* cuando se da una ecuación intrínseca algebraica.

Determinación de un arco mediante una ecuación intrínseca

Teorema VI.7.1

Sea $\rho_1 : I \rightarrow \mathbf{R}$ una función numérica continua en un intervalo I de \mathbf{R} . Entonces:

- Existe una parametrización normal $g : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ que define un arco regular orientado γ de clase C^k , tal que ρ_1 es la **función curvatura orientada** asociada a g .
- Los arcos regulares de clase C^k que tienen a ρ_1 como **ecuación intrínseca algebraica** son todos los arcos que se deducen de γ por un **desplazamiento** cualquiera de \mathcal{E}_2 .
- Finalmente, si ρ_1 es de clase $k \geq 2$, γ es de clase $k + 2$.

Demostración. Sea $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un sistema de referencia ortonormal director de \mathcal{E}_2 y sea s_0 un punto fijo de I .

a) Supongamos en primer lugar que existe una parametrización normal g que satisface las condiciones impuestas y sean $(x(s), y(s))$ las coordenadas de $g(s)$ en el sistema de referencia \mathcal{R} . Se tiene entonces (designando por φ una determinación continua del ángulo orientado de \vec{i} con $\vec{\tau}$):

$$g'(s) = \vec{i} \cos \varphi(s) + \vec{j} \sin \varphi(s) \quad \text{y} \quad \varphi'(s) = \rho_1(s),$$

de donde

(1)

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \varphi_0 + \int_{s_0}^s \rho_1(u) du \\ x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos \varphi(u) du, \quad y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin \varphi(u) du \end{aligned}$$

con

$$\varphi_0 = \varphi(s_0) = (\vec{i}, g'(s_0)) \pmod{2\pi},$$

y designando por (x_0, y_0) las coordenadas del punto $M_0 = g(s_0)$.

b) Inversamente, si los números φ_0, x_0, y_0 se fijan arbitrariamente, las fórmulas (1) definen primeramente una función φ , de clase C^1 en I , y después dos funciones x, y , de clase C^2 en I . La parametrización

$$g : s \mapsto O + \vec{i} x(s) + \vec{j} y(s)$$

es de clase C^2 en I y verifica

$$g'(s) = \vec{i} x'(s) + \vec{j} y'(s) = \vec{i} \cos \varphi(s) + \vec{j} \sin \varphi(s).$$

Esta parametrización es pues normal y define un arco orientado y regular γ de clase C^2 . Finalmente se tiene

$$(\vec{i}, g'(s)) = \varphi(s) \pmod{2\pi}$$

y la relación $\varphi'(s) = \rho_1(s)$ (que se desprende de la primera de las relaciones (1)) muestra que ρ_1 es la función curvatura orientada de γ .

Todos los arcos definidos por las relaciones (1) tienen pues a ρ_1 como ecuación intrínseca y no existe ningún otro.

Se observará que el arco $\gamma(\varphi_0, x_0, y_0)$ definido por las relaciones (1) tiene al eje de ángulo polar φ_0 como tangente orientada en el punto M_0 de coordenadas (x_0, y_0) .

c) Designemos entonces por $\gamma_0 = \gamma(0, 0, 0)$ el arco obtenido tomando

$$\varphi_0 = x_0 = y_0 = 0 :$$

se ve fácilmente que el arco $\gamma(\varphi_0, x_0, y_0)$ se deduce de γ_0 por la rotación de centro O y de ángulo φ_0 seguida de la traslación de vector $\overrightarrow{OM_0} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$. En efecto, si se designa por (\vec{I}, \vec{J}) la base de E_2 deducida de (\vec{i}, \vec{j}) por la rotación de ángulo φ_0 , el arco $\gamma(\varphi_0, x_0, y_0)$ tiene las mismas ecuaciones paramétricas en el sistema de referencia $(M_0; \vec{I}, \vec{J})$ que el arco γ_0 en el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Esto prueba claramente que $\gamma(\varphi_0, x_0, y_0)$ se deduce de γ_0 por el desplazamiento que lleva el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sobre el sistema de referencia $(M_0; \vec{I}, \vec{J})$.

Haciendo variar arbitrariamente φ_0, x_0, y_0 , en \mathbf{R} , se obtienen de este modo todos los arcos deducidos de γ_0 por un desplazamiento de \mathcal{E}_2 . Finalmente, si ρ_1 es de clase C^k [resp. D^k] con $k \geq 2$, se ve que la función φ es de clase C^{k+1} [resp. D^{k+1}] y que las funciones x, y son de clase C^{k+2} [resp. D^{k+2}].

Observación. Se ve inmediatamente que los arcos que admiten a $-\rho_1$ como función de curvatura orientada se deducen de los anteriores por una *isometría indirecta* de E_2 .

De ahí se deduce que el conjunto de los arcos orientados que tienen como función de curvatura orientada a una de las funciones ρ_1 y $-\rho_1$ se deducen de uno de ellos mediante una *isometría cualquiera* de E_2 .

No ocurriría lo mismo si se diera solamente la función curvatura (aritmética) $\rho : s \mapsto |\rho_1(s)|$ salvo si se supone que ésta no se anula.

Por ejemplo, los arcos γ_1, γ_2 de ecuaciones cartesianas respectivas

$$y = x^3, \quad y = |x|^3$$

son de clase C^2 y tienen la misma función curvatura aritmética: (estando definido en cada uno de ellos un parámetro normal por

$$s(x) = \int_0^x (1 + 9u^4)^{1/2} du.)$$

Sin embargo, no existe ninguna isometría que transforme γ_1 en γ_2 (dibújese una figura).

Si la función ρ no se anula y si los arcos considerados son de clase C^2 , la continuidad de la función ρ_1 exige que se cumpla una de las relaciones

$$\rho_1(s) = \rho(s), \quad \rho_1(s) = -\rho(s)$$

para todo $s \in I$; de donde se deduce:

Un arco plano regular de clase C^2 y sin punto de inflexión queda determinado salvo una isometría cuando se da su función de curvatura (no orientada). Hay que relacionar este resultado con el que obtendremos en \mathcal{E}_3 .

Cálculo práctico

Se observará que las ecuaciones (1) reducen a tres cuadraturas ⁽¹⁾ la búsqueda de un arco de ecuación intrínseca dada.

Resulta a veces cómodo utilizar funciones complejas de la variable s y tomar como incógnita la función

$$z : s \mapsto z(s) = x(s) + iy(s)$$

(lo que equivale a identificar \mathcal{C}_2 con \mathbf{C}). Poniendo $z_0 = x_0 + iy_0$, se tiene entonces

$$(2) \quad z(s) = z_0 + \int_{s_0}^s e^{i\varphi(u)} du, \quad \text{con} \quad \varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^s \rho_1(u) du.$$

Ejemplos

1. Hallar los arcos de curvatura constante k .

Las ecuaciones (2) proporcionan

$$\varphi(s) = \varphi_0 + k(s - s_0)$$

y

- si $k \neq 0$

$$z(s) = z_0 - \frac{i}{k} e^{i\varphi_0} e^{ik(s-s_0)};$$

- si $k = 0$

$$z(s) = z_0 + (s - s_0) e^{i\varphi_0}.$$

Si $k \neq 0$ se obtienen todas las *circunferencias* de radio $1/k$; para $k = 0$, se obtienen todas las *rectas* del plano.

2. Hallar los arcos de ecuación intrínseca $\rho_1(s) = k/s$ ($k \neq 0, s > 0$).

Apliquemos las fórmulas (2) limitándonos a escribir integrales «indefinidas» y tomando sobre la marcha las constantes de integración de la manera más cómoda (puesto que un cambio de constantes de integración equivale a un movimiento). Se obtiene

$$\varphi(s) = \int k \frac{ds}{s},$$

⁽¹⁾ Para abreviar se denomina «cuadratura» el cálculo de una primitiva.

lo cual nos permite tomar $\varphi(s) = k \operatorname{Log} s$, luego

$$z(s) = \int e^{ik \operatorname{Log} s} ds,$$

de donde, tomando como parámetro a $\varphi(s)$,

$$z(s) = f[\varphi(s)], \quad \text{con} \quad f(\varphi) = \frac{1 - ik}{1 + k^2} \exp\left(\frac{1}{k} + i\right) \varphi + C$$

($C = \text{Cte}$). Tomando $C = 0$, se obtiene una *espiral logarítmica* de polo O ; se puede en efecto poner entonces

$$z = r(\varphi) e^{i\varphi}, \quad \text{con} \quad r(\varphi) = \frac{e^{\varphi/k}}{\sqrt{1 + k^2}}$$

(véase § VII.5).

3. Hallar los arcos de ecuación intrínseca algebraica

$$\rho_1(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}} \quad (a > 0, s \in]-a, +a[).$$

Se tiene aquí

$$\varphi(s) = \int \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}},$$

lo cual permite tomar $\varphi(s) = \operatorname{arcsen}(s/a)$; $\varphi(s)$ es un parámetro admisible sobre el arco buscado. Tomando a φ como parámetro ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$) se obtiene

$$z(s) = \int e^{i\varphi(s)} ds = \int e^{i\varphi} d(a \operatorname{sen} \varphi)$$

de donde

$$z(s) = f(\varphi(s)), \quad \text{con} \quad f(\varphi) = \int a e^{i\varphi} \cos \varphi d\varphi + \text{Cte}$$

y finalmente (eligiendo convenientemente la constante)

$$z = \frac{a}{4} (2\varphi - i e^{2i\varphi})$$

o sea

$$x = a \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2 \varphi \right), \quad y = -\frac{a}{4} \cos 2 \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right).$$

Se obtiene un arco de cicloide (comparar con resultados anteriores).

§ VI.8 ARCOS DE \mathcal{E}_3 . CURVATURA, TORSIÓN, SISTEMA DE REFERENCIA DE SERRET-FRENET

En este § y en los que siguen, el espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 se supondrá siempre **orientado**; consideramos un arco regular orientado γ de clase $k \geq 3$, definido por una parametrización normal $g: I \rightarrow \mathcal{E}_3$, $s \mapsto M = g(s)$.

Recordemos que el **vector unitario tangente** $\vec{\tau}$ y la curvatura ρ son las funciones definidas en I respectivamente por

$$(1) \quad \vec{\tau}(s) = \frac{dM}{ds} = g'(s), \quad \rho(s) = \left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\| = \|g''(s)\|.$$

La **normal principal** $\vec{\nu}$ queda definida para todo valor $s \in I$ tal que, $\rho(s) \neq 0$ por:

$$(2) \quad \vec{\nu}(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{g''(s)}{\|g''(s)\|}.$$

Finalmente la **indicatriz de las tangentes** es el arco γ_1 de E_3 , de clase $k-1$, definido por la parametrización

$$\vec{\tau}: I \mapsto \mathcal{E}_3, \quad s \mapsto \vec{\tau}(s).$$

Sistema de referencia de Serret-Frenet

Supongamos desde ahora que γ **no tiene puntos de inflexión** y que por lo tanto verifica $\rho(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.

Para cada $s \in I$, el **sistema de referencia de Serret-Frenet** $(M; \vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$ es el sistema de referencia ortonormal directo de \mathcal{E}_3 definido por las relaciones (1), (2) y

$$(3) \quad \vec{\beta}(s) = \vec{\tau}(s) \wedge \vec{\nu}(s).$$

El vector $\vec{\beta}(s)$ es ortogonal a la vez a $\vec{\tau}(s)$ y $\vec{\nu}(s)$, y se dice que es **binormal** a γ .

Sustituyendo, si es preciso, γ por un subarco, nos podemos remitir siempre al caso en que el punto $M = g(s)$ es *punto simple* de γ . El vector $\vec{\beta}(s)$ depende entonces solamente del punto M y no de la parametrización normal elegida g ; es un vector unitario ortogonal al *plano osculador* a γ en M (estando el plano osculador dirigido por los vectores $\vec{\tau}(s)$ y $\vec{v}(s)$).

El plano que pasa por M , de vectores directores $\vec{v}(s)$ y $\vec{\beta}(s)$ recibe el nombre de **plano normal** a γ en M ; el plano que pasa por M de vectores directores $\vec{\tau}(s)$ y $\vec{\beta}(s)$ recibe el nombre de **plano rectificante** de γ en M (véase la figura 6).

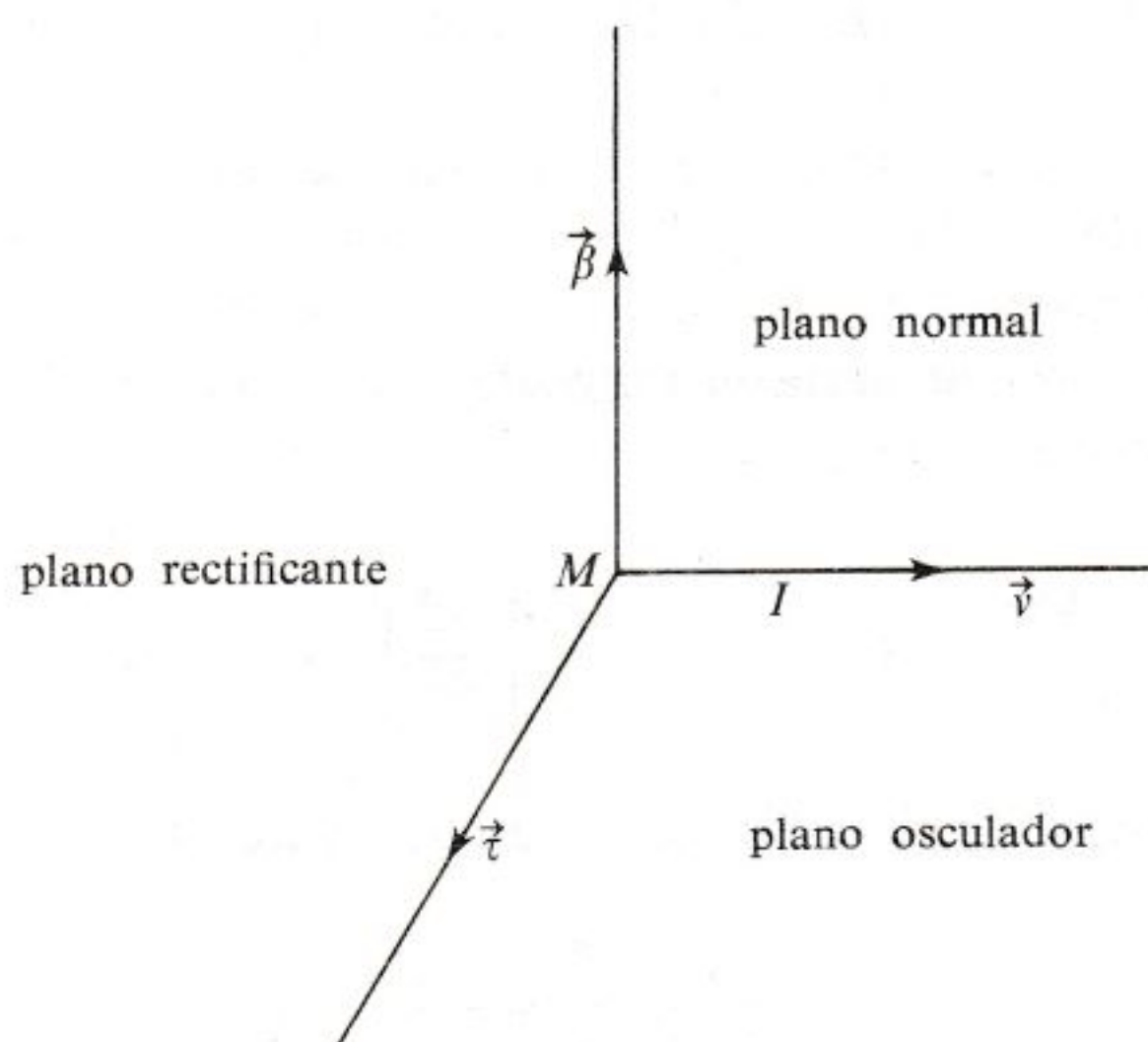


Figura 6.

Observemos que en un *cambio de orientación* de γ , el sistema de referencia $(\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta})$ queda cambiado en $(-\vec{\tau}, \vec{v}, -\vec{\beta})$ y, en un *cambio de orientación* de \mathcal{E}_3 , queda cambiado en $(\vec{\tau}, \vec{v}, -\vec{\beta})$, como se desprende inmediatamente del estudio general hecho en el § VI.1.

Fórmulas de Frenet. Torsión

Por construcción, las funciones vectoriales \vec{v} y $\vec{\beta}$ verifican

$$(4) \quad \vec{\beta}^2(s) = 1, \quad \vec{\beta}(s) \cdot \vec{\tau}(s) = 0, \quad \vec{\beta}(s) \cdot \vec{v}(s) = 0.$$

Derivando la primera y la segunda de las relaciones (4) se obtiene

$$(5) \quad \vec{\beta}(s) \cdot \frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0, \quad \vec{\beta}(s) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} + \vec{\tau}(s) \cdot \frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0,$$

de donde, teniendo en cuenta (3) y la última de las relaciones (4)

$$(6) \quad \vec{\tau}(s) \cdot \frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0.$$

De (5) y (6) se deduce que el vector $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ es nulo o colineal con $\vec{v}(s)$, lo cual prueba la existencia de un número $\theta(s)$ que verifica

$$(7) \quad \boxed{\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \theta(s) \vec{v}(s)}.$$

La función $\theta : s \mapsto \theta(s)$ recibe el nombre de **torsión** del arco γ (supuesto siempre regular, de clase $k \geq 3$ y sin puntos de inflexión).

Si el punto $M = g(s)$ es simple, el número $\theta(s)$ (el cual depende solamente de este punto y no de la parametrización normal g elegida) recibe el nombre de **torsión de γ en el punto M** .

● Observemos que un *cambio de orientación de γ* deja **invariante** la torsión; por el contrario, un *cambio de orientación de \mathcal{E}_3* cambia la torsión en su **opuesta**.

Derivemos finalmente la última de las relaciones (4); teniendo en cuenta (7), obtenemos

$$\vec{\beta}(s) \cdot \frac{d\vec{v}}{ds} = - \frac{d\vec{\beta}}{ds} \cdot \vec{v}(s) = - \theta(s).$$

Por otra parte, derivando las relaciones

$$\vec{\tau}(s) \cdot \vec{v}(s) = 0, \quad \|\vec{v}(s)\|^2 = 1 \quad \text{y} \quad \vec{\beta}(s) \cdot \vec{v}(s) = 0$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{ds} \cdot \vec{\tau}(s) &= - \vec{v}(s) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = - \rho(s); & \frac{d\vec{v}}{ds} \cdot \vec{v}(s) &= 0; \\ \frac{d\vec{v}}{ds} \cdot \vec{\beta}(s) &= - \vec{v}(s) \cdot \frac{d\vec{\beta}}{ds} = - \theta(s). \end{aligned}$$

de ahí se deduce

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = -\rho(s)\vec{\tau}(s) - \theta(s)\vec{\beta}(s).$$

Agrupando en un cuadro único los valores de las derivadas de las funciones $\vec{\tau}$, \vec{v} , $\vec{\beta}$, se obtiene las fórmulas llamadas **de Frenet** (o de Serret-Frenet):

$$(8) \quad \boxed{\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho\vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = -\rho\vec{\tau} - \theta\vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \theta\vec{v}}.$$

Por hipótesis (al no tener γ puntos de inflexión) es $\rho(s) \neq 0$ y el número $R(s) = 1/\rho(s)$ recibe el nombre de **radio de curvatura** de γ en el punto $M = g(s)$. Si, además, se tiene $\theta(s) \neq 0$, el número $T(s) = 1/\theta(s)$ recibe el nombre de **radio de torsión** de γ en el punto $M = g(s)$ (si este punto es simple).

Con estas notaciones las fórmulas de Frenet (8) se escriben:

$$(8') \quad \boxed{\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{v}}{R}, \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = -\frac{\vec{\tau}}{R} - \frac{\vec{\beta}}{T}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{\vec{v}}{T}}.$$

Las relaciones (8) u (8') traducen el hecho de que la matriz de los vectores $d\vec{\tau}/ds$, $d\vec{v}/ds$, $d\vec{\beta}/ds$ en la base $(\vec{\tau}(s), \vec{v}(s), \vec{\beta}(s))$ es:

$$\mathcal{M}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\rho(s) & 0 \\ \rho(s) & 0 & \theta(s) \\ 0 & -\theta(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R(s)} & 0 \\ \frac{1}{R(s)} & 0 & \frac{1}{T(s)} \\ 0 & -\frac{1}{T(s)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta observación permite aplicar al sistema de referencia de Frenet la *teoría del sistema de referencia móvil* que se expondrá más adelante (§ X.4).

Observemos que si γ es de clase k ($k \leq 3$), las funciones ρ , \vec{v} , $\vec{\beta}$ son de clase $k-2$, mientras que la torsión θ es solamente de clase $k-3$.

Caso en que la torsión es nula

Sea, como siempre, γ un arco regular de clase $k \geq 3$ y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $g : I \rightarrow \mathcal{E}_3$.

Con las notaciones anteriores, se tiene: $g'(s) = \vec{\tau}(s)$, $g''(s) = \rho(s) \vec{v}(s)$, de donde

$$(9) \quad \boxed{g'''(s) = -\rho^2(s) \vec{\tau}(s) + \rho'(s) \vec{v}(s) - \rho(s) \theta(s) \vec{\beta}(s)}.$$

Para que se tenga $\theta(s) = 0$, es pues necesario y suficiente que el vector $g''(s)$ pertenezca al plano vectorial engendrado por los vectores

$$\vec{\tau}(s) = g'(s) \quad \text{y} \quad \vec{v}(s) = \frac{1}{\rho(s)} g''(s),$$

es decir, al segundo espacio fundamental $T_2(M)$ con $M = g(s)$ (si el punto M es simple) (véase § V.6). En otros términos, para que la torsión en el punto $M = g(s)$ sea nula, es necesario y suficiente que se tenga $T_2(M) = T_3(M)$. Utilizando los resultados del § V.6, se puede enunciar:

Para que la torsión en un punto simple de γ sea nula, es necesario y suficiente que el plano osculador en este punto sea sobreosculador a γ .

Por aplicación de los resultados obtenidos en el § V.8 se deduce:

Teorema VI.8.1

|| Sea γ un arco regular de \mathcal{E}_3 , de clase $k \geq 3$ y sin puntos de inflexión.
 || Para que el soporte de γ esté contenido en un plano afín, es necesario y suficiente que la función torsión de γ sea nula.

Demostración. La necesidad de esta condición resulta de las observaciones hechas en el § V, ya que, si el soporte de γ está contenido en un plano afín \mathcal{P} , los vectores $g'(s)$, $g''(s)$ y $g'''(s)$ son paralelos a \mathcal{P} .

El hecho de que la condición sea suficiente se desprende inmediatamente de V.8.3 si γ es simple. Si γ es no simple, se desprende de una aplicación directa de la proposición V.8.2 a la función g , con $p = 3$, teniendo en cuenta la fórmula (9).]

§ VI.9 CÁLCULO DE LA CURVATURA Y DE LA TORSIÓN

Consideremos un arco γ regular orientado de \mathcal{E}_3 , de clase $k \geq 3$.

Si γ está definido por una parametrización normal g , las fórmulas de Frenet permiten determinar fácilmente las funciones curvatura y torsión de γ por medio de g' , g'' y g''' , y podemos observar que las fórmulas (1) y (9) implican

$$(1) \quad \|g'(s) \wedge g''(s)\| = \rho(s), \quad [g'(s), g''(s), g'''(s)] = -\rho^2(s) \theta(s),$$

designando siempre por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ el producto mixto de 3 vectores de \mathcal{E}_3 . En el caso en el que γ está definido por una parametrización admisible cualquiera f , vamos a ver que las fórmulas (1) permiten expresar fácilmente la curvatura y la torsión por medio de las derivadas de f .

Para simplificar la escritura, designaremos por s un parámetro normal cualquiera fijo, por g la parametrización correspondiente de γ y por M el punto $f(t)=g(s)$, con $s=s(t)$. Por abuso de lenguaje, los números $\rho(s)$ y $\theta(s)$ reciben respectivamente los nombres de curvatura y torsión de γ en el punto M ; *resulta muchas veces difícil en la práctica comprobar si γ tiene o no puntos múltiples.*

Curvatura

Por un cálculo ya realizado (p. 372) se tiene:

$$f'(t) = g'(s) \frac{ds}{dt}; \quad f''(t) = g'(s) \frac{d^2s}{dt^2} + g''(s) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

de donde

$$f'(t) \wedge f''(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 g'(s) \wedge g''(s),$$

y

$$(2) \quad \rho(s) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3} \|f'(t) \wedge f''(t)\|,$$

o sea

$$(3) \quad \boxed{\rho(s) = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}}.$$

Si se designan por $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ las coordenadas de f en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_3 , se obtiene:

$$(3') \quad \rho = \frac{[(y' z'' - y'' z')^2 + (z' x'' - z'' x')^2 + (x' y'' - x'' y')^2]^{1/2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

Si el arco γ está contenido en el plano de ecuación $z = 0$, volvemos a encontrar el valor de $\rho = |\rho_1|$ que resulta de las fórmulas establecidas en el § 4.

Recordemos que las relaciones (2) nos proporcionan las componentes del vector aceleración $f''(t)$ en el sistema de referencia de Frenet, o sea

$$(4) \quad f''(t) = \frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{t} + \rho \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{v}.$$

Esta relación será utilizada en Cinemática.

Torsión

Mediante una nueva derivación, las relaciones (2) implican

$$f'''(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 g'''(s) + A(t) g''(s) + B(t) g'(s),$$

donde A y B son funciones que de momento no hace falta explicitar. De ello se deduce

$$(5) \quad [f'(t), f''(t), f'''(t)] = \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 [g'(s), g''(s), g'''(s)],$$

de donde, si $\rho(s) \neq 0$, la expresión de la torsión resulta

$$\theta(s) = - \frac{[g'(s), g''(s), g'''(s)]}{\rho^2(s)} = - \frac{[f'(t), f''(t), f'''(t)]}{\rho^2(s) \|f'(t)\|^3},$$

o sea finalmente, teniendo en cuenta (3),

$$(6) \quad \theta(s) = - \frac{[f'(t), f''(t), f'''(t)]}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|^2}.$$

Si designamos por $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ las coordenadas de $f(t)$ en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_3 se obtiene:

$$(6') \quad \theta = - \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}}{(y' z'' - y'' z')^2 + (z' x'' - z'' x')^2 + (x' y'' - x'' y')^2}$$

Observaciones

1. Se pueden traducir las relaciones (2) y (5) diciendo que los «símbolos diferenciales»

$$(f'(t) \wedge f''(t)) dt^3 \quad \text{y} \quad [f'(t), f''(t), f'''(t)] dt^6$$

permanecen invariantes en un cambio de parámetro que conserve la orientación de γ . Esta observación permite obtener de nuevo rápidamente las fórmulas (3) y (6) partiendo de las fórmulas de Frenet.

2. Las fórmulas (3) y (6) no siempre resultan ser las más cómodas. Por ejemplo, si la función $ds/dt = \|f'(t)\|$ tiene una expresión sencilla, resulta conveniente calcular de modo sucesivo las componentes de los vectores $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ en el punto $M=f(t)$, lo que equivale a aplicar las fórmulas de Frenet sin explicitar el parámetro normal s . Recordemos a este respecto que no siempre es posible expresar s por medio de funciones conocidas; aún cuando lo sea, el cambio de variable $t \mapsto s(t)$ origina muchas veces cálculos complicados.

Utilización de la indicatriz de las tangentes

Supongamos siempre que γ está definido por una parametrización cualquiera $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$. La indicatriz de las tangentes γ_1 está definida entonces por la parametrización

$$f_1: I \rightarrow E_3, \quad t \mapsto \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}.$$

(Se ve en efecto que el cambio de parámetro definido por $t \mapsto s(t)$ es admisible lo mismo para γ_1 que para γ .) El vector unitario tangente a γ_1 es $\vec{\tau}_1 = \vec{\nu}$ y la curvatura ρ de γ viene dada por

$$\rho(s) = \|f_1'(t)\| \cdot \frac{dt}{ds}.$$

Si γ no tiene puntos de inflexión, el parámetro normal s_1 de γ_1 queda definido (salvo una constante) por:

$$s_1 = \int \rho(s) \, ds = \int \|f'_1(t)\| \, dt.$$

Si se ha podido determinar fácilmente s_1 , se tiene a la inversa

$$\boxed{\rho(s) = \frac{ds_1}{ds}}.$$

Cuando γ es un *arco plano sin punto de inflexión*, la indicatriz de las tangentes se reduce a un arco de círculo y el parámetro normal de γ_1 es igual a la función angular φ asociada a γ (véase § 6). El interés del estudio directo del § 6 proviene del hecho de que sigue siendo válido, incluso cuando γ tiene puntos de inflexión.

En todos los ejemplos que siguen, el espacio \mathcal{E}_3 se supondrá provisto de un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ejemplos

1. Sea γ la **hélice circular** definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (a > 0, b \neq 0, t \in \mathbf{R}).$$

Se tiene aquí

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \, dt = \sqrt{a^2 + b^2} \, dt;$$

de donde, poniendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, las componentes de los vectores buscados son

$$\frac{dM}{dt} \begin{vmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{vmatrix} \quad \vec{\tau} = \frac{dM}{ds} \begin{vmatrix} -\frac{a}{c} \sin t \\ \frac{a}{c} \cos t \\ \frac{b}{c} \end{vmatrix} \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} \begin{vmatrix} -\frac{a}{c^2} \cos t \\ -\frac{a}{c^2} \sin t \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \begin{vmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{v} \begin{vmatrix} \frac{b}{c} \sin t \\ -\frac{b}{c} \cos t \\ \frac{a}{c} \end{vmatrix} \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} \begin{vmatrix} \frac{b}{c^2} \cos t \\ \frac{b}{c^2} \sin t \\ 0 \end{vmatrix}.$$

De ahí se deduce que la curvatura y la torsión de γ son constantes:

$$\rho = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \theta = \frac{-b}{c^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Se observará que la torsión es positiva si la hélice es *dextrorsa*, es decir si se «sube» sobre la hélice girando en sentido retrógrado alrededor de Oz ; es negativa si la hélice es *sinistrorsa*, es decir si se «sube» sobre la hélice girando en sentido directo alrededor de Oz .

Si se toma \mathcal{E}_3 como modelo del espacio físico, orientándolo de la forma usual (regla del hombrecillo de Ampère), los tornillos usuales (y en particular el sacacorchos) son hélices de torsión positiva (excepción hecha de algunos casos particulares, como el de las botellas de butano).

2. Sea γ la *cúbica alabeada* definida por

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{2}, \quad z = \frac{t^3}{6}.$$

Se tiene aquí

$$ds = \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}} dt = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt$$

y las componentes de los vectores son

$$\frac{dM}{dt} \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ \frac{t^2}{2} \end{vmatrix} \quad \frac{d^2M}{dt^2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{vmatrix} \quad \frac{d^3M}{dt^3} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \frac{dM}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2} \begin{vmatrix} \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{vmatrix},$$

de donde la curvatura

$$\rho = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3} \left\| \frac{dM}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2} \right\| = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-2},$$

y los vectores de Frenet

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{dM}{ds} \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-1} \\ t \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-1} \\ \frac{t^2}{2} \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-1} \end{vmatrix} & \vec{\beta} &= \frac{\frac{dM}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2}}{\left\| \frac{dM}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2} \right\|} \begin{vmatrix} \frac{t^2}{2} \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-1} \\ -t \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-1} \\ \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-1} \end{vmatrix} \\ \vec{\nu} &= \vec{\beta} \wedge \vec{\tau} \begin{vmatrix} -\left(t + \frac{t^3}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-2} \\ -\left(\frac{t^4}{4} - 1\right) \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-2} \\ \left(t + \frac{t^3}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular la torsión, resulta de interés ahora aplicar la fórmula (6), lo cual proporciona

$$\theta = - \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-2}$$

3. Sea γ el arco definido por:

$$x = \operatorname{sen} t \cos t, \quad y = \cos^2 t, \quad z = \operatorname{sen} t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(el soporte de γ es la intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con el cilindro de revolución de ecuación $x^2 + y^2 = y$).

Se tiene

$$dx = \cos 2t \, dt, \quad dy = -\operatorname{sen} 2t \, dt, \quad dz = \cos t \, dt,$$

de donde $ds = \sqrt{1 + \cos^2 t} \, dt$ y los vectores

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} & \begin{vmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ \cos t \end{vmatrix} \quad \frac{d^2M}{dt^2} \begin{vmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ -\sin t \end{vmatrix} \quad \frac{d^3M}{dt^3} \begin{vmatrix} -4\cos 2t \\ 4\sin 2t \\ -\cos t \end{vmatrix} \\ \frac{dM}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2} & \begin{vmatrix} 2\cos^3 t \\ -\sin t(1+2\cos^2 t) \\ 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De ahí se deducen los valores de la curvatura y torsión

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2} \right\| = \frac{(3\cos^2 t + 5)^{1/2}}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}} \\ \theta &= - \frac{\left[\frac{dM}{dt}, \frac{d^2M}{dt^2}, \frac{d^3M}{dt^3} \right]}{\left\| \frac{dM}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2} \right\|^2} = \frac{6\cos t}{3\cos^2 t + 5} \end{aligned}$$

Finalmente, los vectores de Frenet están definidos por

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \frac{dM}{dt}, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}} \frac{dM}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2}, \quad \vec{v} = \vec{\beta} \wedge \vec{\tau}.$$

§ VI.10 ESTUDIO MÉTRICO LOCAL DE LOS ARCOS DE \mathcal{E}_3

Para estudiar un arco regular γ en el entorno de un punto M_0 , podemos siempre (en teoría) limitarnos al caso de un arco simple definido por una parametrización normal $g: I \rightarrow \mathcal{E}_3$ tal que $M_0 = g(0)$; supondremos siempre que γ es de clase $k \geq 3$.

Habiendo estudiado ya el caso de un punto de inflexión en Geometría afín, supondremos que M_0 no es un punto de inflexión; designaremos por $(x(s), y(s), z(s))$ las coordenadas de $g(s)$ en el sistema de referencia de Frenet de γ en el punto M_0 . Para mayor comodidad pondremos

$$\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}(0), \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(0), \quad \vec{\beta}_0 = \vec{\beta}(0).$$

El desarrollo de Taylor de g hasta el orden 3 en el entorno de 0 se escribe

$$g(s) = g(0) + sg'(0) + \frac{s^2}{2} g''(0) + \frac{s^3}{3} g'''(0) + o(s^3),$$

con

$$g(0) = M_0, \quad g'(0) = \vec{\tau}_0, \quad g''(0) = \rho(0) \vec{v}_0$$

y (según la fórmula (9) del § 8):

$$g'''(0) = -\rho^2(0) \vec{\tau}_0 + \rho'(0) \vec{v}_0 - \rho(0) \theta(0) \vec{\beta}_0.$$

Poniendo $M = g(s)$, se tiene, pues,

$$(1) \quad \overrightarrow{M_0 M} = s \vec{\tau}_0 + \frac{s^2}{2} \rho(0) \vec{v}_0 + \\ + \frac{s^3}{6} (-\rho^2(0) \vec{\tau}_0 + \rho'(0) \vec{v}_0 - \rho(0) \tau(0) \vec{\beta}_0) + o(s^3),$$

de donde

$$(2) \quad \begin{cases} x(s) = s - \frac{1}{6} \rho^2(0) s^3 + o(s^3) \\ y(s) = \frac{1}{2} \rho(0) s^2 + \frac{1}{6} \rho'(0) s^3 + o(s^3) \\ z(s) = -\frac{1}{6} \rho(0) \theta(0) s^3 + o(s^3). \end{cases}$$

Restringiéndonos, si es preciso, a un subarco de γ podemos suponer que la función $x: s \mapsto x(s)$ define un cambio de parámetro admisible en γ . Tomando como parámetro la coordenada x , obtenemos

$$s = x + o(x^2),$$

de donde

$$(3) \quad y = \frac{1}{2} \rho(0) x^2 + o(x^2); \quad z = -\frac{1}{6} \rho(0) \theta(0) x^3 + o(x^3).$$

Las relaciones (2) nos proporcionan la forma de las proyecciones $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ de γ sobre los planos (M_0xy) , (M_0xz) y (M_0yz) (planos osculador, rectificante y normal a γ en M_0). Los arcos γ_1 y γ_2 son regulares, y el arco γ_3 (proyección de γ sobre el plano normal) presenta en M_0 un punto estacionario y tiene al eje M_0x como tangente geométrica en este punto.

Si se supone $\theta(0) \neq 0$, la coordenada $z(s)$ cambia de signo con s . En este caso, el arco γ atraviesa por tanto a su plano osculador. Por el contrario, en el entorno de $s = 0$, la coordenada $y(s)$ es positiva (e incluso estrictamente positiva para $s \neq 0$), y

el arco γ estará situado, respecto al plano rectificante, del mismo lado que el vector ν . Se dice que vuelve su **concavidad** del lado del vector $\vec{\nu}$.

La forma de las curvas γ_1 y γ_3 viene esquematizada en las figuras 7. Para estudiar la forma de γ_2 hemos distinguido los casos $\theta(0) > 0$ y $\theta(0) < 0$ (véase la figura 8).

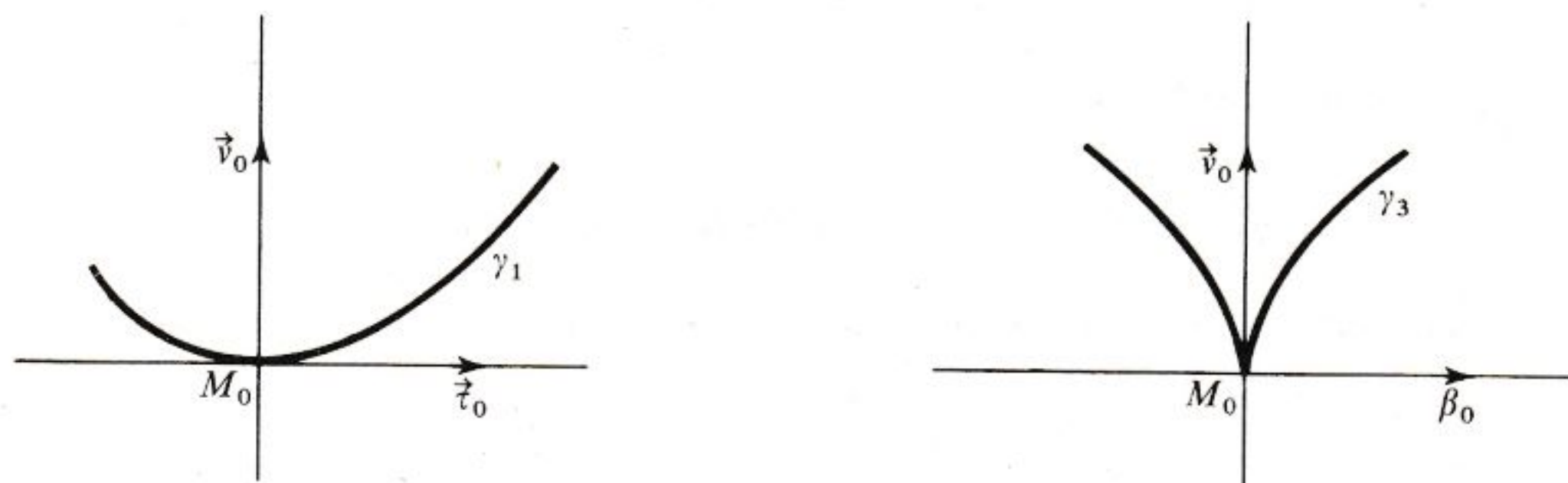


Figura 7.

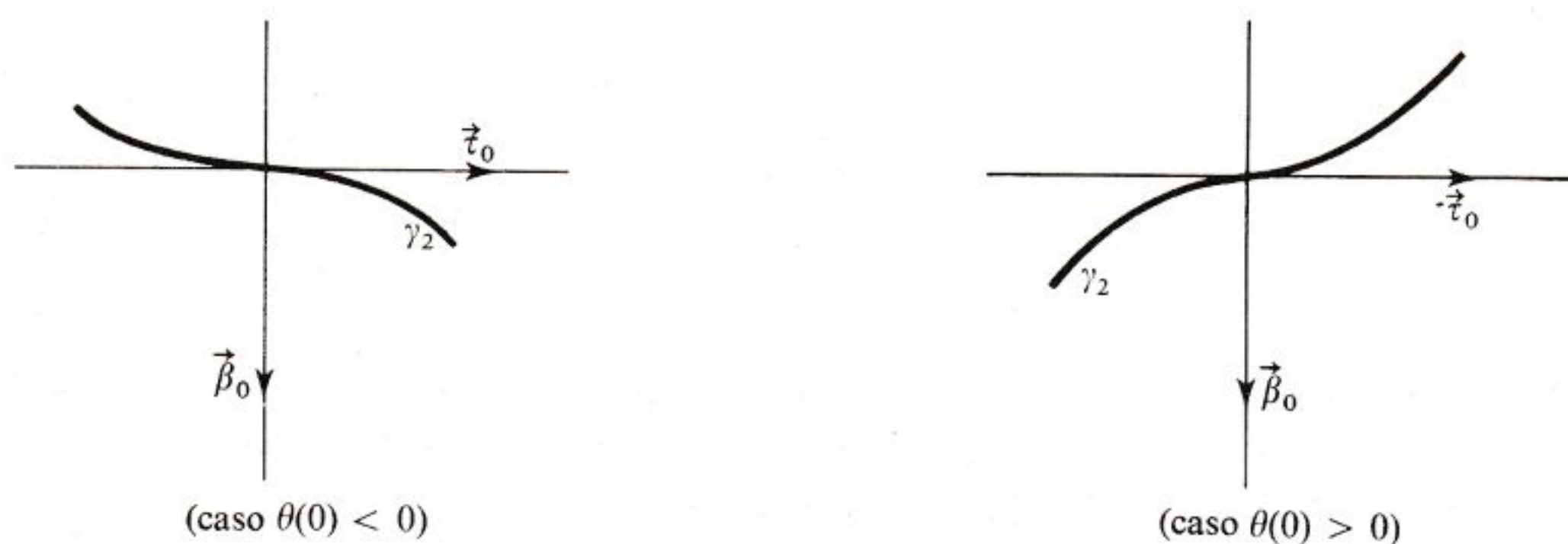
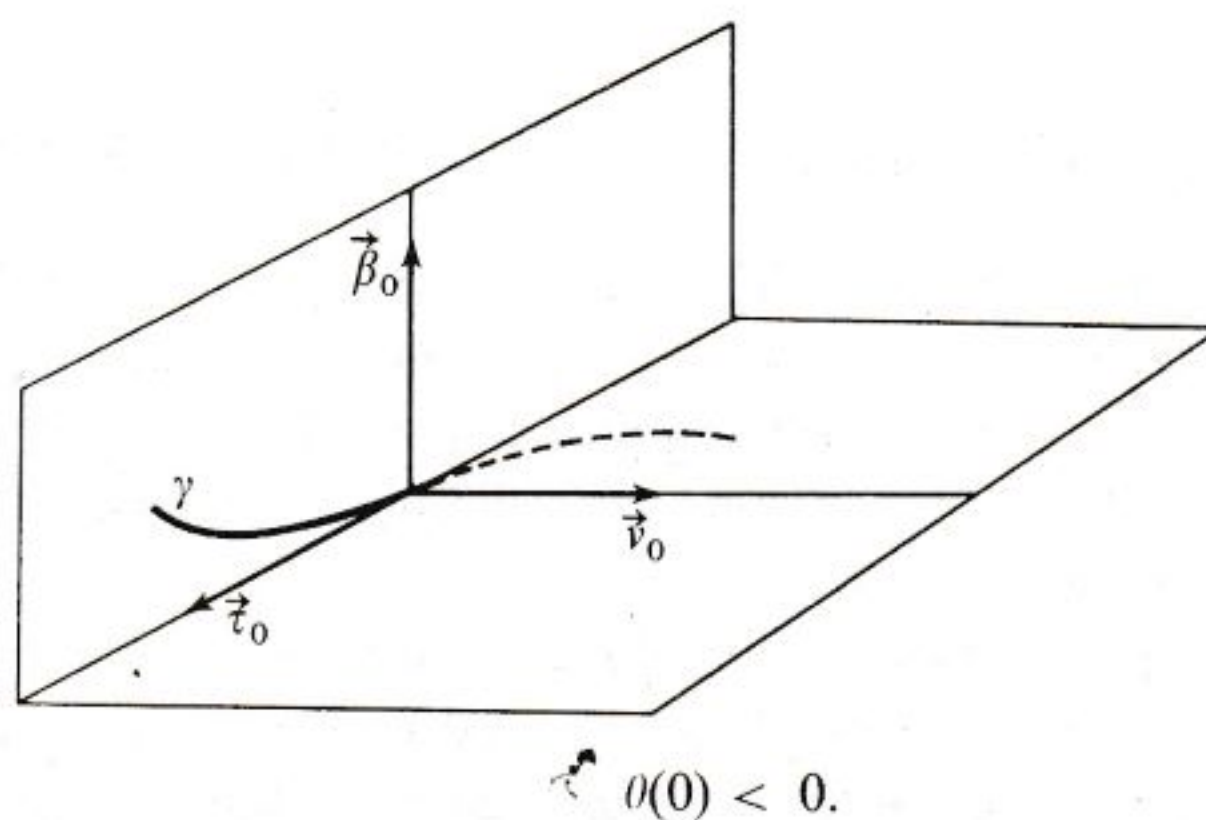
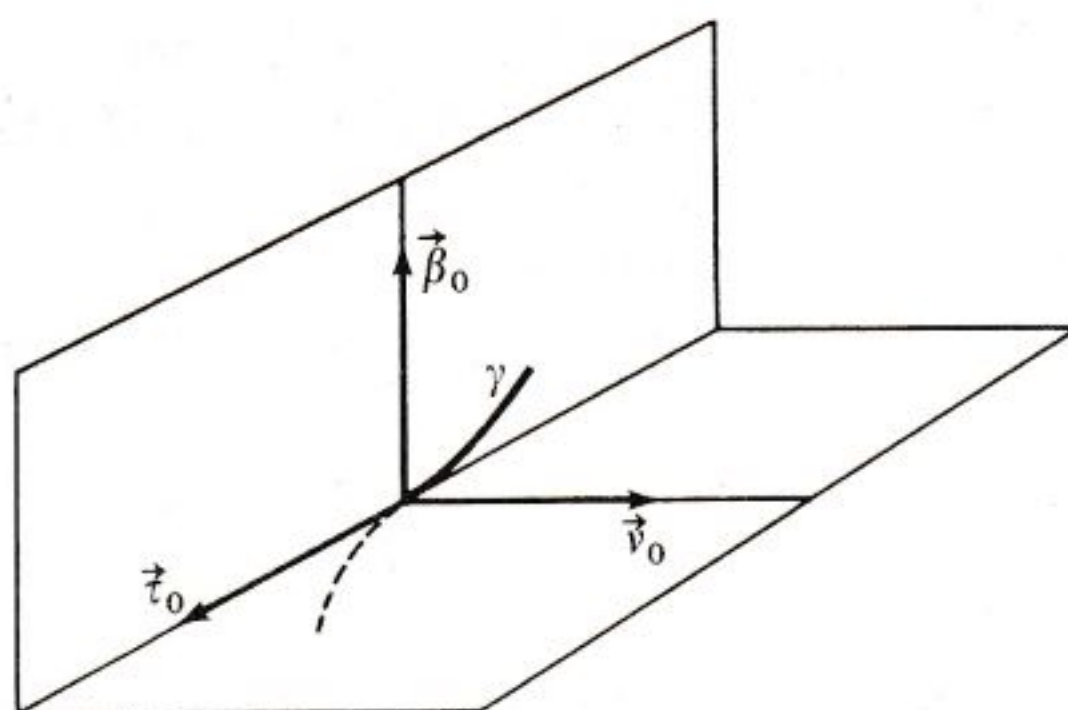


Figura 8.



$\theta(0) < 0$.

Figura 9.

Figura 10. $\theta(0) > 0$.

Se dice que la disposición de γ en M_0 es *dextrorsa* si $\theta(0) > 0$ y *sinistrorsa* si $\theta(0) < 0$. Para mejor esquematizar estas disposiciones, las hemos representado en perspectiva caballera en las figuras 9 y 10, donde lo punteado designa la parte de γ oculta por el plano osculador.

Se observará que la mayor parte de las curvas alabeadas ofrecidas en la naturaleza (plantas trepadoras, conchas) son sinistrorsas, lo mismo que los tornillos corrientes (véase más adelante).

Esferas osculatrices. Esfera sobreosculatriz

A cada punto Ω de \mathcal{E}_3 asociemos la esfera S_Ω , de centro Ω , que pasa por M_0 , e investiguemos la posición del arco γ respecto a S_Ω .

Designemos por (a, b, c) las coordenadas de Ω en el sistema de referencia

$$\mathcal{R}_0 = (M_0; \vec{\tau}_0, \vec{v}_0, \vec{\beta}_0);$$

la ecuación normal de S_Ω en este sistema de referencia es entonces

$$F(x, y, z) = 0,$$

con

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz.$$

La ecuación en las intersecciones de γ con S_Ω es $F(x(s), y(s), z(s)) = 0$. Ahora bien, utilizando las fórmulas (2), se tiene, después de un cálculo que no ofrece ninguna dificultad, en el entorno de $s = 0$,

$$\begin{aligned} F(x(s), y(s), z(s)) = & -2as + (1 - b\rho(0))s^2 + \\ & + \frac{1}{3}(c\rho(0)\theta(0) - a\rho^2(0) - b\rho'(0))s^3 + o(s^3). \end{aligned}$$

a) Se tiene $F(x(s), y(s), z(s)) = o(s)$ si, y solamente si, $a = 0$, es decir si el centro de S_Ω está contenido en el plano normal a γ en M_0 . En este caso, se dice que la esfera S_Ω es *tangente* a γ en M_0 (ya que la tangente a γ en M_0 está contenida en el plano tangente a S_Ω en este punto).

b) Se tiene $F(x(s), y(s), z(s)) = o(s^2)$ si, y solamente si, es $a = 0$ y

$$b = \frac{1}{\rho(0)} = R_0,$$

designando por R_0 el *radio de curvatura* de γ en M_0 ; en otros términos, el punto Ω tiene que pertenecer a la recta Δ , del vector director $\vec{\beta}_0$ que pasa por el centro de curvatura I de γ en M_0 . Esta recta recibe el nombre de **eje de curvatura** de γ en M_0 (véase la figura 11).

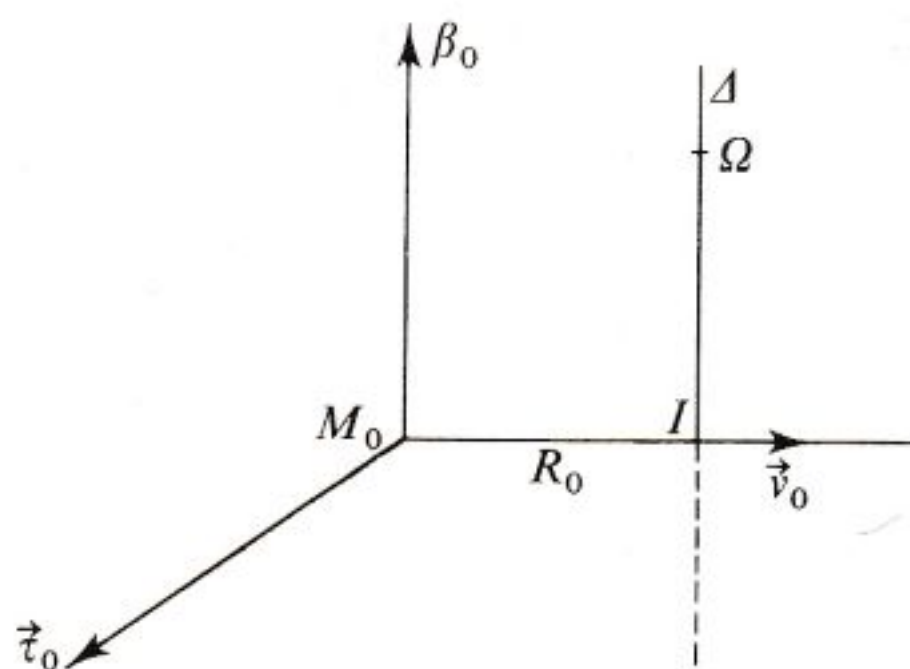


Figura 11.

Esto equivale a decir que la esfera S_Ω contiene a la *circunferencia de curvatura* de γ en este punto (véase p. 376).

Se dice en este caso que la esfera S_Ω es **osculatriz** a γ en M_0 . Esta definición está de acuerdo con la teoría general del contacto de un arco con una superficie regular.

c) Del mismo modo, se dice que la esfera S_Ω es **sobreosculatriz** a γ en M_0 si se tiene

$$(4) \quad F(x(s), y(s), z(s)) = o(s^3).$$

1. Si se supone $\theta(0) \neq 0$, la condición 4 queda satisfecha si (y solamente si) se tiene

$$(5) \quad a = 0, \quad b = \frac{1}{\rho(0)} = R_0 \quad \text{y} \quad c = \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0) \theta(0)} = -R'_0 T_0$$

designando por $T_0 = 1/\theta(0)$ el *radio de torsión* de γ en M_0 y por

$$R'_0 = \frac{dR}{ds}(0)$$

la derivada en el punto $s = 0$ de la función radio de curvatura $R = 1/\rho$.

En este caso existe solamente una esfera sobreosculatriz a γ en M_0 , cuyo centro es el punto Ω definido por

$$(6) \quad \overrightarrow{M_0\Omega} = R_0 \vec{v}_0 - R'_0 T_0 \vec{\beta}_0.$$

2. Si se tiene $\theta(0) = 0$ y $\rho'(0) \neq 0$, no existe esfera sobreosculatriz a γ en M_0 . Pero en este caso sabemos que el plano osculador a γ es *sobreosculador*; se puede considerar a este plano como una esfera sobreosculatriz de «radio infinito»⁽¹⁾.

3. Si se tiene $\theta(0) = 0$ y $\rho'(0) = 0$, la relación (4) queda cumplida cualquiera que sea c siempre que se tenga $a = 0$ y $b = R_0$; en este caso toda esfera osculatriz a γ en M_0 es sobreosculatriz.

Se observará que este último caso se presenta, en particular, cuando el plano normal a γ en M_0 es un *plano de simetría* para γ . En efecto, en este caso, las funciones $s \mapsto y(s)$ y $s \mapsto z(s)$ son *pares*, mientras que la función $s \mapsto x(s)$ es *impar*, lo cual exige $\rho'(0) = 0$ y $\rho(0)\theta(0) = 0$.

En resumen

- VI.10.1** Sea γ un arco simple, regular y sin puntos de inflexión, de clase $k \geq 3$ y sea M_0 un punto de γ . Entonces:
- a) Existen una infinidad de esferas **osculatrices** a γ en M_0 , que son todas las esferas que pasan por la circunferencia de curvatura de γ en M_0 .
 - b) Si la torsión de γ en M_0 es no nula, existe una sola esfera **sobreosculatriz** a γ en M_0 , cuyo centro Ω está definido por (5).
 - c) Si la torsión de γ en M_0 es nula, sólo existe esfera sobreosculatriz a γ en M_0 si el radio de curvatura en M_0 es **extremal**; en este caso, toda esfera osculatriz es sobreosculatriz.

§ VI.11 ECUACIONES INTRÍNSECAS DE UN ARCO DE \mathcal{E}_3

Sea γ un arco simple regular orientado y sin puntos de inflexión, de clase $k \geq 3$, definido por una parametrización normal $g : I \rightarrow \mathcal{E}_3$. El par (ρ, θ) constituido por

⁽¹⁾ Esta terminología intuitiva tiene una justificación rigurosa en Geometría conforme.

la función curvatura ρ y la función torsión θ asociadas a esta parametrización se dice que es un **sistema de ecuaciones intrínsecas** de γ .

Los distintos sistemas de ecuaciones intrínsecas de γ se deducen evidentemente unos de otros por una traslación de la variable.

Esta definición generaliza la que hemos dado para el plano; pero aquí hemos de suponer que γ no tiene puntos de inflexión (de lo contrario la función torsión no estaría definida por todas partes).

La imagen de γ por un desplazamiento cualquiera de \mathcal{E}_3 tiene evidentemente los mismos sistemas de ecuaciones intrínsecas (ya que en un desplazamiento, los parámetros normales, la curvatura y la torsión se conservan). Inversamente se tiene:

VI.11.1 Si dos arcos orientados de clase $k \geq 3$, regulares y sin puntos de inflexión, tienen un mismo sistema (ρ, θ) de ecuaciones intrínsecas, se deducen uno de otro por un **desplazamiento** de \mathcal{E}_3 .

Si las funciones ρ, θ se suponen continuas, este resultado se desprende de la teoría de las ecuaciones diferenciales (véase demostración de VI.11.2).

La demostración directa que damos aquí supone solamente la existencia de estas funciones.

Demostración

a) Designemos por γ_1, γ_2 los dos arcos considerados, por I el intervalo de definición de las funciones ρ, θ , y por g_i ($i = 1, 2$) una parametrización normal de γ_i tal que (ρ, θ) sea el sistema de ecuaciones intrínsecas asociado. Designemos finalmente por $\mathcal{R}_i(s) = (g_i(s); \vec{\tau}_i(s), \vec{\nu}_i(s), \vec{\beta}_i(s))$ el sistema de referencia de Frenet de γ_i que corresponde al valor s del parámetro ($s \in I$).

Al ser fijo el punto $s_0 \in I$, existe un desplazamiento único D de \mathcal{E}_3 que lleva $\mathcal{R}_1(s_0)$ a $\mathcal{R}_2(s_0)$. Sustituyendo γ_1 por $D(\gamma_1)$, queda reducido al caso en que $\mathcal{R}_1(s_0) = \mathcal{R}_2(s_0)$.

b) Designemos por \vec{k} un vector unitario fijo cualquiera de \mathcal{E}_3 y por $(a_i(s), b_i(s), c_i(s))$ sus componentes en la base

$$(\vec{\tau}_i(s), \vec{\nu}_i(s), \vec{\beta}_i(s)) \quad (s \in I; i = 1, 2),$$

o sea

$$a_i = \vec{k} \cdot \vec{\tau}_i, \quad b_i = \vec{k} \cdot \vec{\nu}_i, \quad c_i = \vec{k} \cdot \vec{\beta}_i.$$

Por aplicación de las fórmulas de Frenet, se tiene, para $i = 1, 2$:

$$(1) \quad \frac{da_i}{ds} = \rho b_i, \quad \frac{db_i}{ds} = -\rho a_i - \theta c_i, \quad \frac{dc_i}{ds} = \theta b_i.$$

De ello se deduce fácilmente la relación

$$a_1 \frac{da_2}{ds} + a_2 \frac{da_1}{ds} + b_1 \frac{db_2}{ds} + b_2 \frac{db_1}{ds} + c_1 \frac{dc_2}{ds} + c_2 \frac{dc_1}{ds} = 0,$$

de donde (al ser $a_1(s_0) = a_2(s_0)$, $b_1(s_0) = b_2(s_0)$ y $c_1(s_0) = c_2(s_0)$),

$$a_1(s) a_2(s) + b_1(s) b_2(s) + c_1(s) c_2(s) = \text{Cte} = a_1^2(s_0) + b_1^2(s_0) + c_1^2(s_0) = 1.$$

Combinando la relación $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 1$ con las relaciones $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$ y $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$ (que resultan del hecho de ser \vec{k} unitario) se obtiene

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 = 0,$$

de donde

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

Todo vector fijo unitario de \mathcal{E}_3 tiene pues las mismas componentes en las bases

$$(\vec{\tau}_1(s), \vec{\nu}_1(s), \vec{\beta}_1(s)) \quad \text{y} \quad (\vec{\tau}_2(s), \vec{\nu}_2(s), \vec{\beta}_2(s)).$$

De esto se deduce que estas bases son iguales para todo $s \in I$ (basta aplicar el resultado a tres vectores $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ de \mathcal{E}_3 que formen una base ortonormal).

La relación $\vec{\tau}_1(s) = \vec{\tau}_2(s)$ equivale a $g_2'(s) - g_1'(s) = 0$ y, puesto que es $g_2(s_0) = g_1(s_0)$, se deduce que las funciones g_1 y g_2 son iguales.

Volviendo al caso general a) se ve que γ_2 es la imagen de γ_1 por el desplazamiento D .]

Arcos que admiten ecuaciones intrínsecas dadas

Nos queda por ver si, al igual que en el caso plano, existen arcos que tienen un sistema dado de ecuaciones intrínsecas. Si existe uno por lo menos, la proposición VI.11.1 muestra que los restantes son aquéllos que se deducen de éste mediante movimientos.

La respuesta viene dada por el teorema que sigue.

Teorema VI.11.2

|| Sea (ρ, θ) un par de funciones numéricas definidas en un intervalo I de \mathbf{R} , siendo la función $\rho > 0$ y de clase C^1 , y la función θ continua. Existe entonces un arco regular γ de clase C^3 , sin puntos de inflexión, que tiene a (ρ, θ) como sistema de ecuaciones intrínsecas.

Demostración. El problema equivale a buscar una función $g : I \rightarrow \mathcal{E}_3$ y tres funciones vectoriales $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta} : I \rightarrow E_3$ que verifiquen el sistema diferencial (S) constituido por las ecuaciones

$$(2) \quad \frac{dg}{ds} = \vec{\tau},$$

y

$$(3) \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = -\rho \vec{\tau} - \theta \vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \theta \vec{v}.$$

Se trata pues de un caso particular del problema del sistema de *referencia móvil* que trataremos en el § X.4. Nos limitaremos pues aquí a señalar los puntos esenciales.

a) Elijamos un punto $s_0 \in I$ y un sistema de referencia ortonormal directo cualquiera $\mathcal{R}_0 = (M_0; \vec{\tau}_0, \vec{v}_0, \vec{\beta}_0)$. Supuestas las funciones ρ y θ continuas, el teorema de Cauchy-Lipschitz (véase tomo 4, teorema I) prueba que el sistema diferencial lineal (S) tiene una solución única que verifica las «condiciones iniciales»

$$g(s_0) = M_0, \quad \vec{\tau}(s_0) = \vec{\tau}_0, \quad \vec{v}(s_0) = \vec{v}_0, \quad \vec{\beta}(s_0) = \vec{\beta}_0.$$

b) Las funciones $g, \vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$ obtenidas son evidentemente por lo menos de clase C^1 ; al suponerse la función ρ de clase C^1 , la primera de las relaciones (3) demuestra que $\vec{\tau}$ es de clase C^2 (puesto que su derivada es de clase C^1) y la relación (2) muestra que g es de clase C^3 .

Queda por demostrar que la parametrización g define un arco que tiene a (ρ, θ) como ecuaciones intrínsecas. Para ello, basta con demostrar que, para cada $s \in I$, los vectores $\vec{\tau}(s), \vec{v}(s), \vec{\beta}(s)$ constituyen una base ortonormal directa de \mathcal{E}_3 (puesto que si es así, la parametrización g es normal y las relaciones (3) prueban que $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$ son los vectores de Frenet asociados).

Este resultado es un caso particular del teorema X.4.1; señalemos aquí solamente que se desprende del hecho de que la matriz de los vectores $(d\vec{\tau}/ds, d\vec{v}/ds, d\vec{\beta}/ds)$ en la base $(\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta})$ es antisimétrica.

El arco γ obtenido es evidentemente regular (ya que el vector $dg/ds = \vec{\tau}$ es unitario) y sin puntos de inflexión (puesto que la función curvatura ρ es > 0).

Queda pues demostrado el teorema VI.11.2. En realidad hemos demostrado que *existe un arco único γ que tiene a (ρ, θ) como ecuaciones intrínsecas y que tiene como sistema de referencia de Frenet en un punto s_0 de I un sistema de referencia ortonormal directo \mathcal{R}_0 , arbitrariamente dado.*]]

Observaciones

1. Para que el arco γ obtenido sea de clase C^k , con $k \geq 3$, es necesario y suficiente que la función ρ sea de clase C^{k-2} y la función θ de clase C^{k-3} .

2. Supongamos dadas dos funciones numéricas cualesquiera ρ, θ , continuas en el intervalo I , sin que la función ρ mantenga necesariamente un signo constante. Entonces el sistema diferencial formado por las ecuaciones (2) y (3) sigue admitiendo una solución que define un sistema de referencia ortonormal directo móvil $s \mapsto (g(s); \vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$. La función g es de clase C^2 y constituye una parametrización normal de un arco regular γ ; pero el arco γ puede tener puntos de inflexión (si la función ρ se anula). Por otra parte, si $\rho(s) \neq 0$, el vector normal principal asociado al valor s es $\vec{\nu}(s)$ o $-\vec{\nu}(s)$ según que se tenga $\rho(s) > 0$ o $\rho(s) < 0$.

En cada subarco sin puntos de inflexión de γ , la función curvatura es $s \mapsto |\rho(s)|$ y, si este arco es de clase C^3 , su torsión es $s \mapsto \theta(s)$.

Diremos por extensión que el arco γ así obtenido admite a (ρ, θ) como *ecuaciones intrínsecas algebraicas*. Esta interpretación generaliza el estudio hecho en el caso de los arcos planos en el § VI.7.

Método general de integración

Designemos por $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ una base ortonormal directa de E_3 y por

$$\mathcal{M}(s) = \begin{bmatrix} a_1(s) & b_1(s) & c_1(s) \\ a_2(s) & b_2(s) & c_2(s) \\ a_3(s) & b_3(s) & c_3(s) \end{bmatrix}$$

la matriz de los vectores $\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)$ en esta base ($s \in I$). Se tiene evidentemente

$$a_i = \vec{\tau} \cdot \vec{e}_i, \quad b_i = \vec{\nu} \cdot \vec{e}_i, \quad c_i = \vec{\beta} \cdot \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

y el sistema diferencial vectorial (3) equivale al sistema diferencial escalar (con nueve incógnitas):

$$\frac{da_i}{ds} = \rho b_i, \quad \frac{db_i}{ds} = -\rho a_i - \theta c_i, \quad \frac{dc_i}{ds} = \theta b_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Se reduce pues el problema a hallar tres soluciones (a_i, b_i, c_i) del sistema diferencial escalar lineal

$$(4) \quad \frac{da}{ds} = \rho b, \quad \frac{db}{ds} = -\rho a - \theta c, \quad \frac{dc}{ds} = \theta b$$

tales que la matriz $\mathcal{M}(s)$ sea ortogonal directa.

La parte *b)* de la demostración del teorema VI.11.2 consistía en demostrar que si la matriz $\mathcal{M}(s)$ es ortogonal directa para un valor s_0 de s , lo es para todo valor de s .

Se tomará pues un valor $s_0 \in I$ y se supondrá dado el sistema de referencia ortonormal directo $\mathcal{R}_0 = (g(s_0); \vec{\tau}(s_0), \vec{\nu}(s_0), \vec{\beta}(s_0))$ lo que equivale a dar un punto $M_0 = g(s_0)$ y la matriz ortonormal directa

$$\mathcal{M}(s_0) = \begin{bmatrix} a_{1,0} & b_{1,0} & c_{1,0} \\ a_{2,0} & b_{2,0} & c_{2,0} \\ a_{3,0} & b_{3,0} & c_{3,0} \end{bmatrix}.$$

Seguidamente se determinarán las soluciones de (4) que verifican las condiciones iniciales

$$a(s_0) = a_{i,0}, \quad b(s_0) = b_{i,0}, \quad c(s_0) = c_{i,0} \quad (i = 1, 2, 3).$$

El arco γ buscado queda entonces determinado por la parametrización normal

$$g : M_0 + \int_{s_0}^s \vec{\tau}(u) du,$$

con

$$\vec{\tau}(s) = a_1(s) \vec{e}_1 + a_2(s) \vec{e}_2 + a_3(s) \vec{e}_3.$$

En otros términos, las coordenadas x, y, z , en el sistema de referencia \mathcal{R}_0 , de la parametrización g buscada son:

$$x(s) = \int_{s_0}^s a_1(u) du, \quad y(s) = \int_{s_0}^s a_2(u) du, \quad z(s) = \int_{s_0}^s a_3(u) du.$$

Caso de integrabilidad

En el caso general, la integración del sistema diferencial (4) se reduce, mediante un cambio de variable, a la de una ecuación de Ricatti (véase [9], tomo 1, cap. II). Esta integración no se reduce pues en general a cuadraturas.

El caso de integrabilidad más elemental es aquél en que el sistema diferencial (4) se reduce, mediante un cambio de variable, a un sistema diferencial con coeficientes constantes (véase tomo 4, cap. II). Resulta fácil ver que el caso se da si la función θ/ρ es constante (por otra parte es el único caso en que dicha función es constante).

En efecto, si se tiene $\theta = k\rho$ con $k = \text{Cte}$, el cambio de variable

$$s \mapsto \sigma(s) = \int \rho(s) ds$$

nos lleva al sistema diferencial

$$(5) \quad \frac{da}{d\sigma} = b, \quad \frac{db}{d\sigma} = -a - kc, \quad \frac{dc}{d\sigma} = kb,$$

el cual es de coeficientes constantes.

Para integrar tal sistema, se buscan soluciones particulares reales o complejas de la forma

$$a(\sigma) = A e^{\lambda\sigma}, \quad b(\sigma) = B e^{\lambda\sigma}, \quad c(\sigma) = C e^{\lambda\sigma}$$

con $A, B, C, \lambda = \text{Ctes.}$ Se ve inmediatamente que el número λ ha de verificar la ecuación llamada característica

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & k \\ 0 & -k & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación (6) admite las tres raíces distintas

$$\lambda = 0 \quad \lambda = \pm i \sqrt{1 + k^2}.$$

A la raíz $\lambda = 0$ corresponde la solución particular constante

$$a(\sigma) = -k, \quad b(\sigma) = 0, \quad c(\sigma) = 1.$$

A la raíz $\lambda = \varepsilon i \sqrt{1 + k^2}$ ($\varepsilon = \pm 1$) corresponde la solución particular

$$a(\sigma) = e^{\varepsilon i \omega \sigma}, \quad b(\sigma) = \varepsilon i \omega e^{\varepsilon i \omega \sigma}, \quad c(\sigma) = k e^{\varepsilon i \omega \sigma},$$

donde, para simplificar, hemos puesto $\omega = \sqrt{1 + k^2}$.

De ahí se deduce que las soluciones *reales* de (5) son de la forma

$$\begin{aligned} a(\sigma) &= C_1 \cos(\omega\sigma) + C_2 \sin(\omega\sigma) - kC_3 \\ b(\sigma) &= -C_1 \omega \sin(\omega\sigma) + C_2 \omega \cos(\omega\sigma) \\ c(\sigma) &= kC_1 \cos(\omega\sigma) + kC_2 \sin(\omega\sigma) + C_3 \end{aligned}$$

donde C_1, C_2, C_3 , designan constantes reales arbitrarias.

Tomando sucesivamente $C_1 = 1, C_2 = C_3 = 0$, después $C_1 = C_3 = 0$ y $C_2 = 1$, y finalmente, $C_1 = C_2 = 0$ y $C_3 = 1$, resulta fácil ver que se obtienen tres soluciones, las cuales definen un sistema de referencia *ortogonal*; de ahí se deduce la solución estándar que define un sistema de referencia *ortonormal* directo $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$:

$$a_1(\sigma) = \frac{1}{\omega} \cos(\omega\sigma), \quad b_1(\sigma) = -\sin(\omega\sigma), \quad c_1(\sigma) = \frac{k}{\omega} \cos(\omega\sigma)$$

$$a_2(\sigma) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega\sigma), \quad b_2(\sigma) = \cos(\omega\sigma), \quad c_2(\sigma) = \frac{k}{\omega} \sin(\omega\sigma)$$

$$a_3(\sigma) = -\frac{k}{\omega}, \quad b_3(\sigma) = 0, \quad c_3(\sigma) = \frac{1}{\omega}.$$

Una parametrización del arco γ correspondiente queda definida por sus coordenadas en el sistema de referencia elegido:

$$(7) \quad \begin{aligned} x(\sigma) &= \int a_1(\sigma) ds = \int \frac{1}{\omega} \cos(\omega\sigma) \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)} \\ y(\sigma) &= \int a_2(\sigma) ds = \int \frac{1}{\omega} \sin(\omega\sigma) \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)} \\ z(s) &= \int a_3(\sigma) ds = -\frac{k}{\omega} \int \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)}. \end{aligned}$$

La determinación del arco γ se reduce pues a tres cuadraturas.

Se observará que la relación $a_3(\sigma) = dz/ds = \text{Cte}$ puede traducirse diciendo que el vector tangente $\vec{\tau}$ forma con el tercer eje un ángulo constante. Las curvas que verifican una propiedad de este tipo reciben el nombre de *hélices*. Las estudiaremos en el § siguiente: ello nos permitirá construirlas más fácilmente que por integración del sistema (5).

Para $k = 0$, se obtienen curvas planas según era de prever (ya que entonces $\theta = 0$).

Si se tiene $\rho = \text{Cte}$ y $\theta = \text{Cte}$ se obtiene una hélice circular (véase § 12): *Las hélices circulares son (juntamente con las circunferencias) los únicos arcos de curvatura y torsión constantes.*

§ VI.12 HÉLICES EN \mathcal{E}_3

Definición VI.12.1

*Un arco regular γ de clase C^1 recibe el nombre de **hélice** si sus tangentes forman un ángulo constante V con una dirección fija. Esta dirección recibe el nombre de **eje** de la hélice.*

Equivale a decir que la *indicatriz de las tangentes es un arco plano* (contenido en un plano perpendicular al eje de la hélice), por lo tanto *un arco de circunferencia* (puesto que la indicatriz de las tangentes está sobre la esfera unidad).

Prescindiremos del caso en que $V = 0$ (caso en que la indicatriz de las tangentes se reduce a un punto y en que el soporte de γ es un segmento de recta).

Si $V = \pi/2$, la tangente a γ es paralela a un plano fijo (el plano perpendicular a su eje) y γ es una curva plana.

Supondremos en lo que sigue, que se tiene $0 < V < \pi/2$, en cuyo caso diremos que γ es una hélice propiamente dicha.

Propiedades características de las hélices

VI.12.1 Sea γ un arco regular y sin puntos de inflexión de clase D^3 y de torsión no nula. Entonces, las cuatro propiedades siguientes son equivalentes:

- a) Las tangentes a γ forman un ángulo constante con una dirección fija.
- b) Las normales principales a γ son paralelas a un plano fijo.
- c) Las binormales a γ forman un ángulo constante con una dirección fija.
- d) La función θ/ρ es constante.

(En otros términos, para que γ sea una **hélice**, es necesario y suficiente que verifique una de las propiedades b), c), d).)

Demostración

• $(a) \Rightarrow (b)$.

En efecto, si (a) se cumple, existe un vector fijo unitario \vec{k} que verifica

$$(1) \quad \vec{k} \cdot \vec{\tau}(s) = \text{Cte}.$$

Por derivación, se deduce para todo valor de s

$$(2) \quad \vec{k} \cdot \vec{v}(s) = 0;$$

por lo tanto (b) se cumple.

• $(b) \Rightarrow (c)$.

En efecto, si (b) se cumple, se tiene (2), de donde

$$\frac{d}{ds} [\vec{k} \cdot \vec{\beta}(s)] = \theta(s) \vec{k} \cdot \vec{v}(s) = 0,$$

y

$$(3) \quad \vec{k} \cdot \vec{\beta}(s) = \text{Cte}.$$

por lo tanto se cumple (c).

• $(c) \Rightarrow (a)$.

En efecto, si se cumple (c), se tiene (3); de donde por derivación (ya que la torsión $\theta(s)$ se supone no nula),

$$\vec{k} \cdot \vec{v}(s) = 0.$$

De ahí se deduce

$$\frac{d}{ds} (\vec{k} \cdot \vec{\tau}(s)) = 0,$$

de donde (1).

• (d) \Rightarrow (a).

Pongamos $\theta = \rho \operatorname{tg} \alpha$ ($\alpha = \text{Cte}$). Se tiene entonces:

$$\frac{d}{ds} (\vec{\tau} \operatorname{sen} \alpha - \vec{\beta} \cos \alpha) = (\rho \operatorname{sen} \alpha - \theta \cos \alpha) \vec{v} = 0;$$

el vector $\vec{k} = \vec{\tau} \operatorname{sen} \alpha - \vec{\beta} \cos \alpha$ es pues fijo y verifica

$$\vec{k} \cdot \vec{\tau} = \operatorname{sen} \alpha = \text{Cte},$$

lo cual demuestra que (a) se cumple.

• (a) \Rightarrow (d).

En efecto, si (a) se cumple, se tienen las relaciones (1), (2) y (3), lo cual permite poner

$$(4) \quad \vec{k} = \vec{\tau} \operatorname{sen} \alpha - \vec{\beta} \cos \alpha, \quad \text{con } \alpha = \text{Cte}, \quad 0 < \alpha < \pi$$

(ya que \vec{k} es un vector unitario del plano rectificante engendrado por $\vec{\beta}(s)$ y $\vec{\tau}(s)$).

Por derivación se deduce:

$$(\rho \operatorname{sen} \alpha - \theta \cos \alpha) \vec{v} = 0, \quad \text{o sea } \theta/\rho = \operatorname{tg} \alpha,$$

de donde el resultado. \square

Observación. Si se designa por V el ángulo de $\vec{\tau}$ con el eje de la hélice ($0 < V < \pi/2$), se tiene (eligiendo convenientemente \vec{k}): $\vec{k} \cdot \vec{\tau} = \cos V$, de donde $\vec{k} \cdot \vec{\beta} = \pm \operatorname{sen} V$ y $\theta/\rho = \pm \operatorname{cotg} V$.

Generación geométrica de las hélices

Designemos por γ una hélice de clase C^1 y tomemos un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que el vector \vec{k} esté dirigido según el eje de la hélice. Designemos por γ_1 la proyección de γ sobre el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Supongamos γ definido por la parametrización normal g , de coordenadas (x, y, z) ; se tiene entonces

$$(5) \quad \frac{dz}{ds} = \cos V$$

donde V designa el ángulo del vector \vec{k} con los vectores tangentes a γ (supuesto el vector \vec{k} elegido de manera que se tenga $0 < V < \pi/2$).

Se tiene en consecuencia

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 - dz^2 = \sin^2 V \cdot ds^2$$

y la función $s_1 = s \sin V$ es un parámetro normal en γ_1 .

La relación (5) implica

$$z = s_1 \cotg V + z_0, \quad \text{con} \quad z_0 = \text{Cte},$$

lo que justifica la construcción de γ a partir de γ_1 (esquemática en la figura 12): sobre la perpendicular al plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$ trazada por el punto M_1 de γ_1 se lleva una longitud $M_1 M$ igual a una función afín del parámetro s_1 de M_1 sobre γ_1 .

Esta construcción muestra que *toda hélice propiamente dicha es un arco simple*. En efecto, la coordenada z es un parámetro admisible en γ .

Designemos por Σ el cilindro recto de base γ_1 y de generatrices paralelas a \vec{k} : las hélices que se proyectan según γ_1 son los arcos trazados sobre Σ , cuya tangente forma un ángulo constante con las generatrices de Σ . Un estudio más de-

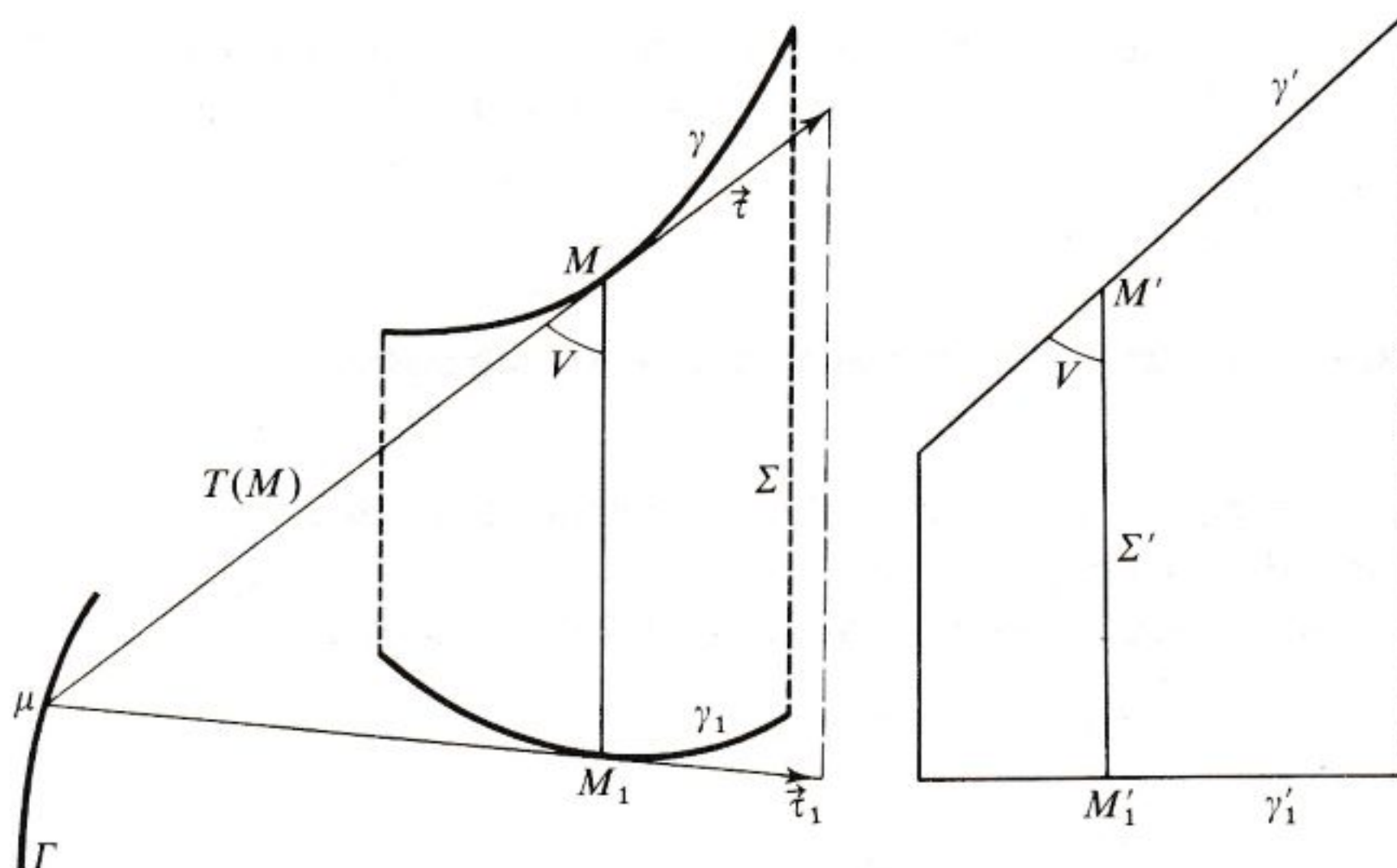


Figura 12.

tenido permite demostrar que son las **geodésicas** de Σ , es decir las curvas de longitud mínima.

Se pueden realizar materialmente estas hélices trazando rectas sobre una hoja de papel y aplicando esta hoja sobre el cilindro (véase la figura 12). Existe en efecto una aplicación isométrica $M \mapsto M'$ de Σ en una porción de plano Σ' tal que la imagen de γ sea una recta γ' .

Evolventes de las hélices

Mantengamos las notaciones anteriores y designemos por $T(M)$ la tangente orientada al arco γ en el punto $M = g(s)$. Esta recta forma con Oz un ángulo igual a V y corta al plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en un punto μ que pertenece a la tangente a γ_1 en el punto M_1 (véase la figura 12).

Estando la tangente a γ_1 orientada en el sentido de las s_1 crecientes, se tiene, mediante un cálculo fácil

$$\overline{\mu M_1} = \overline{M_1 M} \operatorname{tg} V = z \operatorname{tg} V = s_1 + z_0 \operatorname{tg} V,$$

o sea, $\overline{\mu M_1} = s_1 + \text{Cte}$, y

$$\overline{\mu M} = \frac{\overline{M_1 M}}{\cos V} = \frac{z}{\cos V} = s + \text{Cte},$$

de donde resulta que el arco Γ descrito por el punto μ es a la vez una evolvente de γ y de γ_1 .

Todas las hélices de eje paralelo a \vec{k} y trazadas sobre el cilindro Σ tienen pues la misma familia de evolventes, a saber, las evolventes de las secciones rectas de Σ .

Determinación de una hélice por sus ecuaciones intrínsecas

Designemos por $\vec{\tau}_1$ el vector unitario tangente a γ_1 en el punto M_1 y por ρ_1 la *curvatura algebraica* de γ_1 en este punto.

Manteniendo para γ las notaciones usuales, se tiene (véase la figura 12)

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 \operatorname{sen} V + \vec{k} \cos V,$$

de donde

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \operatorname{sen} V \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = \operatorname{sen}^2 V \frac{d\vec{\tau}_1}{ds_1} = \rho_1 \operatorname{sen}^2 V \vec{\nu}_1,$$

designando aquí por \vec{v}_1 el vector normal a γ_1 deducido de $\vec{\tau}_1$ por rotación de $+\pi/2$ (véase § 6 teniendo en cuenta el cambio de notación).

De ahí se deduce, en primer lugar,

$$\rho = \left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\| = |\rho_1| \sin^2 V \quad \text{y} \quad \vec{v} = \varepsilon \vec{v}_1,$$

con $\varepsilon = +1$ si $\rho_1 > 0$ y $\varepsilon = -1$ si $\rho_1 < 0$.

Se tiene pues

$$\vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{v} = \varepsilon (\vec{k} \sin V - \vec{\tau}_1 \cos V),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\beta}}{ds} &= -\varepsilon \cos V \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = -\varepsilon \sin V \cos V \frac{d\vec{\tau}_1}{ds_1} \\ &= -\varepsilon \sin V \cos V \rho_1 \vec{v}_1 = -\sin V \cos V \rho_1 \vec{v}, \end{aligned}$$

y finalmente la *torsión*:

$$\theta = -\rho_1 \sin V \cos V.$$

Si se nos dan dos funciones ρ , θ tales que la relación θ/ρ sea constante, podemos calcular el ángulo V y la curvatura algebraica de γ_1 mediante las relaciones

$$\cotg V = \left| \frac{\theta}{\rho} \right| \left(0 < V < \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{y} \quad \rho_1 = \frac{-\theta}{\sin V \cos V}$$

o sea

$$\rho_1 = -\frac{\rho^2 + \theta^2}{|\rho\theta|} \theta.$$

Podemos entonces construir el arco plano γ_1 definido por la ecuación intrínseca algebraica ρ_1 , y de ahí deducir las ecuaciones paramétricas de γ utilizando la relación

$$z = s_1 \cotg V + \text{Cte}.$$

Este método resulta más rápido que el método directo expuesto en el § 11.

Capítulo VII

Construcción de curvas planas

Introducción

Si γ es un arco geométrico del plano afín, su estudio teórico se puede completar mediante un trazado (por lo menos aproximado) de su soporte, y desde un punto de vista práctico, se dice entonces que «se construye la curva γ ». Este problema de construcción es el que vamos a estudiar en este capítulo mostrando, mediante ejemplos, el método a seguir.

Para hacerlo, supondremos que el «plano» considerado se halla provisto de una estructura euclídea (si es preciso orientada); eligiendo un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (eventualmente directo) identificaremos este plano con \mathbf{R}^2 (o, en algunos casos, con \mathbf{C}). Quitando el caso de las cónicas (véase § III.4) carece en general de interés trazar arcos referidos a sistemas de referencia afines cualesquiera.

Se observará que el problema de la representación de los arcos de un espacio de dimensión ≥ 3 se reduce, en la práctica, a la construcción de sus *proyecciones* sobre planos convenientemente elegidos (esto es el principio de la Geometría descriptiva). En todos los casos se reduce pues el problema a la construcción de *arcos planos*.

§ VII.1 UN EJEMPLO DE PARAMETRIZACIÓN CARTESIANA

Propongámonos el estudio de las curvas de ecuación

$$y^2 = P(x), \quad \text{con} \quad P(x) = x^3 + px + q \quad (p \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{R}).$$

Son *cúbicas*, es decir curvas algebraicas de grado 3 (véase § V.12). Todas ellas tienen al eje Ox como eje de simetría. El procedimiento más rápido para estudiarlas consiste en trazar la gráfica de la función $y = \sqrt{P(x)}$ en los intervalos en que $P(x) \geq 0$ y completar seguidamente por simetría.

Si $q \neq 0$, se puede escribir

$$P(x) = k^3 [x'^3 - 3 \lambda x' + 2],$$

con

$$k = \left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} \quad \text{y} \quad x' = \frac{x}{k}, \quad \lambda = -\frac{p}{3k^2}.$$

Poniendo $y = k^{3/2} y'$ si $k > 0$, e $y = (-k)^{3/2} y'$ si $k < 0$, la ecuación $y^2 = P(x)$ equivale a

$$y'^2 = x'^3 - 3 \lambda x' + 2 \quad \text{si} \quad k > 0$$

y a

$$y'^2 = -(x'^3 - 3 \lambda x' + 2) \quad \text{si} \quad k < 0.$$

Se sigue que (salvo afinidades) se agotan todos los casos posibles estudiando las tres familias siguientes de cúbicas con un parámetro (Γ_λ) , (Γ'_λ) y (C_μ) , definidas respectivamente por

- (1) $y^2 = P_\lambda(x) = x^3 - 3 \lambda x + 2 \quad (\lambda \in \mathbf{R})$
- (2) $y^2 = -P_\lambda(x) \quad (\lambda \in \mathbf{R})$
- (3) $y^2 = Q_\mu(x) = x^3 - 3 \mu x \quad (\mu \in \mathbf{R}).$

Estudio de las cúbicas $y^2 = P_\lambda(x) = x^3 - 3 \lambda x + 2$

Pongamos $\Delta = -27(\lambda^3 - 1)$. Si $\Delta > 0$, P_λ tiene solamente una raíz real $\alpha(\lambda)$ que es simple y tal que $\alpha(\lambda) < -2$. Si $\Delta < 0$, P_λ tiene tres raíces reales $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\gamma(\lambda)$, simples y tales que

$$\alpha(\lambda) < -2 < 0 < \beta(\lambda) < 1 < \gamma(\lambda).$$



Si $\Delta = 0$, o sea $\lambda = 1$, se tiene: $P_\lambda(x) = (x-1)^2(x+2)$.
Por otra parte se tiene: $P'_\lambda(x) = 3(x^2 - \lambda)$.

En todo intervalo en el que es $P_\lambda(x) > 0$, la derivada de $y = \sqrt{P_\lambda(x)}$ viene dada por $y'(x) = \frac{1}{2y} P'_\lambda(x)$; se determina pues inmediatamente su signo y la variación de y . Se ve que pueden presentarse cinco casos:


a) $\lambda < 0$; b) $\lambda = 0$; c) $0 < \lambda < 1$; d) $\lambda = 1$; e) $\lambda > 1$.

En cada uno de estos casos las variaciones de y vienen indicadas por los cuadros siguientes:


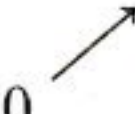
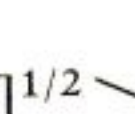
a) $\lambda < 0$

x	$-\infty$	$-2^{1/3}$	$\alpha(\lambda)$	0	$+\infty$
$P'_\lambda(x)$			+		
$P_\lambda(x)$	-		0	+	
y				0	$+\infty$
					


b) $\lambda = 0$

x	$-\infty$	$-2^{1/3}$	0	$+\infty$
$P'_0(x)$			0	
$P_0(x)$	$-$	0	$+$	
y				$0 \rightarrow +\infty$



c) $\lambda \in]0, 1[$

x	$-\infty$	-2	$\alpha(\lambda)$	$-2^{1/3}$	$-\sqrt{\lambda}$	$\sqrt{\lambda}$	$+\infty$	
$P'_\lambda(x)$			+		0	-	0	+
$P_\lambda(x)$		-	0			+		
y				0		$[2(1+\lambda^{3/2})]^{1/2}$		$+\infty$
						$[2(1-\lambda^{3/2})]^{1/2}$		

d) $\lambda = 1$

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
$P'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$P_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
y				$0 \nearrow 2 \searrow 0 \nearrow +\infty$		

e) $\lambda > 1$

x	$-\infty$	$\alpha(\lambda)$	$-\sqrt{\lambda}$	0	$\beta(\lambda)$	1	$\sqrt{\lambda}$	$\gamma(\lambda)$	$+\infty$
$P'_\lambda(x)$		$+$	0		$-$	0		$+$	
$P_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y			$0 \nearrow [2(1+\lambda^{3/2})]^{1/2} \searrow 0$					$0 \nearrow +\infty$	

En cada uno de los cinco casos, la rama infinita obtenida para $x \rightarrow +\infty$ es *parabólica, de dirección Oy*.

En los casos *a)*, *b)*, *c)*, *e)*, los puntos sobre *Ox* son de tangente vertical. En el caso *d)*, el punto $(-2, 0)$ es de tangente vertical, mientras que el punto $(1, 0)$ es *doble, de ramas reales*, teniendo las tangentes en este punto por pendientes $\pm\sqrt{3}$; por otra parte, entre las Γ_λ , (Γ_1) es la única cúbica con punto singular.

Se comprueba finalmente que para $\lambda \leq 1$ (Γ_λ) presenta una única componente conexa, mientras que para $\lambda > 1$ tiene *dos componentes conexas*, de las cuales una es compacta mientras que la otra tiene la rama infinita ⁽¹⁾.

En la figura 1 hemos representado la forma de (Γ_λ) en cada uno de los cinco casos anteriormente mencionados. En la figura 2, donde se hallan representadas todas las formas, se observa la «variación continua» de (Γ_λ) cuando λ describe \mathbf{R} .

⁽¹⁾ No hay que concluir que la componente conexa compacta sea una cónica: recordemos que si una cúbica contiene a una cónica es necesariamente la reunión de esta cónica con una *recta*: resulta entonces que está descompuesta.

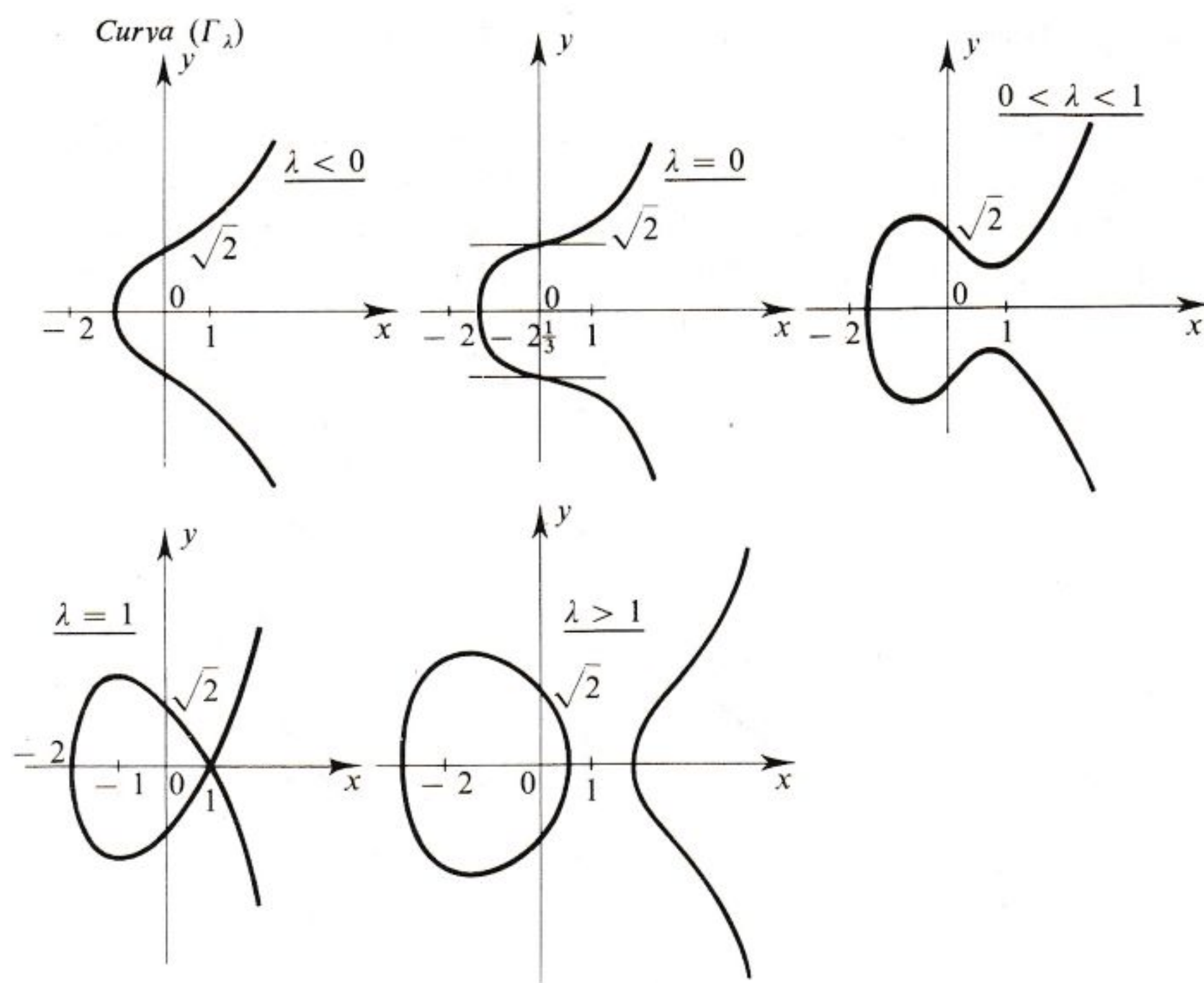


Figura 1.

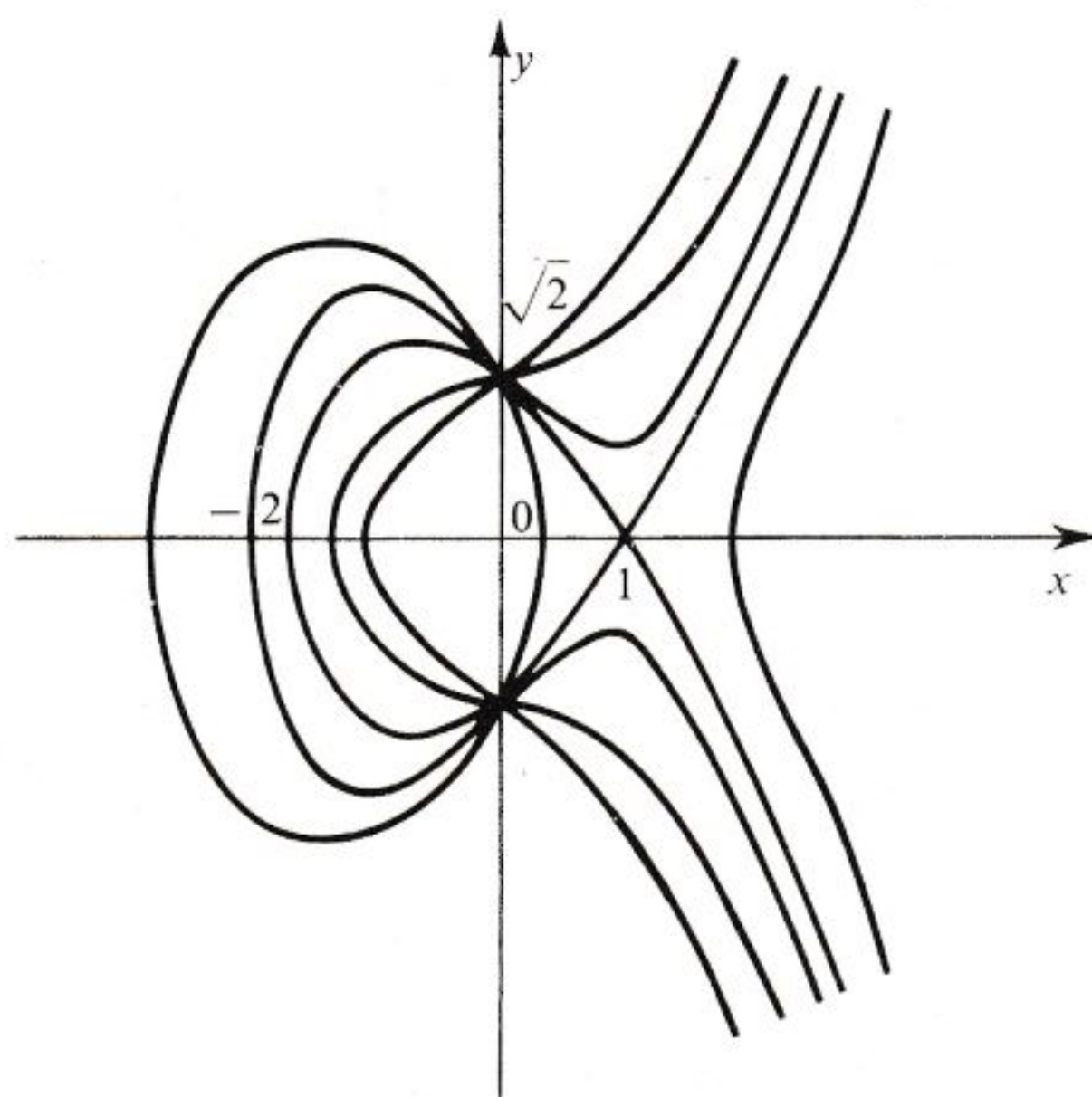


Figura 2.

Estudio de las cúbicas $y^2 = -P_\lambda(x) = -x^3 - 3\lambda x - 2$

Los cuadros de variaciones de $P_\lambda(x)$ antes trazados permiten efectuar un estudio análogo al anterior, sin nuevos cálculos. Se distinguen aquí tres casos según los valores de λ ; las curvas correspondientes se hallan representadas en la figura 3. La figura 4 da una idea de la deformación continua de Γ'_λ al variar λ .

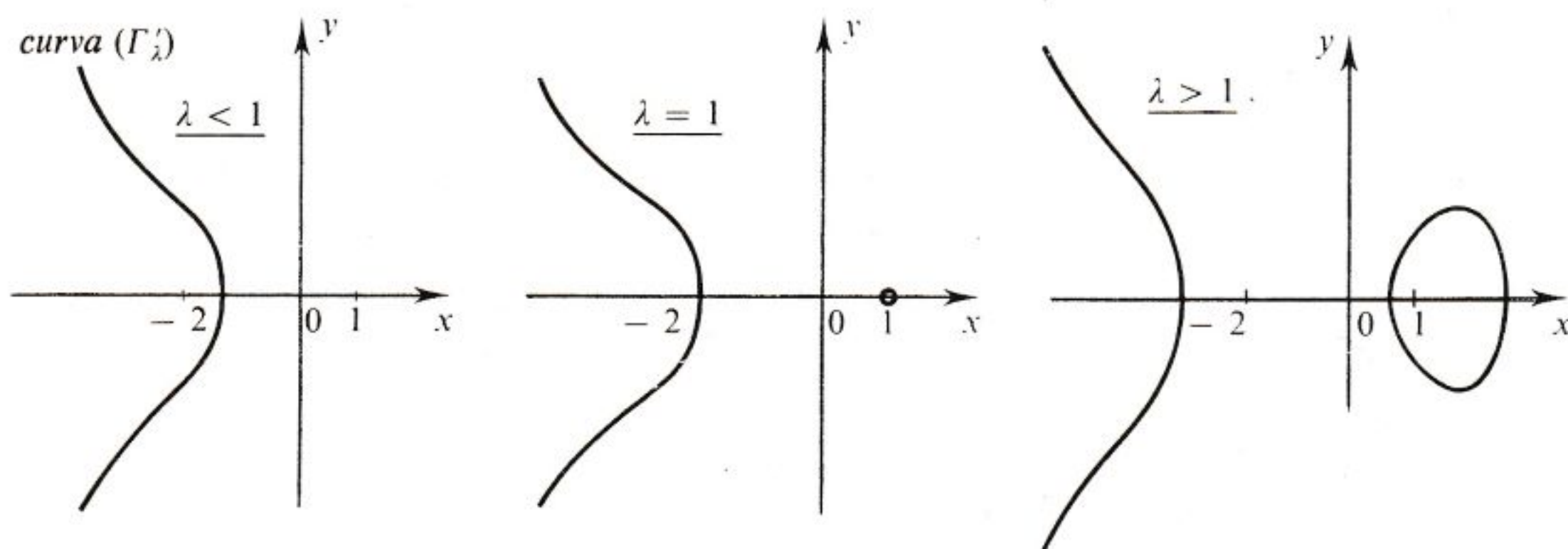


Figura 3

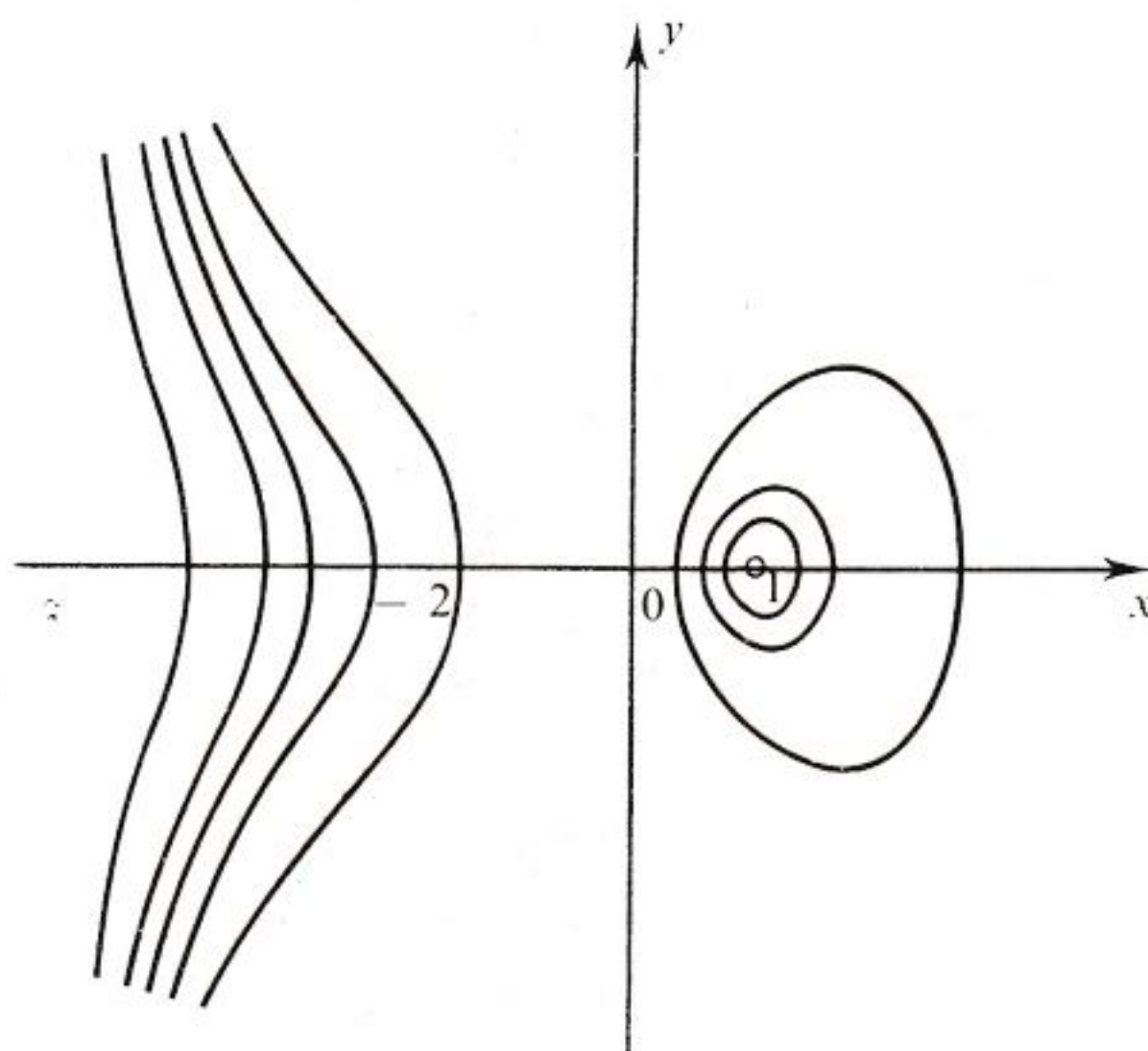


Figura 4.

Llegamos a las conclusiones siguientes:

Para $\lambda \neq 1$, todos los puntos de (Γ'_λ) situados sobre Ox tienen tangentes verticales.

Todas las (Γ'_λ) tienen (para $x \rightarrow -\infty$) una rama parabólica de dirección Oy .

Para $\lambda < 1$, Γ'_λ presenta una única componente conexa y, para $\lambda \geq 1$, presenta dos de ellas, de las cuales una es compacta; si $\lambda = 1$, la componente conexa compacta se reduce al punto $(1, 0)$ el cual es por otra parte, un *punto doble de ramas imaginarias* sobre Γ'_λ . Entre las Γ'_λ , la cúbica Γ'_1 es la única que tiene un punto singular.

Estudio de las cúbicas $y^2 = Q_\mu(x) = x^3 - 3\mu x$

Siendo la técnica de estudio la misma, nos encontramos con los tres casos $\mu > 0$, $\mu = 0$ y $\mu < 0$. Si $\mu > 0$, la cúbica (C_μ) presenta dos componentes conexas (de las cuales una es compacta) y si $\mu \leq 0$ (C_μ) tiene solamente una componente conexa. Todas las C_μ tienen (para $x \rightarrow +\infty$) una *rama parabólica* de dirección Oy . Para $\mu \neq 0$, los puntos de intersección con Ox son de tangentes verticales. La única curva C_μ que tiene un punto singular es C_0 (de ecuación $y^2 = x^3$), sobre esta curva, el origen es punto singular y presenta la disposición de *retroceso de primera especie*. Las curvas (C_μ) se hallan representadas en las figuras 5 y 6.

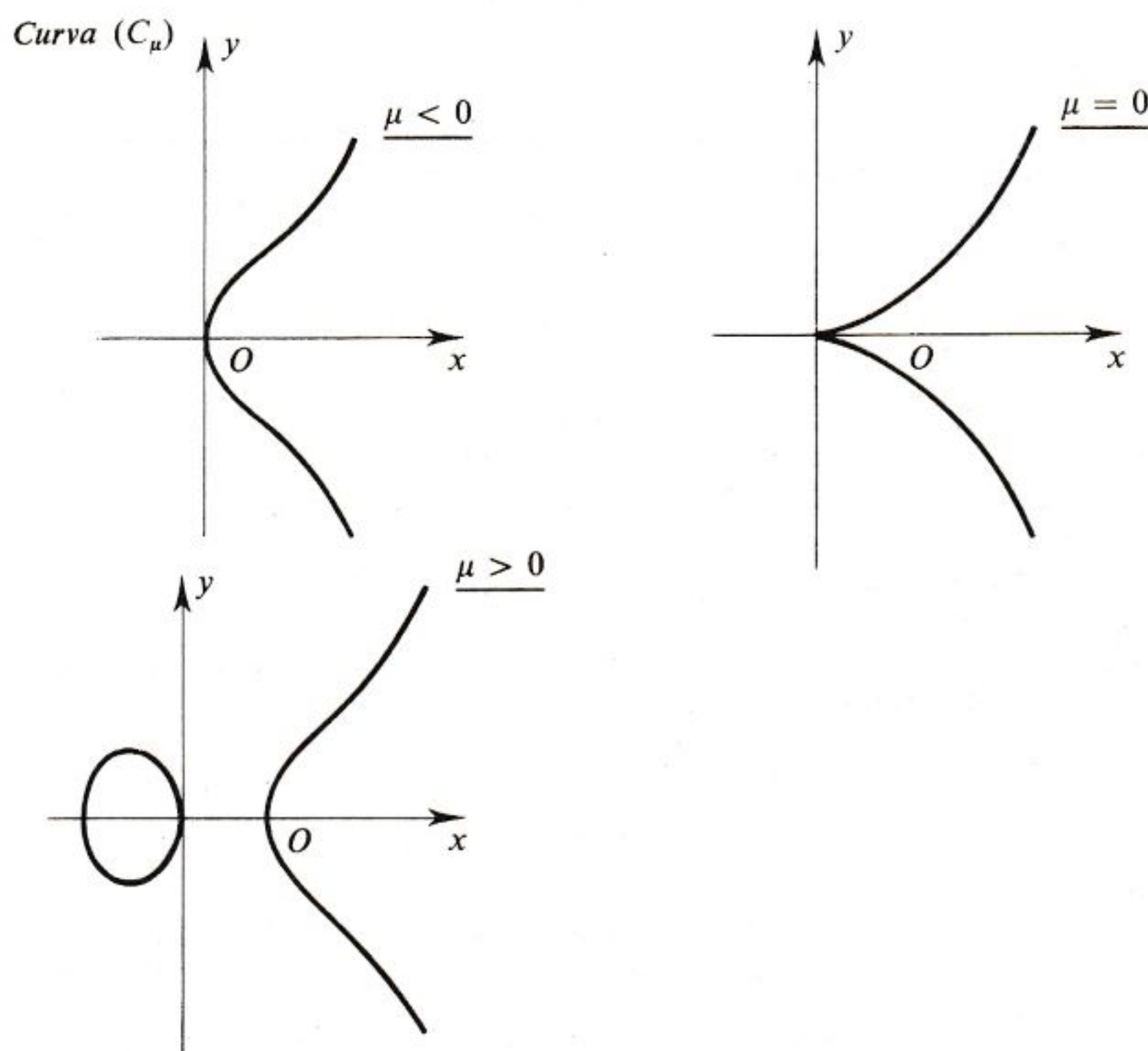


Figura 5.

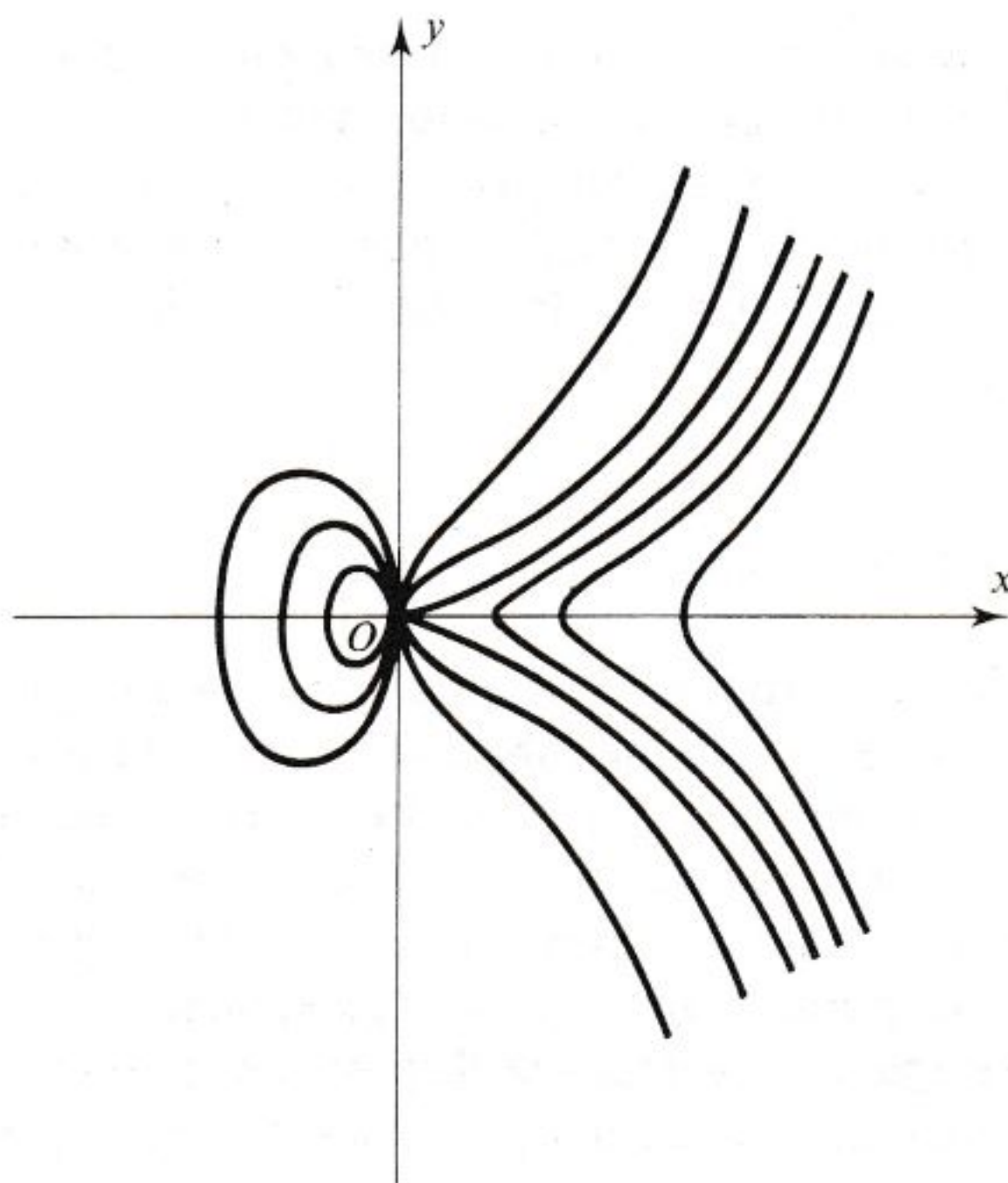


Figura 6.

Para terminar, he aquí algunas ideas sobre lo que sería un estudio más profundo de las cúbicas anteriores, en el cuadro de la *Geometría proyectiva compleja*.

En el *plano proyectivo complejo* $P_2(\mathbf{C})$, sea $\hat{\Gamma}$ la cúbica de la cual una ecuación en coordenadas homogéneas en el sistema de referencia canónico es

$$X^3 - Y^2 T + pXT^2 + qT^3 = 0.$$

La cúbica Γ de \mathbf{R}^2 , de ecuación $y^2 = x^3 + px + q (= P(x))$ puede ser considerada como la *traza de $\hat{\Gamma}$ sobre \mathbf{R}^2* ; $\hat{\Gamma}$ recibe el nombre de *completada proyectiva* de Γ en $P_2(\mathbf{C})$, y es la reunión de los puntos $(x, y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ tales que $y^2 = x^3 + px + q$, y del «punto del infinito» definido por $T = 0, X = 0$.

Se vería entonces que el punto del infinito de $\hat{\Gamma}$ es *punto de inflexión* de $\hat{\Gamma}$, siendo la tangente de inflexión la recta del infinito de \mathbf{C}^2 .

La determinación de los puntos de inflexión reales de Γ se reduce a resolver el sistema: $(x \in \mathbf{R}, y''(x) = 0, P(x) \geq 0)$, equivalente a:

$$(S) \quad \begin{cases} x \in \mathbf{R}, & P(x) \geq 0 & \text{y} \\ (4) & 2P(x)P''(x) - P'(x)^2 = 0. \end{cases}$$

La ecuación (4) es de grado cuatro. Cada una de las soluciones de (S) proporciona dos puntos de inflexión (salvo si $P(x) = 0$, en cuyo caso nos volvemos a encontrar con un punto singular de Γ). Por lo tanto Γ presenta a lo sumo ocho puntos de inflexión reales.

Un estudio detallado de las cúbicas $\Gamma_\lambda, \Gamma'_\lambda$ y C_μ demostraría fácilmente que Γ tiene siempre exactamente *dos* puntos de inflexión reales. Siendo poco satisfactorio este resultado, resulta pre-

ferible buscar todos los puntos de inflexión de $\hat{\Gamma}$ en $P_2(\mathbf{C})$. Prescindiendo del punto en el infinito, estos puntos vienen dados por el sistema

$$y^2 = P(x), \quad 2 P(x) P''(x) - P'(x)^2 = 0$$

y esta vez (salvo si $\hat{\Gamma}$ tiene un punto singular) nos encontramos con que $\hat{\Gamma}$ tiene siempre *nueve puntos de inflexión*, de los cuales aquí uno se halla en el infinito. Este resultado está esta vez de acuerdo con la teoría general de las cúbicas planas de $P_2(\mathbf{C})$. (Se demuestra en efecto que toda cúbica de $P_2(\mathbf{C})$ sin punto singular admite exactamente nueve puntos de inflexión.) Véase [14].

§ VII.2 ESTUDIO GLOBAL DE PARAMETRIZACIONES

El problema que se plantea en la práctica es el de construir la *imagen* Γ de una aplicación $f: D \rightarrow \mathbf{R}^2$, $t \mapsto [X(t), Y(t)]$, donde D designa un *abierto* de \mathbf{R} .

En general, se empezará por estudiar las *variaciones* de las componentes X, Y de f , y se intentará descomponer D en intervalos en los cuales cada una de estas funciones sea estrictamente monótona. La restricción de f a cada uno de estos intervalos define entonces un *arco simple*.

En ciertos casos, podrá resultar útil efectuar un cambio de variable (no necesariamente biyectivo); por ejemplo, el estudio de la parametrización $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$ ($t \in \mathbf{R}$) se reduce al de la parametrización $x = u$, $y = u^2$ ($-1 \leq u \leq 1$).

Puede ocurrir que D sea la reunión de intervalos tales que las restricciones de f a estos intervalos definan el mismo arco geométrico. En este caso, bastará con hacer variar el parámetro t en uno de dichos intervalos.

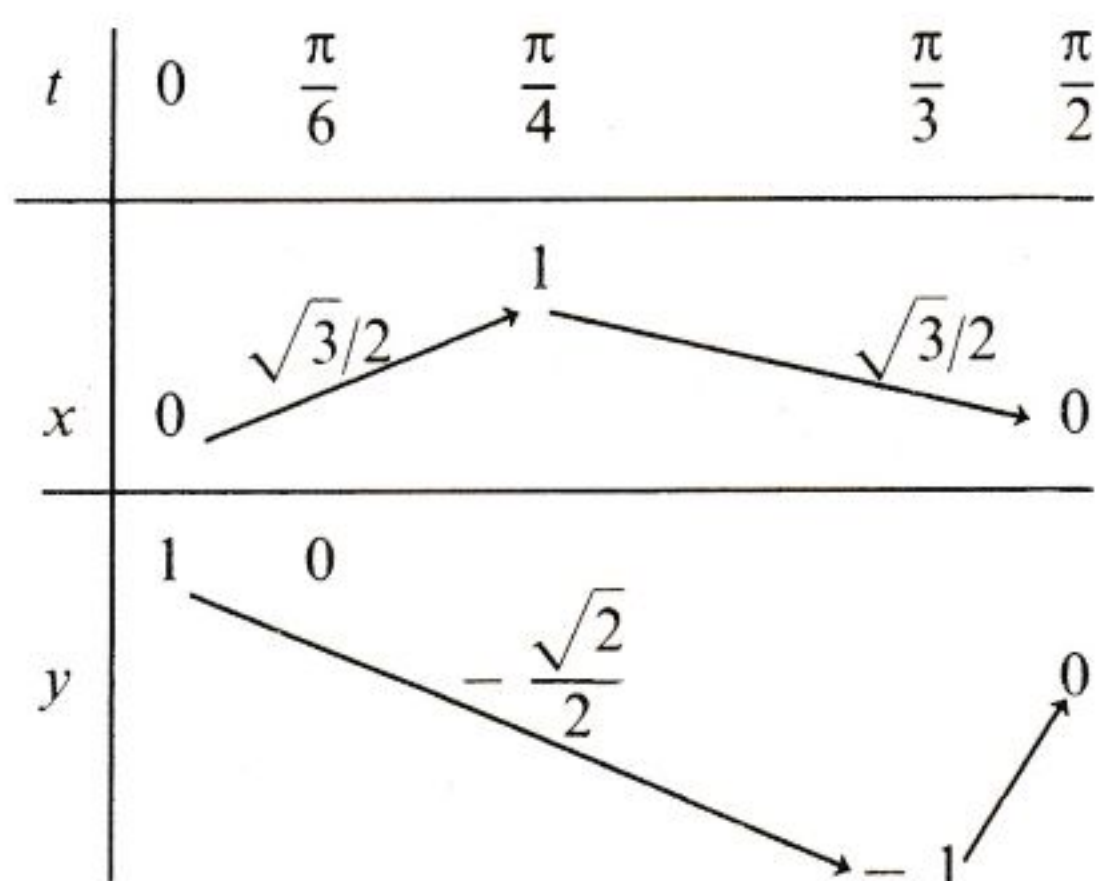
Por ejemplo, si f es *periódica* y, de período T , basta con hacer variar t en un intervalo de longitud T ; si, además, f es *par*, basta con hacer variar t en el intervalo $[0, T/2]$.

Otras consideraciones de simetría pueden permitir todavía reducir el intervalo de variación de t .

Ejemplo: Estudiar la parametrización $x = \sin 2t$, $y = \cos 3t$ (ejemplo de «curva de Lissajous»).

Puesto que las funciones dadas tienen como período 2π , nos podemos limitar al intervalo $[-\pi, +\pi]$ (de hecho, el estudio de los puntos dobles mostrará que la parametrización obtenida por restricción a este intervalo es propia). Además, el cambio de t por $-t$ equivale a efectuar sobre la curva una simetría respecto a Oy , y el cambio de t por $\pi - t$ equivale a efectuar una simetría respecto a Ox . Basta por lo tanto estudiar el subarco definido por $t \in [0, \pi/2]$ y completar segui-

damente por simetría. Las variaciones de $x(t)$ e $y(t)$ en este intervalo se obtienen inmediatamente



El trazado hace aparecer puntos dobles, los cuales buscaremos resolviendo el sistema: $\sin 2t_1 = \sin 2t_2$, $\cos 3t_1 = \cos 3t_2$; $t_1 \neq t_2$.

Las dos primeras relaciones se escriben

$$(1) \quad \sin(t_1 - t_2) \cos(t_1 + t_2) = 0$$

$$(2) \quad \sin\left[\frac{3}{2}(t_1 - t_2)\right] \sin\left[\frac{3}{2}(t_1 + t_2)\right] = 0.$$

Nos podemos limitar a la determinación de los valores $t_1 \in]0, \pi/2[$; la relación (1) equivale entonces a

$$(t_1 - t_2 = \pi) \quad \text{o} \quad (t_1 + t_2 = k_1 \frac{\pi}{2}, \quad k_1 = \pm 1),$$

y (2) equivale a

$$(t_1 - t_2 = 2k_2 \frac{\pi}{3}, \quad k_2 = -1, +1 \quad \text{o} \quad +2),$$

o

$$(t_1 + t_2 = 2k_3 \frac{\pi}{3}, \quad k_3 = -1, 0, +1 \quad \text{o} \quad +2).$$

El sistema

$$(t_1 - t_2 = \pi, \quad t_1 + t_2 = 2k_3 \frac{\pi}{3})$$

proporciona dos valores admisibles de t_1 , a saber $t_1 = \pi/6$ y $t_1 = \pi/2$, que corresponden a los puntos dobles que se ven.

El sistema

$$(t_1 + t_2 = k_1 \frac{\pi}{2}, \quad t_1 - t_2 = 2 k_2 \frac{\pi}{3})$$

proporciona $t_1 = (4 k_2 \pm 3) \frac{\pi}{12}$,

de donde los dos valores posibles $t_1 = \frac{\pi}{12}$, $t_1 = \frac{5\pi}{12}$.

De ahí se deduce fácilmente que los cuatro valores

$$t_1 = \frac{\pi}{12}, \quad t_1 = \frac{5\pi}{12}, \quad t_1 = \frac{7\pi}{12}, \quad t_1 = \frac{11\pi}{12}$$

dan los cuatro puntos dobles distintos no situados sobre Ox (véase la figura 7).

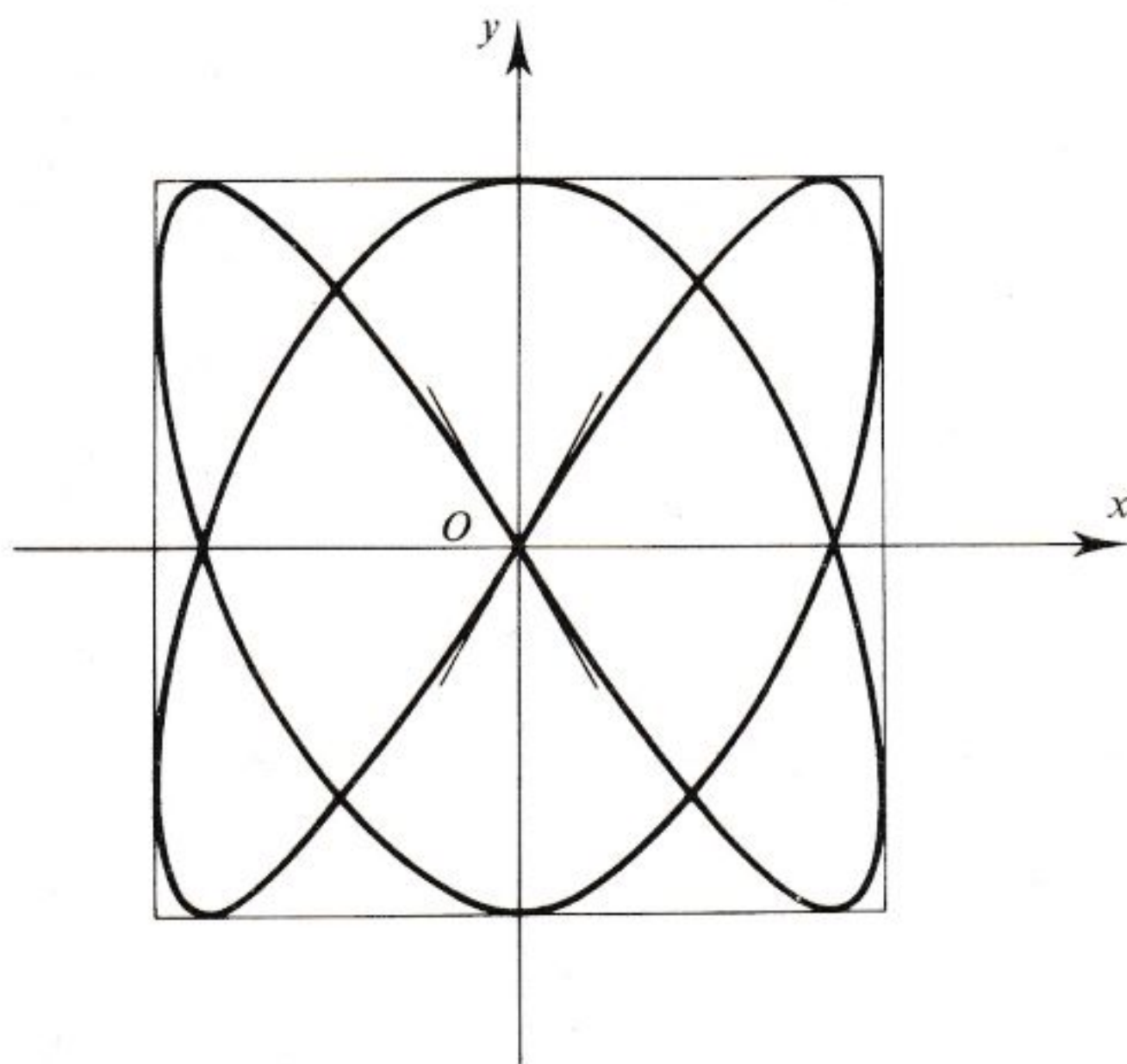


Figura 7.

En el § siguiente, estudiaremos el caso particular de las parametrizaciones racionales (recibiendo las curvas que definen el nombre de *unicursales*).

Curvas unicursales

Sea E un plano afín y D un abierto de \mathbf{R} . Se dice que una aplicación $f: D \rightarrow E$ es *racional* si existe un sistema de referencia de E en el cual las coordenadas de f se expresen mediante fracciones racionales del parámetro (en cuyo caso ocurre lo mismo para *todo* sistema de referencia de E). En este caso, el conjunto de definición D de f está formado por \mathbf{R} quitando un número finito de puntos.

Se dice que una aplicación racional $f: D \rightarrow E$ es *propia* si su imagen admite solamente un número finito de puntos múltiples, e *impropia* en el caso contrario.

Si f es una aplicación racional impropia no constante, se puede demostrar que existe una función racional del parámetro, tal como $\theta: t \mapsto \theta(t)$ y una aplicación racional *propia* F de tal modo que se tiene:

$$f(t) = F[\theta(t)]$$

salvo para un número finito de valores de t . La imagen de f se halla entonces contenida en la imagen de F .

Por ejemplo, la parametrización racional impropia $f: x = t^2, y = t^4$, se deduce de la parametrización propia $F: x = u, y = u^2$ poniendo $u = t^2$.

La imagen de una aplicación racional propia f , eventualmente completada por el punto $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t)$ (si existe) recibe el nombre de **curva unicursal**.

Por ejemplo, la circunferencia unidad es la curva unicursal definida por la parametrización

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ejemplos

1. Estudio de la cúbica unicursal de E_2 definida por

$$x = \frac{t^2}{(1-t^2)(1-2t)}, \quad y = \frac{t^3}{(1-t^2)(1-2t)}.$$

Se tiene

$$x'(t) = \frac{-2t(t^3 + t - 1)}{(1-t^2)^2(1-2t)^2}, \quad y'(t) = \frac{-t^2(t^2 + 4t - 3)}{(1-t^2)^2(1-2t)^2}.$$

El trinomio $t^2 + 4t - 3$ se anula para $t = \pm\sqrt{7} - 2$. El polinomio $t^3 + t - 1$

tiene una única raíz real α tal que $\sqrt{7}-2 < \alpha < 1$. De donde el cuadro de las variaciones simultáneas de x e y

t	$-\infty$	$-\sqrt{7}-2$	-1	0	$1/2$	$\sqrt{7}-2$	α	1	$+\infty$
$x'(t)$	-		- 0 +			+ 0 -		-	
$x(t)$	$0 \xrightarrow{a} -\infty$		$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$			$-\infty \xrightarrow{b} M_1 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$	
$y(t)$	$1/2 \searrow m \nearrow +\infty$		$-\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow M_2 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 1/2$	
$y'(t)$	-	0	+	+	0	+	-	-	-

Con la regla de cálculo se obtiene, con una aproximación de $2 \cdot 10^{-2}$

$$a = 0,10, \quad m = 0,47, \quad b = -2,50, \quad M_1 = -2,50, \quad M_2 = -1,60.$$

El punto estacionario (para $t = 0$) es un retroceso de primera especie, siendo la tangente Ox , ya que $y/x = t$.

Las ramas infinitas $t = -1$, $t = \frac{1}{2}$ y $t = 1$ se estudian respectivamente calculando $y + x$, $y - \frac{1}{2}x$ e $y - x$,

$$y + x = \frac{t^2}{(1-t)(1-2t)}, \quad y - \frac{1}{2}x = \frac{t^2}{2(t^2-1)},$$

$$y - x = \frac{-t^2}{(1+t)(1-2t)}.$$

De donde se obtienen las asíntotas respectivas

$$y = -x + \frac{1}{6} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}, \quad y = x + \frac{1}{2}.$$

La posición de la curva respecto a las asíntotas resulta en cada caso poniendo $h = t + 1$, $h = t - \frac{1}{2}$ y $h = t - 1$, respectivamente, de donde

$$y + x = \frac{1}{6} - \frac{5}{36}h + O(h^2), \quad y - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{6} - \frac{8}{9}h + O(h^2)$$

y

$$y - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + O(h^2).$$

Para determinar los puntos de inflexión, se puede resolver el sistema

$$t \neq \pm 1, \quad t \neq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = 0;$$

se encuentra de este modo un *punto único*, obtenido para $t = 3/2$, de coordenadas $(9/10, 27/20)$. Pero hubiese sido más rápido, al ser la curva unicursal, proceder con ayuda de las *condiciones de alineamiento* (véase ejercicio V.2) (véase la figura 8).

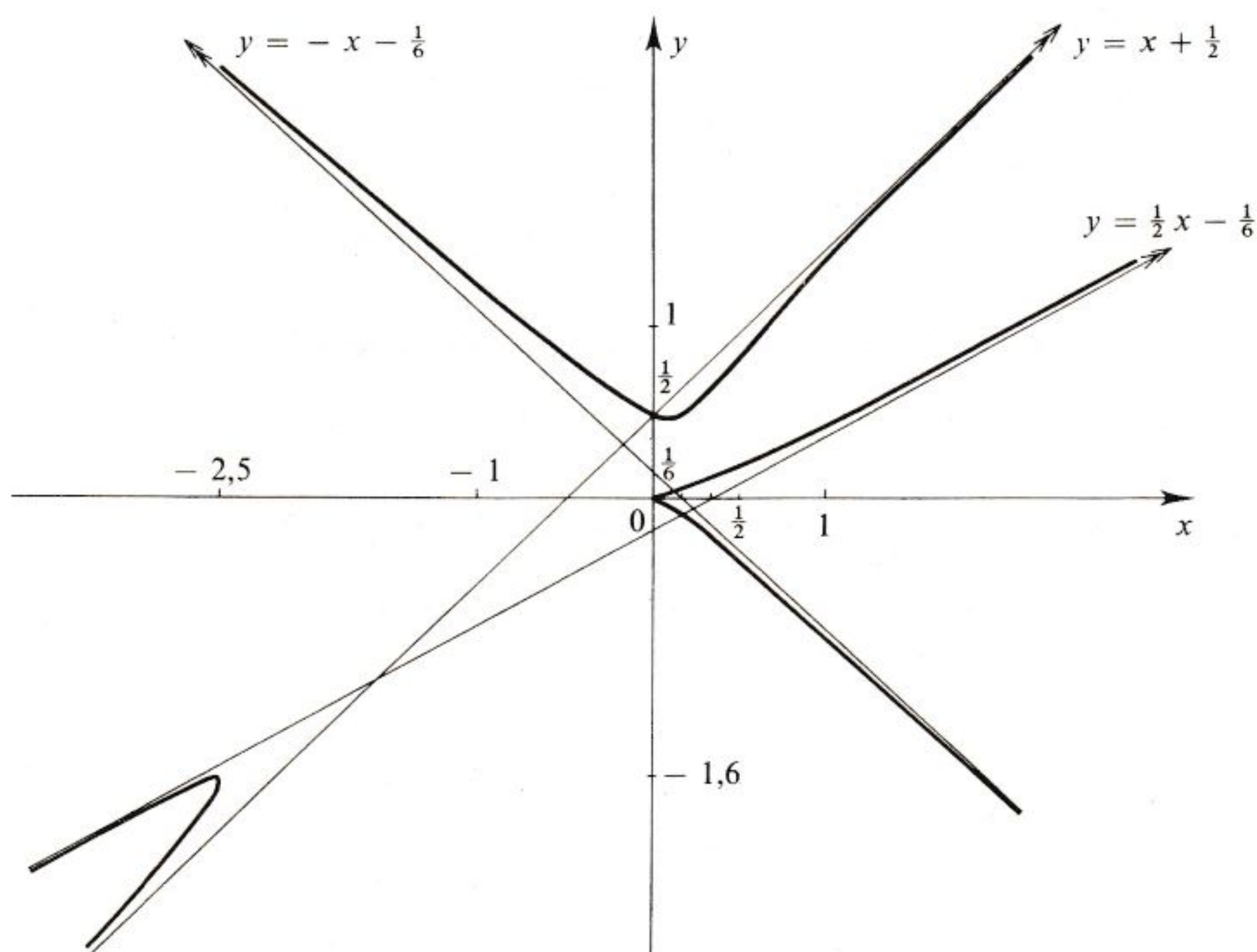


Figura 8.

2. Estudiar la parametrización $x = \frac{t^3}{1-t^2}$, $y = \frac{t-2}{(1-t)^2}$.

Se tiene aquí

$$x' = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}, \quad y' = \frac{t-3}{(1-t)^3},$$

de donde resulta el cuadro de las variaciones simultáneas:

t	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
x'	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$
x	$+\infty \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow +\infty$			$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$		$-\infty \rightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{3} \rightarrow -\infty$	$-27/8$	
y	$0 \rightarrow -1/2 \rightarrow -3/4 \rightarrow -2 \rightarrow -\infty$					$-\infty \rightarrow -1/2 \rightarrow 1/4 \rightarrow 0$		
y'	$-$					$+$	0	$-$

Se estudia la rama $t = 1$ poniendo $t = 1 - h$, de donde

$$x = \frac{1}{2h} + \frac{7}{4} + O(h), \quad y = -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h},$$

lo cual prueba que existen dos ramas parabólicas de dirección Oy .

El trazado hace aparecer un punto doble real. Para determinarlo, vamos a resolver el sistema

$$(\mathcal{S}) \quad (t_1 \neq t_2, \quad x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2)).$$

En los intervalos de definición, las dos últimas ecuaciones se escriben en la forma

$$(t_1 - t_2) A(t_1, t_2) = 0, \quad (t_1 - t_2) B(t_1, t_2) = 0,$$

donde A y B designan polinomios *simétricos* en t_1, t_2 . Poniendo $P = t_1 t_2$ y $S = t_1 + t_2$ se obtiene: $A = P^2 - S^2 + P$, $B = P - 2S + 3$, y la resolución de (\mathcal{S}) se reduce, pues, a la del sistema

$$(\mathcal{S}') \quad (3S^2 - 10S + 6 = 0, \quad P = 2S - 3),$$

o sea

$$S = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}, \quad P = 2S - 3.$$

A cada solución de $(\mathcal{S})'$, la ecuación

$$(\tau) \quad T^2 - ST + P = 0$$

asocia dos valores t_1, t_2 de t . Si estos valores son reales y distintos, verifican (\mathcal{S}) y corresponden a un punto doble.

a) Para $S = (5 - \sqrt{7})/3$, la ecuación (τ) carece de raíces reales. Sin embargo, según vamos a ver, las raíces complejas de (τ) definen entonces un punto doble «aislado» real, que forma parte de la curva unicursal compleja definida, por prolongación, a los valores complejos de t , de las funciones racionales $t \mapsto x(t), t \mapsto y(t)$.

b) Para $S = (5 + \sqrt{7})/3$, la ecuación (τ) tiene dos raíces reales distintas y proporciona por lo tanto los parámetros del único punto doble real de ramas reales.

Para calcular las coordenadas del punto doble, no es necesario resolver (τ) . En efecto, si t_1 y t_2 designan las raíces de (τ) y si $Q(t)$ designa un polinomio cualquiera, se puede calcular $Q(t_i)$ ($i = 1, 2$) sustituyendo $Q(t)$ por su resto módulo $t^2 - St + P$. Existen pues dos funciones homográficas de t , a saber $A(t), B(t)$, tales que, para $i = 1, 2$, se tiene:

$$x(t_i) = A(t_i), \quad y(t_i) = B(t_i).$$

Estas funciones homográficas cumplen evidentemente $A(t_1) = A(t_2), B(t_1) = B(t_2)$, y por tanto son degeneradas, o sea reducidas a constantes.

Se tiene aquí

$$x(t_i) = \frac{(S^2 - P)t_i - SP}{-St_i + P + 1} = \frac{P}{S} - S$$

$$y(t_i) = \frac{t_i - 2}{(S - 2)t_i - P + 1} = \frac{1}{S - 2}.$$

Las coordenadas del punto doble aislado son, pues,

$$x = -\frac{1}{6}(13 + \sqrt{7}), \quad y = \frac{1 - \sqrt{7}}{2},$$

y las del punto doble de rama real son

$$x = -\frac{1}{6}(13 - \sqrt{7}), \quad y = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}. \quad (\text{véase Fig. 9})$$

Resulta claro que el método expuesto en este ejemplo se aplicaría, en teoría, a toda aplicación racional propia $t \mapsto (x(t), y(t))$ y permitiría obtener las coordenadas de los puntos dobles. Se formaría en primer lugar el sistema (\mathcal{S}) ; poniendo $P = t_1 t_2$ y $S = t_1 + t_2$ nos reduciríamos a un sistema en P y S . Para cada solución

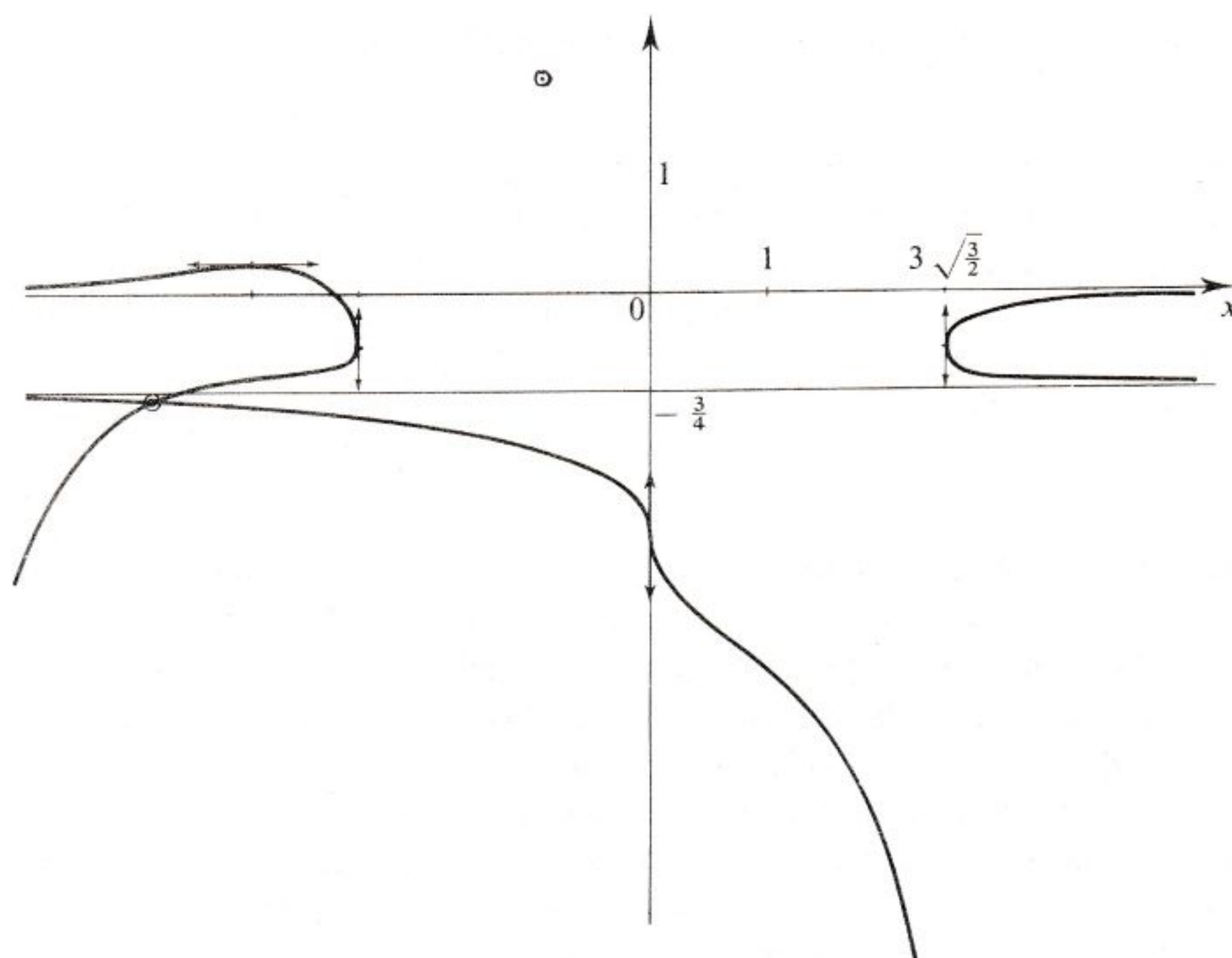


Figura 9.

de este sistema, se formaría la ecuación (τ) , y si esta ecuación tiene dos raíces reales (resp. no reales), el punto doble obtenido es de ramas reales (resp. aislado). Las coordenadas del punto doble son siempre funciones *racionales* de S y P . Ello resulta evidente a priori, ya que son funciones simétricas de las raíces t_1, t_2 de (τ) ; estas coordenadas son en efecto

$$x_0 = x(t_1) = x(t_2) = \frac{1}{2}[x(t_1) + x(t_2)]$$

$$y_0 = y(t_1) = y(t_2) = \frac{1}{2}[y(t_1) + y(t_2)].$$

De un modo general, si M es un punto múltiple de orden k , obtenido para los valores t_1, t_2, \dots, t_k del parámetro, sus coordenadas son funciones racionales de las funciones simétricas elementales de t_1, \dots, t_k , y de los coeficientes de las funciones dadas $x(t), y(t)$.

§ VII.3 CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS PLANAS DEFINIDAS EN COORDENADAS POLARES

En el plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 referido a un sistema de referencia ortonormal

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ podemos utilizar coordenadas polares para definir una curva de dos maneras:

1. Por una parametrización; se dan entonces dos funciones $r(t)$, $\theta(t)$, y la parametrización viene definida por $t \mapsto M(t)$, con $\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}(\theta(t))$ y $\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$, para todo $\theta \in \mathbf{R}$.

Se dice entonces que la curva ha sido definida mediante una *parametrización en polares*;

2. Por una *ecuación implícita en polares* de la forma

$$f(r, \theta) = 0.$$

Por definición, la curva es entonces el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{E}_2$ para los cuales *uno al menos* de los sistemas de coordenadas polares (r, θ) verifica $f(r, \theta) = 0$.

Si f es suficientemente regular, el caso 2 se reduce localmente al caso 1, por aplicación del teorema de las funciones implícitas. Por este motivo vamos a limitarnos a estudiar los procesos prácticos que permiten descubrir el comportamiento cualitativo de una curva definida por una parametrización en polares.

En la práctica, se presentan muchas veces al estudio arcos definidos por una ecuación polar de la forma $r = f(\theta)$ o $\theta = g(r)$ (caso en que el parámetro es igual a una determinación de una de las coordenadas polares).

El estudio de curvas definidas por parametrizaciones en polares no difiere en teoría del que se ha hecho en los capítulos V y VI. Se puede, en efecto, volver al caso de coordenadas cartesianas poniendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Existen, sin embargo, algunas técnicas y problemas propios de las coordenadas polares, a los cuales vamos a analizar.

En lo que sigue, designaremos por γ un arco *simple* de clase D^2 , definido en el sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ por la parametrización polar $t \mapsto M(t)$, donde

$$(1) \quad \overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}(\theta(t))$$

siendo $r(t)$ y $\theta(t)$ funciones dos veces derivables en un intervalo I .

Recordemos que la aplicación $\theta \mapsto \vec{u}(\theta)$ de \mathbf{R} en E_2 es indefinidamente derivable y que se tiene (poniendo $\vec{v}(\theta) = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta$)

$$\frac{d^{2n+1}}{d\theta^{2n+1}} \vec{u}(\theta) = (-1)^n \vec{v}(\theta), \quad \frac{d^{2n}}{d\theta^{2n}} \vec{u}(\theta) = (-1)^n \vec{u}(\theta),$$

para todo $n \in \mathbf{N}$.

Utilizando estas relaciones, se deducen de (1) las siguientes:

$$(2) \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r' \vec{u} + r\theta' \vec{v}$$

$$(3) \quad \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = (r'' - r\theta'^2) \vec{u} + (r\theta'' + 2r'\theta') \vec{v},$$

(siendo las derivadas respecto a la variable t).

Estudio en el entorno de un punto ordinario

Si el punto $M(t)$ es ordinario (lo cual significa que $r'(t)$ y $r\theta'(t)$ no son a la vez nulos), la relación (2) muestra que la tangente \mathcal{T}_M a γ en M está dirigida por el vector de componentes $(r'(t), r\theta'(t))$ en la base (\vec{u}, \vec{v}) . La *pendiente* p de esta tangente en la base (\vec{u}, \vec{v}) viene definida, cuando $r'(t) \neq 0$, por

$$p = \frac{r\theta'(t)}{r'(t)}.$$

En otros términos, el ángulo orientado de la recta \mathcal{T}_M con la recta

$$D_\theta = (O, \vec{u}(\theta)),$$

viene definido por

$$(D_\theta, \mathcal{T}_M) = V \pmod{\pi},$$

donde V designa un real cualquiera que verifica

$$\operatorname{tg} V = p = \frac{r\theta'(t)}{r'(t)} \quad (\text{véase Fig. 10}).$$

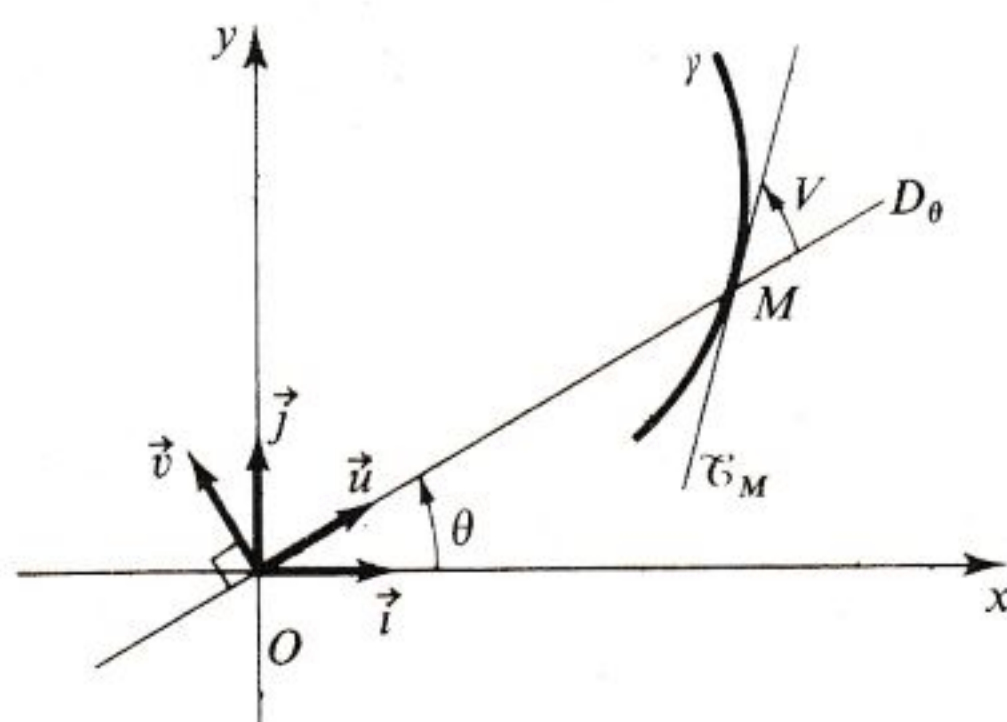


Figura 10.

Recordemos que si γ está orientado en el sentido de las t crecientes y si $\vec{\tau}$ designa el vector unitario de la tangente orientada en M , el ángulo del vector $\vec{\tau}$ con $\vec{u}(\theta)$ viene definido por

$$(\vec{u}(\theta), \vec{\tau}) = V \pmod{2\pi},$$

donde el real V debe verificar

$$\cos V = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2}}, \quad \sin V = \frac{r\theta'}{\sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2}},$$

(véase § VI.6).

Se observará que la tangente en el punto $M(t)$ pasa por el origen si, y solamente si, se tiene $\theta'(t) = 0$.

Caso en que γ pasa por O

Sea $t_0 \in I$ tal que $r(t_0) = 0$, es decir tal que $M(t_0) = O$. Al ser las funciones r y θ continuas, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \theta(t) = \theta(t_0).$$

Del teorema V.6.3, se deduce que todo subarco compacto de γ que pasa por O tiene a la recta $D_{\theta(t_0)}$ como *tangente geométrica* en el punto O (y esto sin ninguna hipótesis de diferenciabilidad sobre las funciones r y θ). Este resultado se cumple incluso cuando O es un punto estacionario de γ .

En el caso en que el parámetro t es igual a una determinación continua del ángulo θ y en que γ viene definido por una ecuación polar de la forma $r = r(\theta)$, se ve de este modo que *las raíces de la ecuación $r(\theta) = 0$ son los ángulos polares de las tangentes a γ en el punto O .*

Ejemplos

1. La *lemniscata* de ecuación polar $r^2 = \cos 2\theta$ admite como tangentes en el origen a las rectas de ángulos polares $\pm \pi/4$.

2. La curva de ecuación polar $r = |\theta|^{1/2}$ admite al eje Ox como tangente geométrica en el origen.

Volviendo al estudio general de un punto ordinario, vamos a estudiar los *puntos de inflexión* de γ y su *concavidad respecto al origen*.

Puntos de inflexión

Según (2) y (3), una condición necesaria y suficiente para que $M(t)$ (supuesto ordinario) sea punto de inflexión de γ es $E(t) = 0$, con

$$E(t) = \begin{vmatrix} r' & r\theta' \\ r'' - r\theta'^2 & r\theta'' + 2r'\theta' \end{vmatrix}.$$

Desarrollando, se tiene

$$E(t) = r^2 \theta'^3 + rr' \theta'' - rr'' \theta' + 2r'^2 \theta'.$$

En el caso particular importante en que γ viene definido por una ecuación polar de la forma $r = r(\theta)$ (caso en que $\theta = t$), la expresión de E se reduce a

$$(4) \quad \boxed{E(\theta) = r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Si, además, la función $r(\theta)$ no se anula en I se puede poner $\varphi(\theta) = 1/r(\theta)$; mediante un cálculo sencillo se obtiene (véase § VI.4)

$$(5) \quad \boxed{E(\theta) = \frac{1}{\varphi^3(\theta)} (\varphi(\theta) + \varphi''(\theta))}.$$

La relación (5) resulta muchas veces útil en la práctica; por ejemplo, los puntos de inflexión de la curva de ecuación $r(\theta) = 1/(\cos \theta + \cos 4\theta)$ se obtienen resolviendo la ecuación

$$\cos \theta + \cos 4\theta + \frac{d^2}{d\theta^2} (\cos \theta + \cos 4\theta) = 0,$$

o sea, $\cos 4\theta = 0$.

Concavidad respecto al origen

Supongamos que el punto $M(t)$ sea distinto de O y no sea punto de inflexión de γ . Diremos que el arco γ vuelve, en este punto, *su concavidad* hacia O si, en el

entorno de este punto, el arco γ se halla del mismo lado que O respecto a su tangente. Según el estudio hecho en el § V.9 y en el § VI.5, ello equivale a decir que el punto P definido por $\overrightarrow{MP} = d^2\overrightarrow{OM}/dt^2$ queda del mismo lado que O respecto a la tangente \mathcal{C}_M .

En el caso contrario (es decir si O y P se hallan separados por \mathcal{C}_M) diremos que γ vuelve su concavidad lado *opuesto de* O .

Sea \vec{W} el vector $-r\theta'(t)\vec{u} + r'(t)\vec{v}$, ortonormal a $d\overrightarrow{OM}/dt$. Resulta claro que γ vuelve su concavidad hacia O (resp. hacia el opuesto de O) si $\overrightarrow{MO} \cdot \vec{W}$ y $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \cdot \vec{W}$ son del mismo signo (resp. de signos contrarios). Mediante un cálculo fácil se tiene

$$\overrightarrow{MO} \cdot \vec{W} = r^2 \theta'(t), \quad \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \cdot \vec{W} = E(t),$$

de donde, poniendo

$$H(t) = (\overrightarrow{MO} \cdot \vec{W}) \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \cdot \vec{W} \right)$$

luego

$$H(t) = r^2 \theta'(t) E(t).$$

El signo de $H(t)$ determina pues la concavidad respecto a O en el punto $M(t)$. Si $t = \theta$ para $t \in I$ (de donde $\theta'(t) = 1$), se tiene

$$H(\theta) = r^2(\theta) E(\theta),$$

y el signo de $E(\theta)$ determina por lo tanto la concavidad respecto a O .

Estudio de un punto estacionario

Si el punto $M(t_0)$ es estacionario en γ , el método general de estudio consiste en pasar a coordenadas cartesianas y en aplicar los métodos del capítulo V, § 9.

Sin embargo, cuando el punto estacionario $M(t_0)$ está en O , el arco γ tiene en este punto la tangente geométrica $D_{\theta(t_0)}$ (véase anteriormente) a reserva, si es preciso, de sustituir γ por un subarco adecuado.

Estudio de las ramas infinitas

Supongamos las funciones $t \mapsto r(t)$ y $t \mapsto \theta(t)$ definidas y de clase D^k ($k \geq 2$) en un conjunto de la forma $I \setminus \{t_0\}$, donde I es un intervalo abierto que contiene a t_0 , y sea Γ el conjunto imagen de la aplicación $t \mapsto M(t)$ definida por

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}(\theta).$$

Se dice que Γ presenta una *rama infinita* para $t = t_0$ si se tiene $\lim_{t \rightarrow t_0} |r(t)| = +\infty$.

Nos proponemos estudiar la forma general de una tal rama. Para que esta rama tenga una *dirección asintótica*, es suficiente ⁽¹⁾ que la función θ tenga un límite θ_0 en el punto t_0 (ya que entonces la función $t \mapsto y(t)/x(t)$ tiende hacia $\tan \theta_0$ si $\cos \theta_0 \neq 0$ y hacia infinito si $\cos \theta_0 = 0$). La dirección asintótica es entonces la del vector $\vec{u}(\theta_0)$ (véase la figura 11).

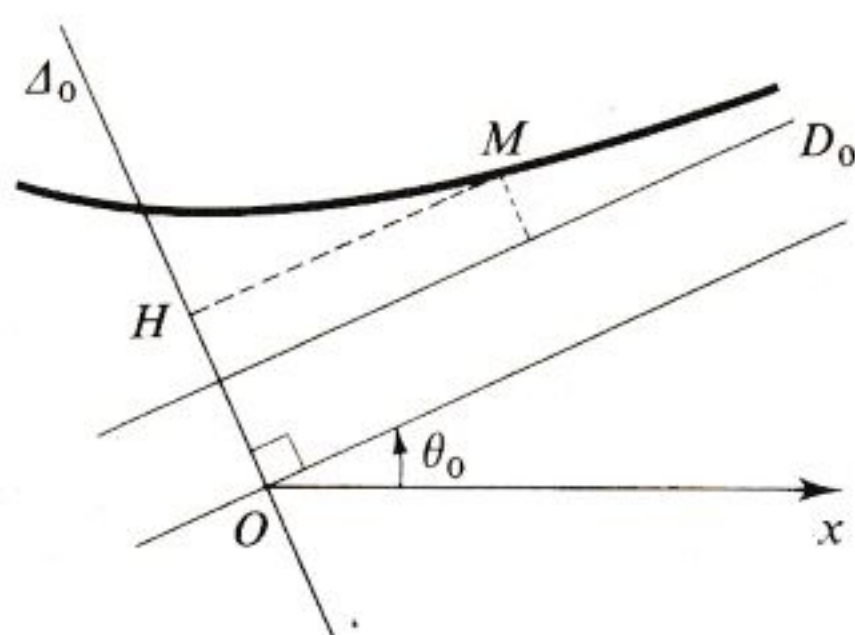


Figura 11.

Supongamos, pues, la existencia de $\theta_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \theta(t)$ y sea $H(t)$ la proyección ortogonal del punto $M(t)$ sobre la recta $\Delta_0 = (O; \vec{v}(\theta_0))$. Se tiene

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}(\theta_0) = r(t) \sin(\theta(t) - \theta_0),$$

o sea, orientando a la recta Δ_0 según $\vec{v}(\theta_0)$,

⁽¹⁾ Se puede demostrar que esta condición es igualmente necesaria.

(6)

$$\overline{OH} = r(t) \operatorname{sen}(\theta(t) - \theta_0) .$$

El estudio de la función \overline{OH} en el entorno de $t = t_0$ permite, en los casos sencillos, determinar el comportamiento de Γ .

a) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} |\overline{OH}| = +\infty$, se dice que Γ presenta *ramas parabólicas* en la dirección de Δ_0 .

b) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \overline{OH}$ existe, llamémosle h . La recta D_0 de ecuación

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}(\theta_0) = h$$

es *asíntota* a Γ .

En efecto, la distancia de $M(t)$ a D_0 es igual a $|\overline{OH} - h|$ y tiende, por lo tanto, hacia cero cuando t tiende hacia t_0 .

El estudio del signo de $\overline{OH} - h$ permite obtener la posición de Γ respecto a D_0 en el entorno de t_0 .

Observación. En la práctica se presentan a menudo las condiciones siguientes:

- la función $\theta(t)$ admite en $t = t_0$ desarrollos limitados hasta cualquier orden;
- existe un entero $q > 0$ tal que $(t - t_0)^q r(t)$ admite en $t = t_0$ desarrollos limitados hasta cualquier orden.

En este caso, se recomienda buscar un *desarrollo limitado* de \overline{OH} en t_0 hasta un orden conveniente, más bien que estudiar sucesivamente $\lim_{t \rightarrow t_0} \overline{OH}$ y (caso necesario) el signo de $\overline{OH} - h$. La técnica es aquí análoga a la expuesta en el capítulo V, § 10.

La función angular θ

Sea γ un arco plano definido, en un sistema de referencia ortonormal \mathcal{R} , por una parametrización ordinaria $t \mapsto (x(t), y(t))$ ($t \in I$). Resulta natural preguntarse si un tal arco admite, en el mismo sistema de referencia, una parametrización en polares $t \mapsto (r(t), \theta(t))$ ($t \in I$). Si tal parametrización existe, tiene que verificar

$$(\forall t \in I) \quad x(t) = r(t) \cos \theta(t) \quad \text{y} \quad y(t) = r(t) \operatorname{sen} \theta(t) ,$$

o sea

$$(\forall t \in I) \quad x(t) + iy(t) = r(t) e^{i\theta(t)} .$$

Si el arco γ no pasa por el origen, el teorema del levantamiento VI.6.1 proporciona una respuesta positiva al problema propuesto: basta con tomar como r la función $t \mapsto (x^2(t) + y^2(t))^{1/2}$, y como θ una de las funciones continuas en I que verifican

$$e^{i\theta(t)} = \frac{x(t) + iy(t)}{r(t)}.$$

Además, si las funciones dadas $x(t)$ e $y(t)$ son de clase C^k (resp. D^k), lo mismo ocurrirá con las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$.

Todo arco geométrico de clase k que no pasa por un punto O admite pues una parametrización en polares de clase k en un sistema de referencia ortonormal cualquiera de origen O .

Investiguemos ahora si la función angular θ (definida módulo 2π) define un cambio de parámetro admisible en γ . Para ello es necesario y suficiente que se tenga $\theta'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Ahora bien, se tiene

$$r \, dr = x \, dx + y \, dy \quad \text{y} \quad r^2 \, d\theta = x \, dy - y \, dx,$$

de donde

$$\theta'(t) = \frac{xy'(t) - yx'(t)}{x^2(t) + y^2(t)};$$

y, si el punto $M(t)$ (de coordenadas $x(t)$, $y(t)$) no es punto estacionario de γ , la relación $x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = 0$ significa que la tangente en este punto pasa por el origen. Estableceremos la siguiente condición:

Para que un arco regular admita, en un sistema de referencia ortonormal de origen O , una ecuación polar de la forma $r = g(\theta)$, basta con que no pase por O y que no tenga ninguna tangente que pase por O .

§ VII.4 EJEMPLOS DE CONSTRUCCIÓN DE CURVAS DEFINIDAS EN COORDENADAS POLARES

En los ejemplos que siguen, se fija de una vez para siempre un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en \mathcal{E}_2 .

Ejemplo 1. Curva definida por

$$r = \frac{1}{\cos \theta + \cos 4 \theta}, \quad (\theta \in \mathbf{R}, \cos \theta + \cos 4 \theta \neq 0).$$

La función $r(\theta)$ es periódica de período 2π y par. Basta con hacer variar θ en $[0, \pi]$ y completar el conjunto imagen obtenido, por *simetría respecto a Ox*.

a) El *signo* ⁽¹⁾ de r es inmediato, ya que se tiene:

$$\cos \theta + \cos 4 \theta = 2 \cos \frac{3 \theta}{2} \cos \frac{5 \theta}{2}.$$

Este signo viene dado por el cuadro siguiente

θ	0	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{5}$	π
r	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	+	-	-	+	-
		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

b) Hay cuatro ramas infinitas a estudiar, correspondientes a

$$\theta = \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, \pi.$$

Mediante un cálculo elemental se tienen los resultados siguientes

— poniendo $t = \theta - \frac{\pi}{5}$, se tiene

$$r \sin t = -\frac{1}{5 \cos \frac{3\pi}{10}} \left[1 + \frac{3}{2} t \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} + o(t) \right];$$

— poniendo $t = \theta - \frac{\pi}{3}$, se tiene

⁽¹⁾ Más que el sentido de la variación de $r(\theta)$, lo que importa es conocer el *signo* de esta función para poder efectuar un trazado cualitativo.

$$r \operatorname{sen} t = \frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{5}{9}t + o(t);$$

— poniendo $t = \theta - \frac{3\pi}{5}$, se tiene

$$r \operatorname{sen} t = \frac{1}{5 \cos \frac{9\pi}{10}} \left[1 + \frac{3}{2}t \operatorname{tg} \frac{9\pi}{10} + o(t) \right];$$

— poniendo $t = \pi - \theta$, se tiene

$$r \operatorname{sen}(\theta - \pi) = -r \operatorname{sen} t = \frac{2}{15t} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Se concluye que existen asíntotas para

$$\theta = \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5},$$

y una rama parabólica de dirección Ox para $\theta = \Gamma$.

La determinación de las asíntotas se efectúa sin dificultad mediante las relaciones anteriores, tal como se ha explicado al final del § 3.

c) La *concavidad respecto al origen* se estudia poniendo

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \cos \theta + \cos 4\theta$$

y estudiando el signo de

$$\varphi(\theta) + \varphi''(\theta) = -15 \cos 4\theta.$$

Se ve que existen cuatro *puntos de inflexión* (cuando $\theta \in [0, \pi]$) obtenidos para

$$\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}.$$

d) Los *puntos dobles* se obtienen haciendo variar θ en $]-\pi, \pi]$ y buscando los pares θ', θ'' de valores de θ tales que $\theta'' = \theta' + \pi$ y $r(\theta') = -r(\theta'')$. Se llega así a la ecuación $\cos 4\theta = 0$ y se concluye que existen *cuatro* puntos dobles obtenidos para

$$\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8},$$

que son también los puntos de inflexión.

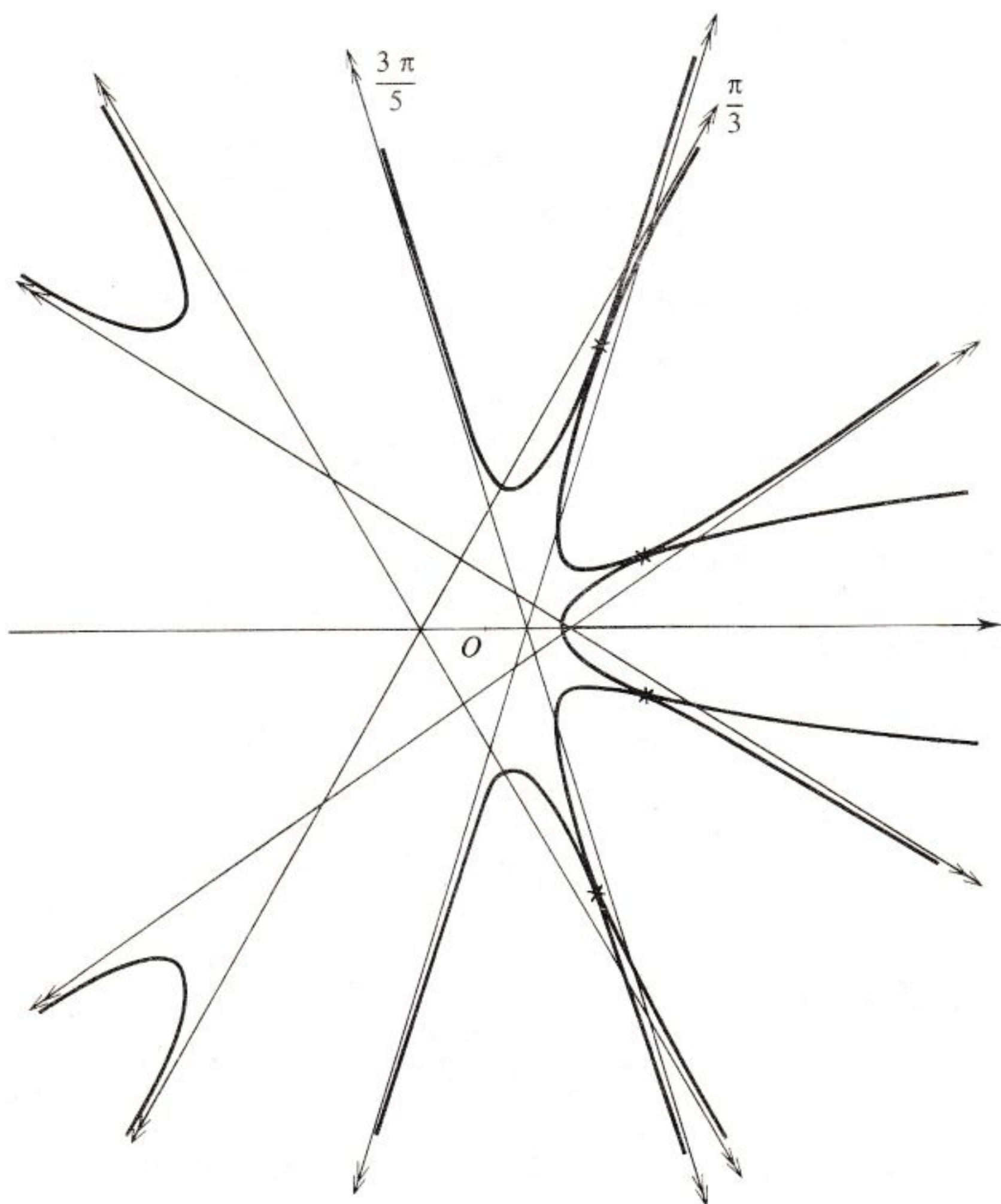


Figura 12.

e) La curva es algebraica, e incluso unicursal: de $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, se deducen, en efecto, expresiones *racionales* de x e y respecto a $u = \operatorname{tg} (\theta/2)$. La ecuación cartesiana irreducible de la curva se obtiene mediante los cálculos siguientes:

$$r(\cos \theta + \cos 4 \theta) = 1, \quad r \cos \theta = x,$$

$$\cos 4 \theta = \frac{x^4 + y^4 - 6 x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

de donde resulta la ecuación

$$(x - 1)^2 (x^2 + y^2)^3 - (x^4 + y^4 - 6 x^2 y^2)^2 = 0.$$

(véase la figura 12).

Ejemplo 2. Estudiar la curva definida por

$$\theta = \frac{r^3}{r^3 - 2r + 1} = \frac{r^3}{(r - 1)(r^2 + r - 1)}.$$

El método consiste aquí en estudiar las variaciones de la función $\theta = f(r)$. De

$$f'(r) = \frac{r^2(3 - 4r)}{(r^3 - 2r + 1)^2},$$

se deduce el cuadro siguiente

r	$-\infty$	$-\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	0	$-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$3/4$	1	$+\infty$
$f'(r)$	+		+	+	0	-	-
$\theta = f(r)$	$1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$	$-\infty \nearrow \frac{-27}{5}$ $\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$		

a) En cada intervalo en el que $f(r)$ sea estrictamente monótona, se considera la función recíproca $r = \psi(\theta)$ y se aplican los modos de construcción utilizados en el ejemplo 1.

b) Sea r_0 uno cualquiera de los valores de r , tales que $\theta(r)$ tiende hacia $\pm \infty$ cuando r tiende hacia r_0 . Para cada uno de estos valores, la circunferencia $r = r_0$ es una *circunferencia asintótica*, alrededor de la cual la curva se enrolla indefinidamente. Se obtienen aquí tres circunferencias asintóticas, de radios respectivos $(\sqrt{5} - 1)/2$, 1 y $(\sqrt{5} + 1)/2$.

c) Para estudiar las ramas infinitas (obtenidas cuando $r \rightarrow \pm \infty$), se efectúa un desarrollo limitado generalizado de $r \sin(\theta - 1)$ respecto a r hasta el orden 1, o sea:

$$r \sin(\theta - 1) = \frac{2}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

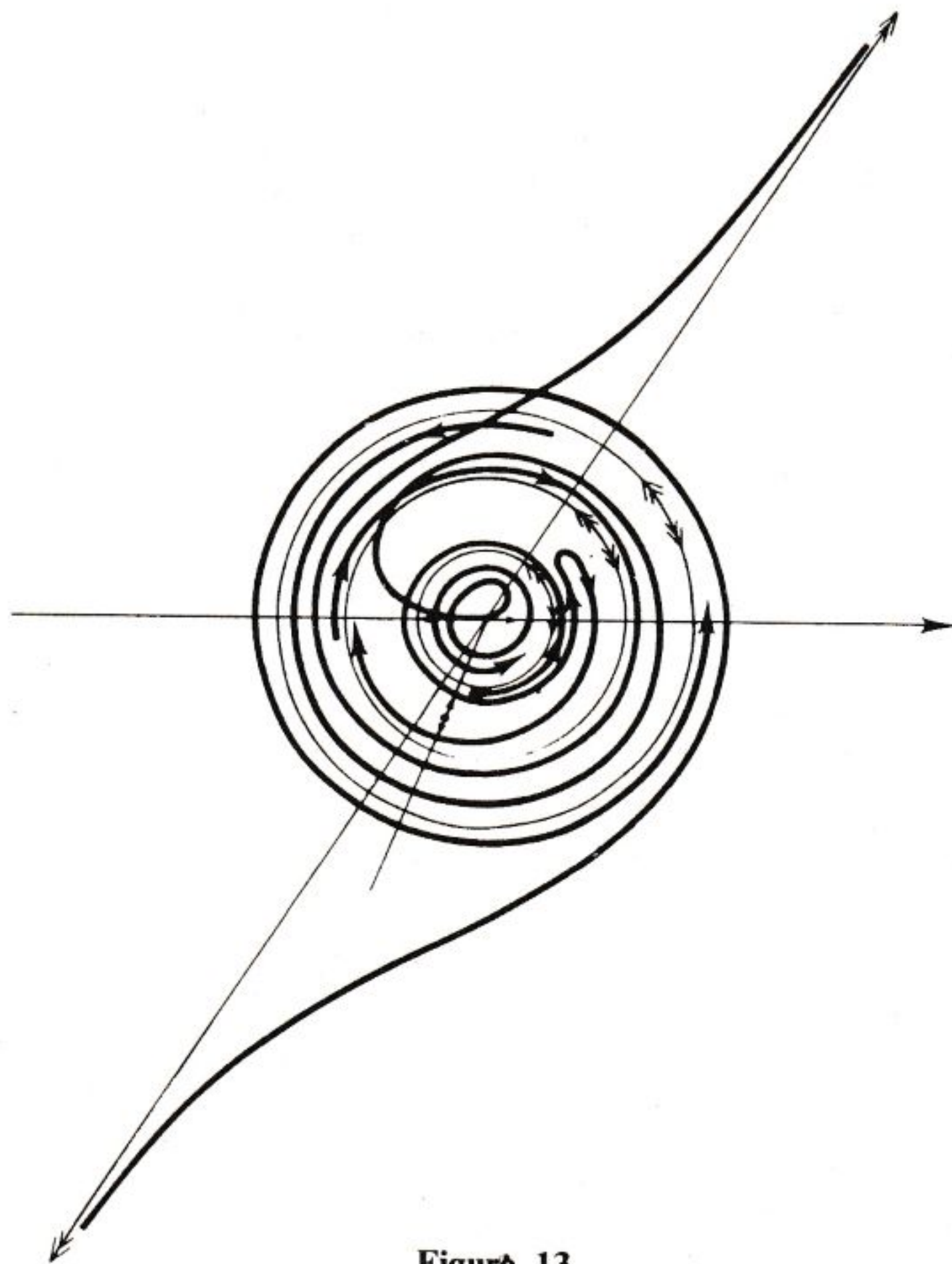


Figura 13.

Las flechas proporcionan el sentido del recorrido cuando se hace variar r desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Las tangentes particulares están marcadas con el símbolo \rightarrow .

Las rectas o circunferencias asintóticas están marcadas con el símbolo \longleftrightarrow .

De ahí se deduce que la recta de ángulo polar $\theta = 1$ que pasa por el origen, es la única asíntota; la posición de la curva respecto a esta asíntota viene dada por el desarrollo obtenido. En la figura 13 hemos representado la marcha aproximada de la curva.

Ejemplo 3. Estudiar la curva definida por $r = \operatorname{sen} \frac{2\theta}{3}$ ($\theta \in \mathbf{R}$).

La función $r(\theta)$ es impar y su período mínimo es 3π . Se obtiene el mismo punto del plano cambiando θ por $\theta + 6\pi$; por ello estudiaremos el arco obtenido haciendo variar θ en $[-3\pi, 3\pi]$.

a) Reducción del intervalo de estudio:

- al ser impar la función $r(\theta)$, basta con estudiarla para $\theta \in [0, 3\pi]$ y luego completar la curva obtenida por simetría respecto a la recta Oy ;
- se tiene:

$$r(\theta) = r\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right),$$

de donde se deduce que la recta D tal que $(Ox, D) = 3\pi/4 \bmod (\pi)$ y que pasa por O es un eje de simetría de la figura.

Esta simetría, y la simetría respecto a Oy engendran un grupo G de ocho elementos de isometría vectoriales del plano (G es el grupo de las isometrías que dejan un cuadrado globalmente invariante; véase tomo 1, p. 87). La figura es pues invariante en G . Finalmente, basta hacer el estudio para $\theta \in [0, 3\pi/4]$ y completar la curva obtenida aplicando las operaciones de G .

b) Estudio en $[0, 3\pi/4]$: El signo de r viene dado por el cuadro siguiente:

θ	0	$3\pi/4$
r	0	1

+ ↗

para $\theta = 0$, la tangente es la recta Ox . Para $\theta = 3\pi/4$, la curva es tangente a la circunferencia unidad (puesto que la derivada $r'(\theta)$ es nula en este punto); el punto de contacto es el punto de coordenadas polares $(r = 1, \theta = 3\pi/4)$.

c) Busquemos los puntos múltiples del arco Γ obtenido al hacer variar θ en $[-3\pi, 3\pi]$.

Se ve en primer lugar que el origen se obtiene para $\theta = -3\pi/2, 0, 3\pi/2$ y 3π : es un punto de multiplicidad 4.

Existen además ocho puntos dobles que se obtienen buscando los reales $\theta \in]-3\pi, 3\pi]$ tales que $\theta \pm 2\pi \in]-3\pi, 3\pi]$ y $r(\theta) = r(\theta \pm 2\pi)$, o tales que $\theta \pm \pi \in]-3\pi, 3\pi]$ y $r(\theta) = -r(\theta \pm \pi)$. Resolviendo las ecuaciones

$$\operatorname{sen} \frac{2\theta}{3} = \operatorname{sen} \left(\frac{2\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \left(\frac{2\theta}{3} \right) = -\operatorname{sen} \left(\frac{2\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)$$

se obtienen los 8 puntos dobles siguientes (para cada uno de los cuales hemos dado los dos valores correspondientes de $\theta \in]-3\pi, 3\pi]$):

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right), \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right), \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4} \right), \\ & (-2\pi, -\pi), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), (\pi, 2\pi), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

(véase la figura 14).

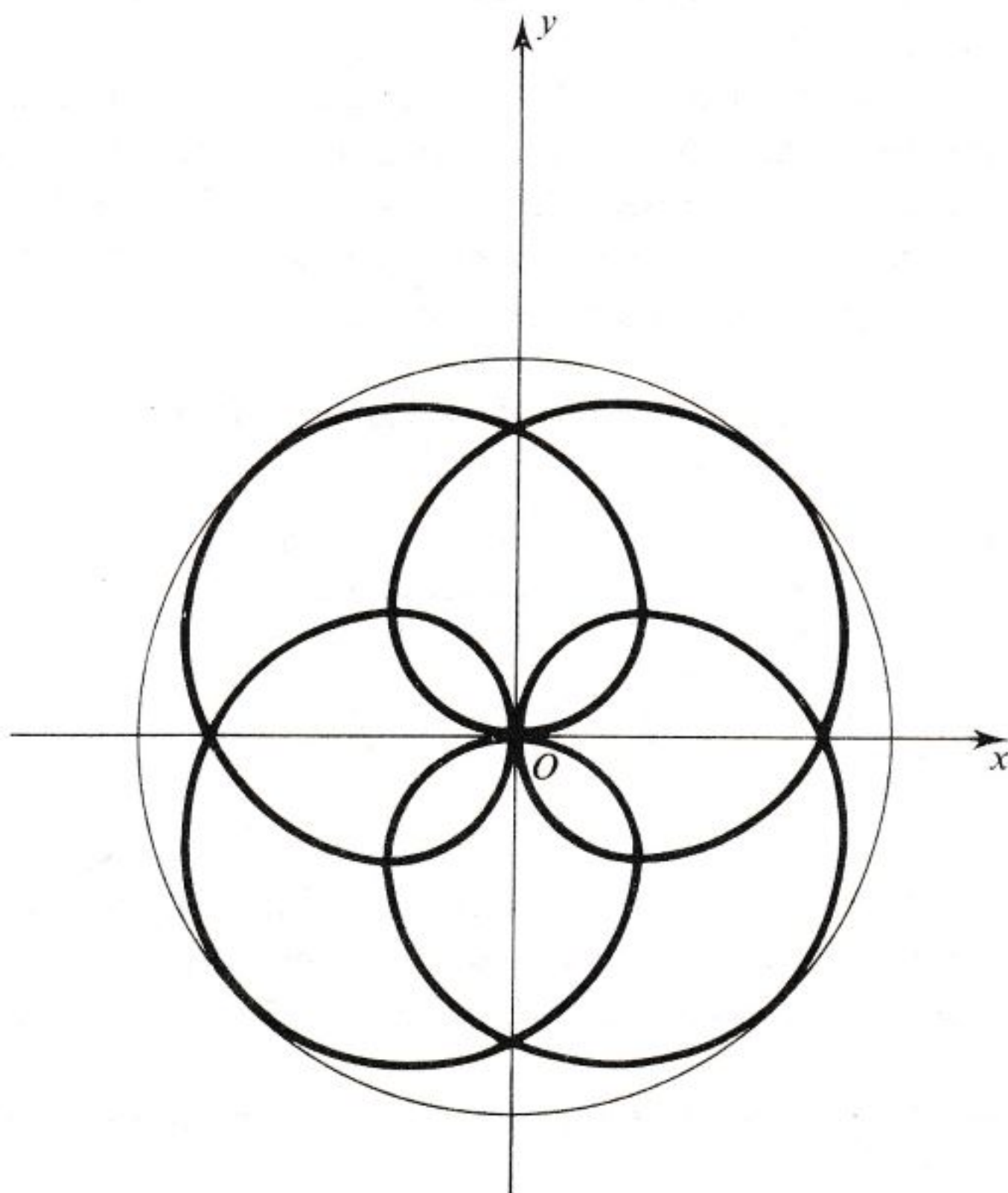


Figura 14.

§ VII.5 EVOLUTAS, EVOLVENTES, CURVAS PARALELAS

Evolutas

En el plano euclídeo \mathcal{E}_2 , consideramos un arco γ de clase $k \geq 3$, **regular y sin puntos de inflexión**, y, para empezar, supongamos que γ sea *simple*. Designemos entonces por Ω_M el centro de curvatura de γ en M . Si $f: I \rightarrow \mathcal{E}_2$ es una parametrización admisible de γ , la aplicación $\varphi: I \rightarrow \mathcal{E}_2$, $t \mapsto \Omega_{f(t)}$ es de clase $k - 2$; el arco \mathcal{D}_γ , de clase $k - 2$, definido por esta parametrización es, evidentemente, independiente de la parametrización elegida f . Este arco \mathcal{D}_γ recibe el nombre de **evoluta del arco γ** .

Si γ no es necesariamente simple, designemos por $g: J \rightarrow \mathcal{E}_2$ una parametrización *normal* de γ . Para todo $s \in J$, pongamos $\vec{\tau}(s) = g'(s)$, y, una vez orientado arbitrariamente \mathcal{E}_2 , designemos por $\vec{v}(s)$ el vector normal unitario deducido de $\vec{\tau}(s)$ por rotación de $+\pi/2$. Estando definida la función *radio de curvatura* por

$$(\forall s \in J) \quad g''(s) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R(s)} \vec{v}(s),$$

la función *centro de curvatura* queda definida por

$$(1) \quad (\forall s \in J) \quad \Omega(s) = g(s) + R(s) \vec{v}(s);$$

llamaremos **evoluta** de γ al arco \mathcal{D}_γ de clase $k - 2$ definido por la parametrización $s \mapsto \Omega(s)$.

Si γ es un arco simple, nos encontramos de nuevo con la definición anterior.

Observación. Ya que por hipótesis γ no tiene puntos de inflexión, la *función curvatura* ρ es en todas partes no nula sobre J y mantiene un signo constante. Se podrá pues suponer siempre que se ha orientado \mathcal{E}_2 de manera que esta función sea > 0 : por ello no hacemos aquí distinción entre «curvatura algebraica» y «curvatura aritmética» (véase § VI.5). Por esta razón, el vector normal deducido de τ por rotación de $+\pi/2$ se designa aquí por \vec{v} ; el sistema de referencia ortonormal $(M; \vec{\tau}, \vec{v})$ (donde $M = g(s)$) será llamado simplemente *sistema de referencia de Frenet ligado a la parametrización g* .

Propiedades de la evoluta

Supuesto el arco γ de clase $k \geq 3$, la función R es derivable (por ser de clase $k - 2$), y, para todo $s \in J$, se tiene (por derivación de (1))

$$\begin{aligned}\Omega'(s) &= g'(s) + R'(s) \vec{v}(s) + R(s) \frac{d\vec{v}}{ds} \\ &= \vec{t}(s) + R'(s) \vec{v}(s) - \vec{t}(s),\end{aligned}$$

o sea

$$(2) \quad \boxed{\Omega'(s) = R'(s) \vec{v}(s)}.$$

De esto se deduce:

a) Si s varía en un intervalo en el cual se tenga $R'(s) \neq 0$, se obtiene un *subarco regular* de la evoluta; la tangente a \mathcal{D}_γ en el punto $\Omega(s)$ es la normal a γ en el punto ⁽¹⁾ $M = g(s)$ (véase la figura 15); para este arco de evoluta, la función $s \mapsto R(s)$ es un parámetro normal.

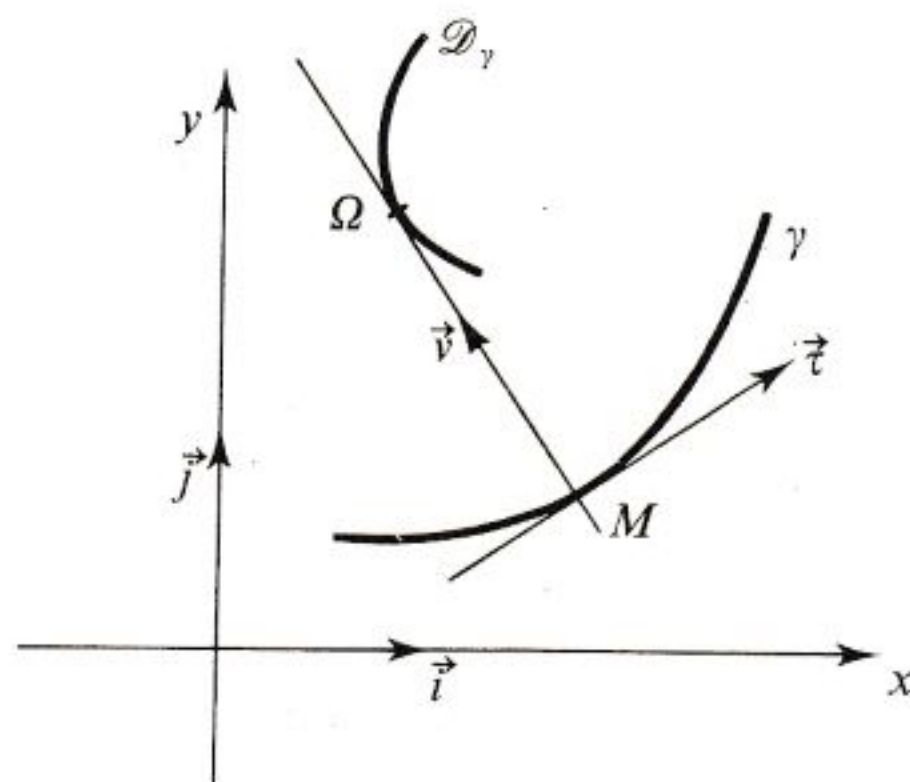


Figura 15.

b) Los puntos ⁽¹⁾ estacionarios de la evoluta corresponden a los valores de s tales que $R'(s) = 0$.

⁽¹⁾ En rigor, sólo se puede hablar de punto de un arco cuando este punto es simple. Pero este abuso de lenguaje es casi inevitable, sopena de recargar considerablemente los enunciados.

Observaciones

1. Si γ es un *arco orientado*, definido por una parametrización normal g , se conviene en orientar \mathcal{D}_γ en el sentido de las s *crecientes*.
2. La evoluta de un arco simple no es necesariamente un arco simple.

Tangente a la evoluta en un punto estacionario

Manteniendo las notaciones anteriores, supongamos que γ es de clase D^k , con $k \geq 4$, y sea s_0 un valor de s , tal que $R'(s_0) = 0$, o sea tal que el punto $\Omega(s_0)$ sea *estacionario* sobre \mathcal{D}_γ . Derivando (2) se obtiene

$$\frac{d^2\Omega}{ds^2} = -\frac{R'}{R}\vec{\tau} + R''\vec{\nu},$$

de donde, para $s = s_0$,

$$\Omega''(s_0) = R''(s_0)\vec{\nu}(s_0).$$

Si $R''(s_0) \neq 0$, el arco \mathcal{D}_γ admite todavía la normal a γ en el punto $g(s_0)$ como *tangente generalizada* (véase § V.6). Se puede demostrar que sigue ocurriendo lo mismo si existe un entero $p \leq k - 2$, tal que se tenga

$$R'(s_0) = R''(s_0) = \dots = R^{(p-1)}(s_0) \quad \text{y} \quad R^{(p)}(s_0) \neq 0.$$

Arcos paralelos a un arco dado

Definición VII.5.1

En el plano euclídeo orientado \mathcal{E}_2 , sea γ un arco **regular y orientado** de clase $k \geq 2$, definido por una parametrización normal $g : J \rightarrow \mathcal{E}_2$; para cada $s \in J$, sea $(M; \vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s))$ el **sistema de referencia de Frenet** asociado a esta parametrización (o sea el sistema de referencia ortonormal de origen $M = g(s)$ definido por

$$\vec{\tau}(s) = g'(s) \quad \text{y} \quad (\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s)) = \pi/2 \pmod{2\pi}.$$

Un **arco paralelo a γ** es un arco de clase $k - 1$ definido por una parametrización de la forma:

$$(3) \quad g_a : J \rightarrow \mathcal{E}_2, \quad s \mapsto g(s) + a\vec{\nu}(s)$$

donde $a \in \mathbf{R}$ es una constante real arbitraria.

Para $a = 0$ se obtiene el mismo arco γ (o, más exactamente, el arco de clase $k - 1$ definido por la parametrización g).

Designaremos por γ_a el arco paralelo a γ definido por la parametrización g_a .

Si $a \in \mathbf{R}$ es fijo, es evidente que el arco γ_a no depende de la parametrización normal g elegida. Intuitivamente, se obtiene γ_a llevando la longitud constante a sobre la normal orientada a γ . Además, cuando a varía, la familia $(\gamma_a)_{a \in \mathbf{R}}$ de los arcos paralelos a γ no depende ni de la orientación de γ , ni de la de \mathcal{E}_2 (el cambio de una de estas orientaciones por su opuesta equivaldría a cambiar γ_a por γ_{-a}).

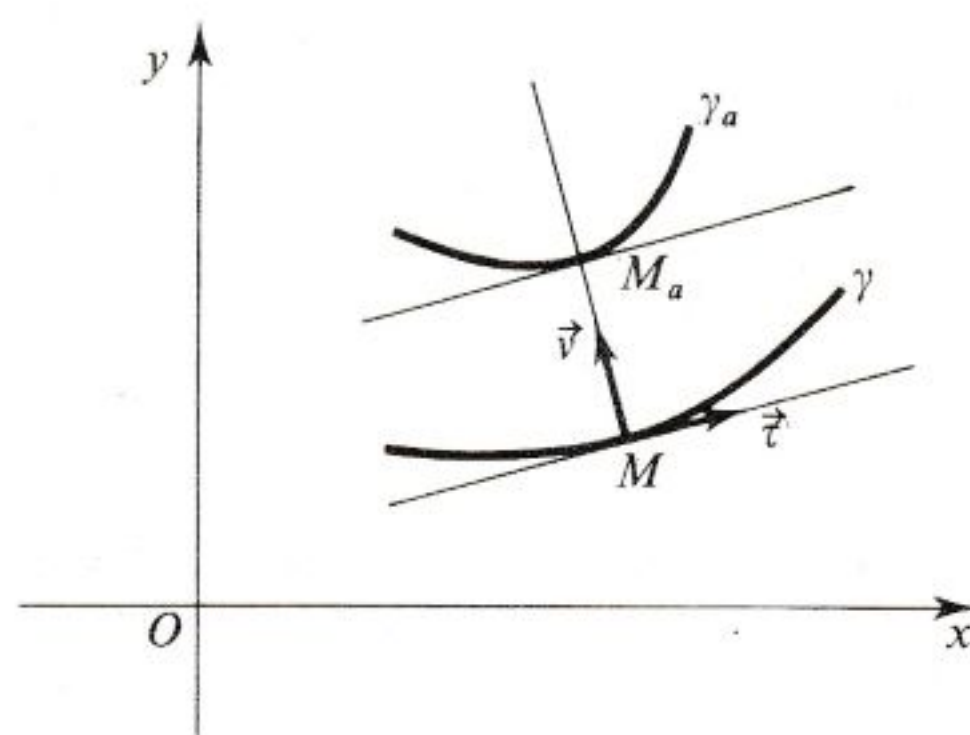


Figura 16.

Propiedades

Derivando la función g_a definida por (3) se obtiene

$$(4) \quad g'_a(s) = g'(s) + a \frac{d\vec{v}}{ds} = [1 - a\rho(s)] \vec{\tau}(s),$$

donde ρ designa la *función curvatura algebraica* de γ definida por $d\vec{\tau}/ds = \rho\vec{v}$ que verifica $d\vec{v}/ds = -\rho\vec{\tau}$ (véase § VI.4 teniendo en cuenta el cambio de orientación).

• Si $a\rho(s) \neq 1$, se ve que γ_a admite, en el punto $M_a = g_a(s)$, una tangente paralela a la tangente a γ en el punto $M = g(s)$ (véase la figura 16). Esta propiedad justifica el nombre de «curva paralela a γ ».

• Si $a\rho(s) = 1$, el punto $M_a = g_a(s)$ es un *punto estacionario* de γ_a . Se observará que esta condición se cumple si (y solamente si) $\rho(s) \neq 0$ y si el punto M_a es el *centro de curvatura* de γ en el punto M (ya que la condición $a\rho(s) = 1$ equivale a $a = R(s)$, con $R(s) = 1/\rho(s)$).

Si el arco γ no tiene puntos de inflexión, los puntos estacionarios de los arcos paralelos a γ son pues puntos de la *evoluta* de γ .

Un cálculo fácil (análogo al que se ha hecho para la evoluta) prueba que en un punto estacionario M_a , el arco γ admite en general una «tangente generalizada» paralela a la tangente en M a γ .

Evolutas de los arcos paralelos a γ

Supongamos ahora que γ sea de clase $k \geq 3$ y sin puntos de inflexión; la función curvatura ρ es entonces derivable y la función $R = 1/\rho$ (radio de curvatura) está bien definida. Al ser fijo el número real a , consideremos un subarco simple y regular Γ_a de γ_a (por lo tanto tal que se tenga $R(s) \neq a$ para todo s perteneciente al intervalo considerado). Por derivación de (4) se obtiene

$$(5) \quad \frac{d^2 M_a}{ds^2} = g_a''(s) = -a\rho'(s) \vec{t}(s) + \rho(s)(1 - a\rho(s)) \vec{v}(s).$$

Puesto que las funciones ρ y $1 - a\rho$ no se anulan, las relaciones (4) y (5) demuestran que los vectores $g_a''(s)$ y $g_a'(s)$ no son nunca colineales, o dicho de otro modo, Γ_a no admite puntos de inflexión.

La curvatura de Γ_a en el punto $M_a = g_a(s)$ es

$$\begin{aligned} \frac{[g_a'(s), g_a''(s)]}{\|g_a'(s)\|^2} &= \frac{\rho(s)[1 - a\rho(s)]}{(1 - a\rho(s))^2} \\ &= \frac{\rho(s)}{1 - a\rho(s)} = \frac{1}{R(s) - a}. \end{aligned}$$

En otros términos, el radio de curvatura de Γ_a en el punto $M_a = g_a(s)$ es $R(s) - a$. De esto resulta que el centro de curvatura de Γ_a en el punto M_a es el punto

$$\Omega(s) = M_a + (R(s) - a) \vec{v}(s) = M + R(s) \vec{v}(s).$$

El centro de curvatura de Γ_a en el punto M_a coincide pues con el centro de curvatura de Γ en M y es por lo tanto independiente de a .

La evoluta de Γ_a y la evoluta del subarco correspondiente γ se hallan pues definidas por la misma parametrización

$$s \mapsto \Omega(s) = M + R(s) \vec{v}(s).$$

Pero para poder decir que los arcos geométricos constituidos por estas evolutas son los mismos, hace falta que sean de la misma clase k . Ahora bien, por convenio, la evoluta de γ es de clase $k - 2$ y (puesto que Γ_a es de clase $k - 1$) la evoluta de Γ_a es solamente de clase $k - 3$. Esta dificultad desaparece si se supone a γ de clase C^∞ , en cuyo caso todos los arcos considerados son también de clase C^∞ . Además, en este caso, la relación entre Γ y Γ_a es simétrica (es decir, Γ es un arco paralelo a Γ_a). Se tiene, pues,

Dos arcos paralelos, de clase C^∞ , regulares y sin puntos de inflexión tienen la misma evoluta.

Evolventes

Manteniendo las notaciones e hipótesis de la definición VII.5.1, recordemos que una **evolvente** de γ es un arco de clase $k - 1$ definido por una parametrización de la forma

$$(6) \quad h_a : s \mapsto g(s) + (a - s) \vec{\tau}(s),$$

donde $a \in \mathbf{R}$ designa una constante arbitraria (véase § VI.3).

Intuitivamente, las evolventes de un arco se obtienen llevando sobre las tangentes orientadas a γ una longitud opuesta a la abscisa curvilínea $s - a$.

Observación. Si se cambia la orientación de γ por su opuesta, el vector $\vec{\tau}(s)$ queda cambiado por $-\vec{\tau}(s)$ y el parámetro normal s queda cambiado por $-s + \text{Cte}$. Se obtiene pues la misma familia de evolventes.

Propiedades

Designemos por δ_a al arco definido por la parametrización h_a . Por derivación de (6) se tiene

$$(7) \quad h'_a(s) = g'(s) - \vec{\tau}(s) + (a - s) \rho(s) \vec{v}(s) = (a - s) \rho(s) \vec{v}(s).$$

• Si $s \neq a$, la evolvente δ_a tiene por normal en el punto $P_a = h_a(s)$ la tangente a γ en el punto $M = g(s)$ (véase la figura 17).

• Si $s = a$, el punto $P_a = h_a(s)$ es un punto estacionario de δ_a .

Se puede demostrar que en un punto tal, el arco δ_a tiene todavía una tangente generalizada paralela a la normal a γ en M . Para simplificar, supongamos ahora que γ sea de clase C^∞ ; las evolventes de γ son entonces de clase C^∞ y se ve inmediatamente que las evolventes de γ constituyen una familia de arcos paralelos; o sea, con más precisión

Si γ es un arco regular de clase C^∞ y si δ es una evolvente regular de γ , las restantes evolventes de γ son todos los arcos paralelos a δ .

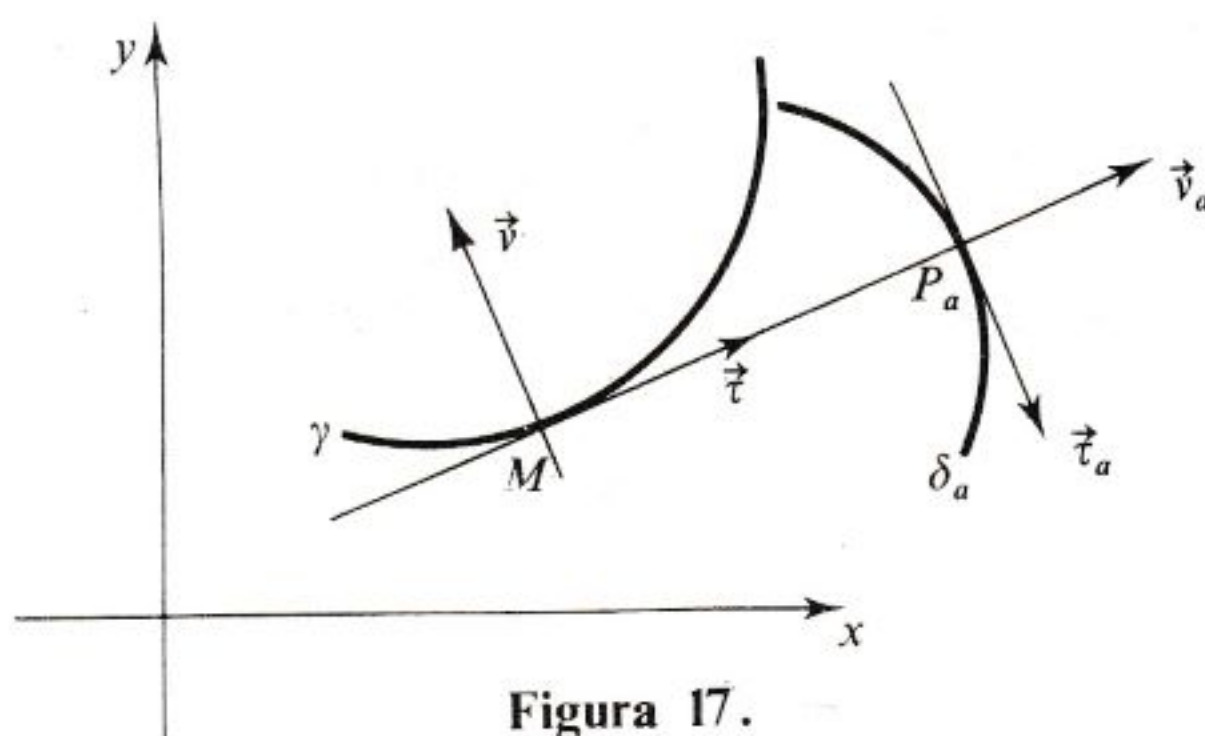


Figura 17.

Relaciones entre evolutas y evolventes

Supongamos que γ es de clase $k \geq 3$ y orientemos momentáneamente a la evolvente δ_a de manera que su vector unitario tangente sea $\vec{\tau}_a = -\vec{v}$; la normal unitaria orientada de δ_a es entonces $\vec{v}_a = \vec{\tau}$ y los parámetros normales σ de δ_a verifican

$$\frac{d\sigma}{ds} = (s - a) \rho(s).$$

Suponiendo δ_a regular y tomando un parámetro normal σ sobre δ_a , se tiene

$$\frac{d\vec{\tau}_a}{d\sigma} = -\frac{d\vec{v}}{d\sigma} = \frac{1}{(a - s) \rho(s)} \frac{d\vec{v}}{ds} = -\frac{1}{a - s} \vec{\tau} = \frac{\vec{v}_a}{s - a}.$$

La curvatura algebraica de δ_a en el punto $P_a = h_a(s)$ es pues igual a $1/(s - a)$ y su radio de curvatura algebraica es

$$R_a(s) = s - a = \overline{P_a M}$$

(estando tomadas las medidas algebraicas según el vector $\vec{\tau} = \vec{v}_a$). De ahí resulta que *el centro de curvatura de δ_a en el punto P_a es el punto M de γ .*

En consecuencia, la evoluta de δ_a es (de acuerdo con los convenios establecidos) el arco de clase $k - 3$ definido por la parametrización normal g .

Si γ es de clase C^∞ , *la evoluta de δ_a es pues el mismo arco γ .*

En resumen, si γ es un arco regular de clase C^∞ y si se hace abstracción de las dificultades originadas por los puntos estacionarios o de inflexión de las curvas obtenidas, se puede enunciar:

- *Dos arcos regulares paralelos a γ son paralelos entre sí.*
- *Todo arco regular paralelo a γ tiene la misma evoluta que γ .*
- *Las evolventes de γ constituyen una familia de arcos paralelos que tienen todos a γ como evoluta.*
- *Las evolventes de la evoluta de γ son los arcos paralelos a γ .*

Ejemplos

En los ejemplos que siguen se definirán los arcos mediante una parametrización en un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j})$ del plano afín euclídeo orientado \mathcal{E}_2 .

1. *Evoluta de la elipse $\gamma: x = a \cos t, y = b \sin t, t \in \mathbf{R}, 0 < b < a$. γ es un arco cerrado simple de clase C^∞ y sin puntos de inflexión.*

Las coordenadas (x_Ω, y_Ω) del centro de curvatura Ω en el punto de parámetro t son

$$(8) \quad x_\Omega(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad y_\Omega(t) = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t.$$

El arco definido por (8) cuando t recorre \mathbf{R} es cerrado simple; posee cuatro puntos estacionarios obtenidos para $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. El estudio de estos puntos es inmediato,

— para $t = 0$, se tiene

$$x_{\Omega}(0) = \frac{a^2 - b^2}{a}, y_{\Omega}(0) = 0,$$

— y para $t = \pi/2$

$$x_{\Omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y_{\Omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Se deduce de ahí fácilmente la *construcción de los centros de curvatura* en los vértices $A B A' B'$ de γ (véase la figura 18); pongamos $A = M(0)$, $B = M(\pi/2)$ y designemos por I el punto de coordenadas (a, b) ; los centros de curvatura P, Q de γ en los puntos A, B son los puntos de intersección de la perpendicular a la recta AB que pasa por I , con los ejes Ox, Oy .

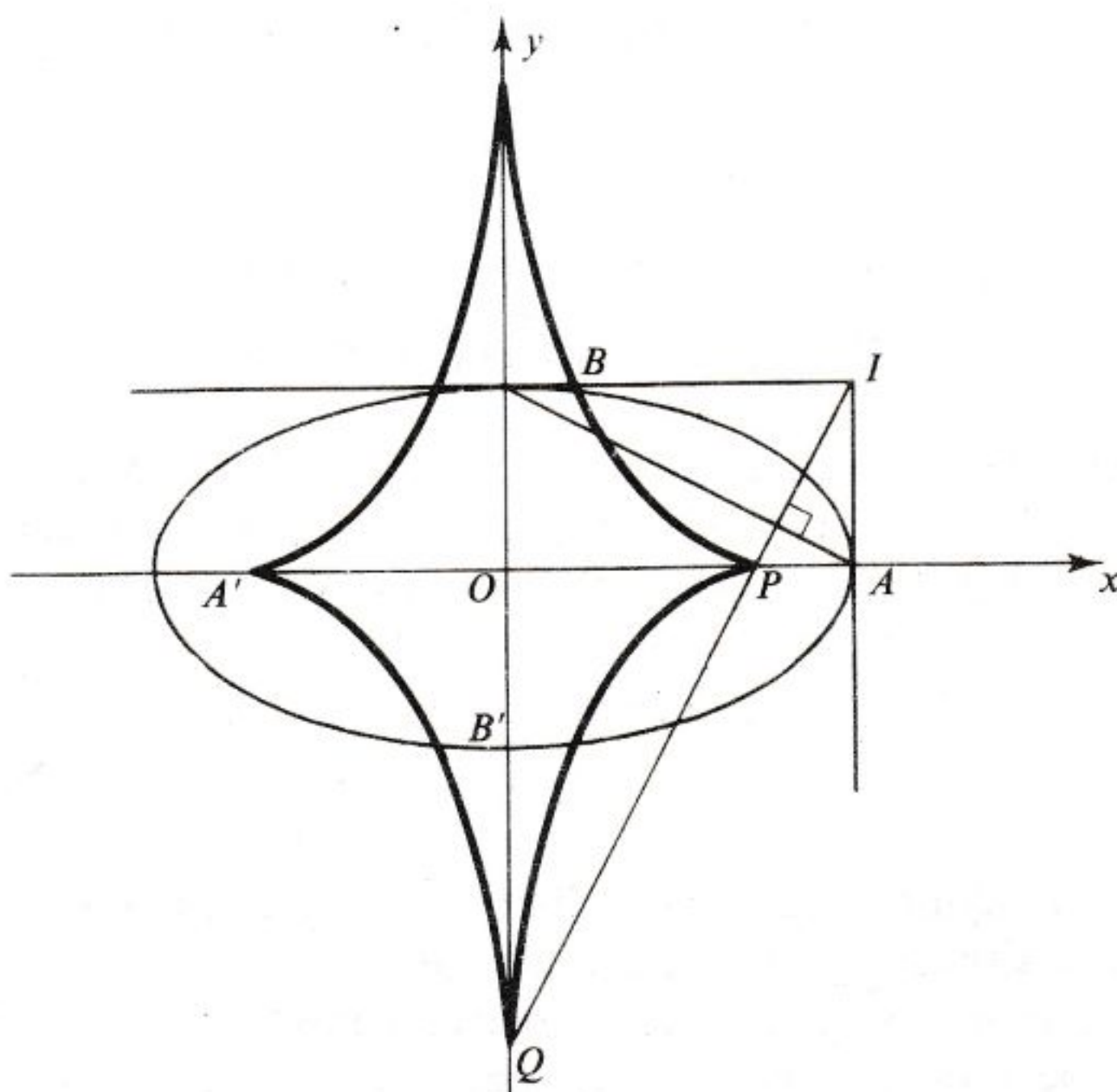


Figura 18.

2. Arcos paralelos a la elipse γ definida en el ejemplo 1.

Orientemos a γ en el sentido de las t crecientes. Designando por $\vec{v}(t)$ el vector normal en $M(t)$ a γ , los arcos paralelos a γ están definidos por las parametrizaciones de la forma

$$t \mapsto P(t) = M(t) + l v(t),$$

donde l designa una constante arbitraria.

Poniendo $E(t) = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$, las coordenadas $(X(t), Y(t))$ del punto $P(t)$ son

$$(9) \quad X(t) = \cos t [a - bl(E(t))^{-1/2}], \quad Y(t) = \sin t [b - al(E(t))^{-1/2}].$$

Para estudiar el arco definido por (9) se hace variar t en $[0, \pi/2]$, después se completa con ayuda de las simetrías respecto a los ejes de coordenadas. Poniendo

$$H(t) = abl - (E(t))^{3/2},$$

se tiene:

$$E'(t) = 2(a^2 - b^2) \sin t \cos t,$$

$$H'(t) = -3(a^2 - b^2) (E(t))^{1/2} \sin t \cos t,$$

de donde se deduce

$$X'(t) = a \sin t (E(t))^{-3/2} H(t),$$

$$Y'(t) = -b \cos t (E(t))^{-3/2} H(t).$$

Los puntos estacionarios corresponden a los valores de t , tales que $H(t) = 0$. Sobre $[0, \pi/2]$, la función $t \mapsto H(t)$ decrece estrictamente desde $abl - b^3$ hasta $abl - a^3$. Para $t \in [0, \pi/2]$ existe pues un punto estacionario si y solamente si

$$\left(l - \frac{b^2}{a}\right) \left(l - \frac{a^2}{b}\right) \leq 0.$$

Al no tener la elipse γ puntos de inflexión, los puntos estacionarios de las paralelas de γ están situados sobre la evoluta de γ .

Vamos a estudiar el punto estacionario cuando se tiene $b^2/a < l < a^2/b$ (el lector podrá hacer un estudio análogo para $l = b^2/a$ y $l = a^2/b$). Sea $t_0 \in]0, \pi/2[$ el valor de t correspondiente a este punto estacionario.

Para $t \in]0, \pi/2[$ y $t \neq t_0$, se tiene

$$X'(t) \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{Y'(t)}{X'(t)} = -\frac{b}{a} \cotg t.$$

La función $Y'(t)/X'(t)$ se prolonga pues por continuidad en $]0, \pi/2[$ en una función estrictamente creciente (y de clase C^∞), que varía desde $-\infty$ hasta 0.

Se deduce de ahí que la pendiente de la tangente en el punto estacionario es $-b/a \cotg t_0$ y que la disposición es la del *retroceso de primera especie*.

Se deduce también que para $t \in]0, \pi/2[$, la paralela obtenida es un arco *simple*, lo cual hace evidente el estudio de los puntos múltiples de la paralela entera. La figura 19 muestra los distintos casos que se presentan.

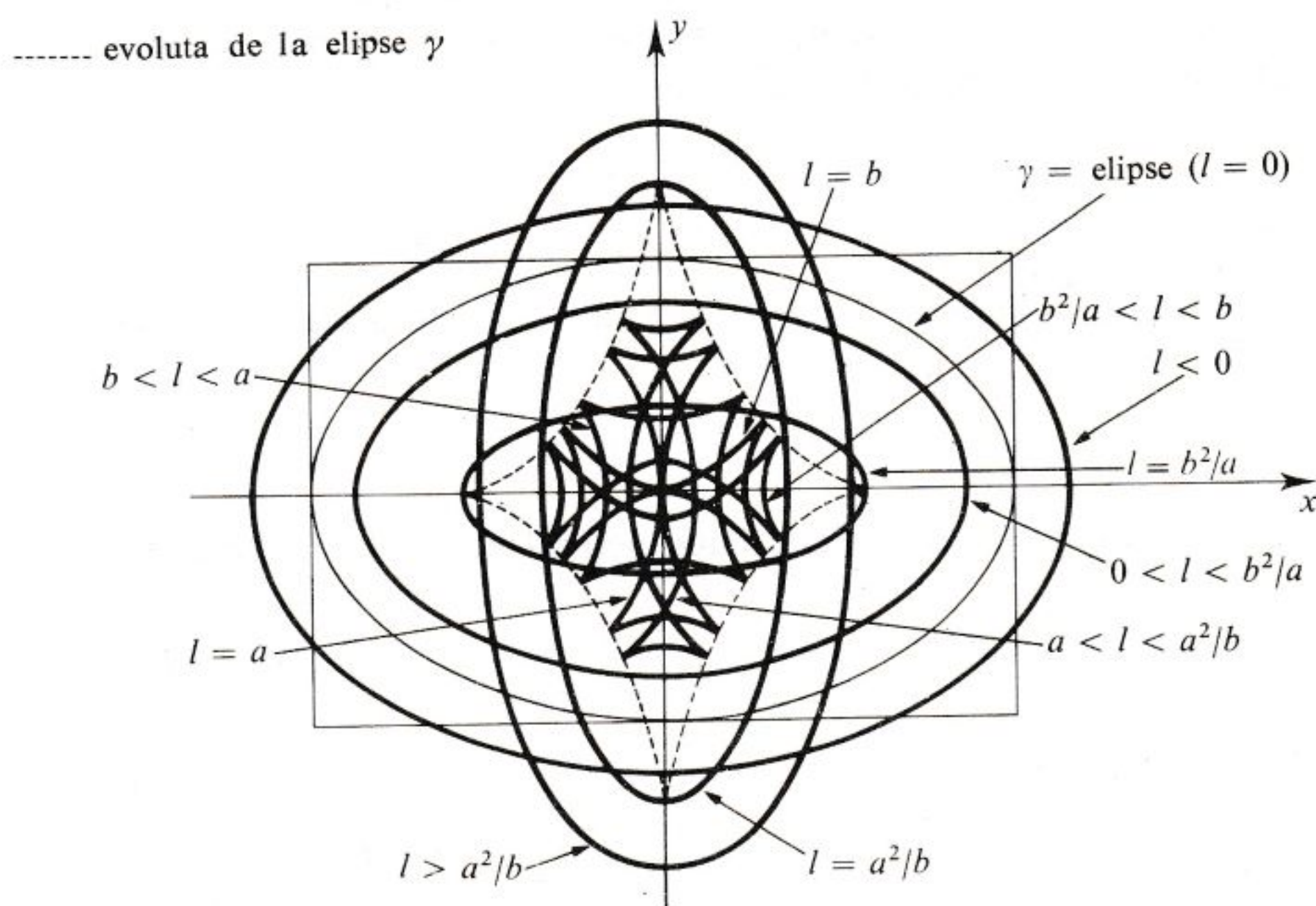


Figura 19.

Para $l = b^2/a$ (resp. $l = a^2/b$), la paralela presenta dos puntos estacionarios en Ox (resp. en Oy), que son también los centros de curvatura en los vértices del eje mayor de γ (resp. del eje menor de γ). Estos puntos estacionarios tienen una disposición *aplanada*.

3. *Evoluta y evolvente de una espiral logarítmica.*

Con ayuda del sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$, identifiquemos a \mathcal{E}_2 con el cuerpo \mathbf{C} de los complejos. Definamos la espiral \mathcal{S} por

$$t \mapsto z(t) = \exp(at),$$

donde $a = \alpha + i\beta$ con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, cuando t recorre \mathbf{R} .

a) El afijo $\omega(t)$ del centro de curvatura de \mathcal{S} en el punto M de afijo $z(t)$ es (según puede verse con un cálculo sencillo):

$$\omega(t) = \frac{\alpha i}{2\beta} \exp(at).$$

Se ve pues que la evoluta de \mathcal{S} es una espiral logarítmica deducida de \mathcal{S} por la semejanza de centro O , de ángulo $\pi/2$ y de razón $\alpha/2\beta$.

b) Se tiene $z'(t) = \alpha \exp(at)$; orientemos \mathcal{S} en el sentido de las t crecientes y sea s el parámetro normal de \mathcal{S} definido por

$$s(t) = \frac{|a|}{\alpha} e^{\alpha t}.$$

El vector unitario tangente en M a \mathcal{S} está representado por el número complejo

$$\zeta(t) = \frac{a}{|a|} e^{i\beta t}.$$

Las evolventes de \mathcal{S} se hallan, pues, definidas por las parametrizaciones

$$t \mapsto Z(t) = z(t) + (s_0 - s(t)) \zeta(t), \quad (s_0 = \text{Cte}),$$

o sea

$$Z(t) = \exp(at) + \left(s_0 - \frac{|a|}{\alpha} e^{\alpha t}\right) \frac{a}{|a|} e^{i\beta t},$$

o bien

$$Z(t) = \left(1 - \frac{a}{\alpha}\right) \exp(at) + s_0 \frac{a}{|a|} e^{i\beta t}.$$

Se comprueba que entre estas evolventes una y sólo una de ellas es una espiral logarítmica, por otra parte semejante a \mathcal{S} : es la evolvente S obtenida para

$s_0 = 0$. Al no tener S puntos de inflexión, las evolventes de \mathcal{S} no son sino los arcos paralelos a S .

Observación. Si $\alpha = 0$, la parametrización $t \mapsto z(t) = \exp(at) = e^{i\beta t}$ ($t \in \mathbf{R}$) define la circunferencia $|z| = 1$. Los cálculos de $b)$ se simplifican y se obtiene $ds/dt = \beta$. Tomando $s(t) = \beta t$, el número complejo que representa al vector unitario tangente es $\zeta(t) = ie^{i\beta t}$, y las evolventes se hallan definidas mediante las parametrizaciones

$$t \mapsto Z(t) = (1 + is_0 - i\beta t) e^{i\beta t} \quad (s_0 = \text{Cte}).$$

Caso de una circunferencia

Si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, la espiral \mathcal{S} se reduce a la *circunferencia unidad* C definida por la parametrización $t \mapsto e^{it}$. Los cálculos se simplifican, se tiene aquí $s(t) = t$ y las evolventes de C están definidas por las parametrizaciones

$$t \mapsto Z(t) = (1 + is_0 - it) e^{it} \quad (s_0 = \text{Cte}).$$

Poniendo $u = t - s_0$ se obtienen las parametrizaciones

$$u \mapsto Z(u) = (1 - iu) e^{i(u+s_0)}.$$

En esta forma se ve que las evolventes de C se deducen a partir de una de ellas por rotaciones arbitrarias de centro O . Para $s_0 = 0$ se obtiene la curva de ecuaciones paramétricas

$$x = \cos u + u \operatorname{sen} u \quad y = \operatorname{sen} u - u \cos u.$$

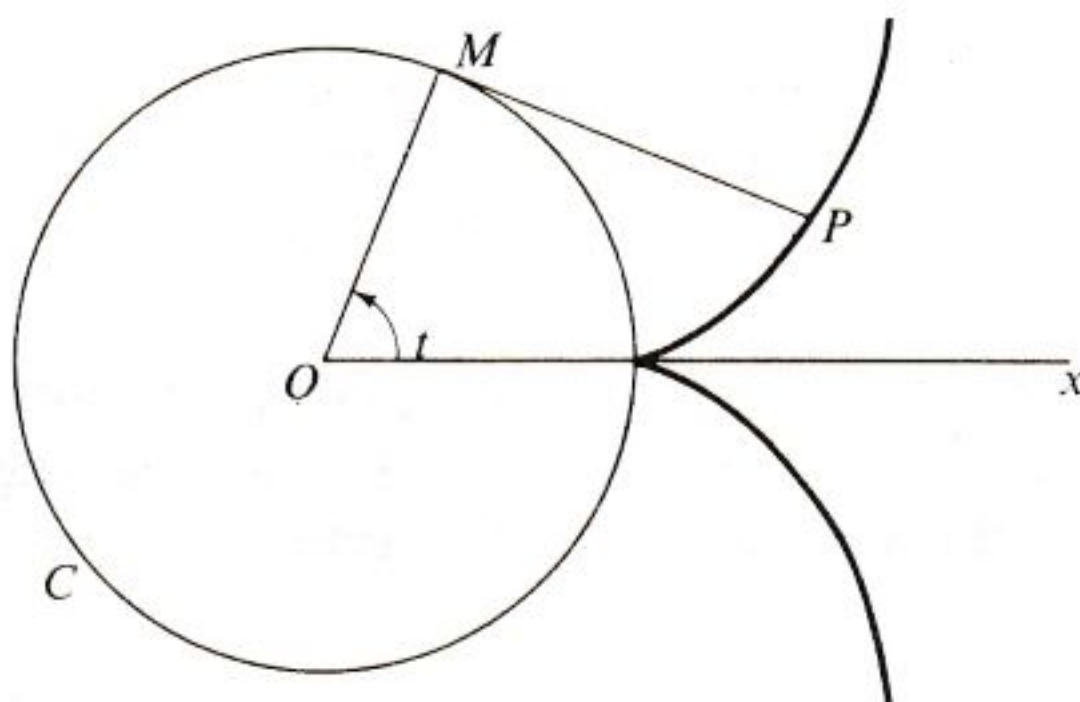


Figura 20.

Este arco tiene al eje Ox como eje de simetría, y se construye fácilmente con ayuda de una parametrización en polares. Tiene la forma de una espiral (véase la figura 20) y presenta un retroceso único en el punto $(1, 0)$.

Se observará que todas las evolventes de C son *arcos simples*. Estos arcos se materializan desenrollando un hilo tenso arrollado sobre una bobina.

§ VII.6 CURVAS TROCOIDES Y CICLOIDES

En este § utilizaremos los resultados de la teoría del *movimiento de plano sobre plano* (véase § XII.12).

El plano afín euclídeo orientado \mathcal{E}_2 se identificará con el cuerpo \mathbf{C} de los complejos con ayuda de un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j})$ que se considerará fijo en lo que sigue. El plano vectorial E_2 se identificará también con \mathbf{C} con ayuda de la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Definición VII.6.1

Se da el nombre de **trocoide de centro O** a todo arco de clase C^∞ definido por una parametrización de la forma

$$(1) \quad t \mapsto z(t) = a e^{i\alpha(t-t_0)} + b e^{i\beta(t-t_1)} \quad (t \in \mathbf{R})$$

donde t_0 y t_1 son constantes arbitrarias y donde a, b, α, β son constantes reales no nulas tales que $\alpha \neq \beta$ ⁽¹⁾.

El cambio de parámetro $t \mapsto t - t_0$ nos lleva al caso en que $t_0 = 0$. Poniendo $t_0 - t_1 = h$ nos podemos limitar al estudio de las parametrizaciones de la forma

(2)

$$t \mapsto z(t) = a e^{i\alpha t} + b e^{i\beta(t+h)} \quad (t \in \mathbf{R})$$

Observación. Cambiando convenientemente los valores de las constantes t_0, t_1 se hubiese podido suponer $a > 0$ y $b > 0$. Será lo que hagamos en los esquemas.

Por una rotación de los ejes nos podríamos también reducir al caso en que $t_0 = t_1 = 0$.

⁽¹⁾ Si se tuviera $\alpha = \beta$, el arco definido por la parametrización (1) sería una circunferencia.

Interpretación cinemática

Siendo fijos los números a , α y β , vamos a ver que cuando b y h varían, la aplicación (2) define los movimientos de los distintos puntos de un *plano móvil* (véase § XII.12).

Para ello, definamos un sistema de referencia ortonormal móvil $(A; \vec{I}, \vec{J})$ de la siguiente manera

- el afijo de A es $z(t) = a e^{i\alpha t}$,
- los afijos respectivos de los vectores \vec{I} y \vec{J} son $e^{i\beta t}$ e $ie^{i\beta t}$ (véase la figura 21).

Sea entonces $M(t)$ el punto que admite las constantes b y βh como coordenadas polares en este sistema de referencia, es decir el punto de \mathcal{E}_2 definido por

$$\overrightarrow{AM} = b(\vec{I} \cos(\beta h) + \vec{J} \sin(\beta h)).$$

En el lenguaje de la Cinemática, se dice que $M(t)$ es un punto del *plano móvil* \mathcal{P} ligado al sistema de referencia $(A; \vec{I}, \vec{J})$ (véase la figura 21).

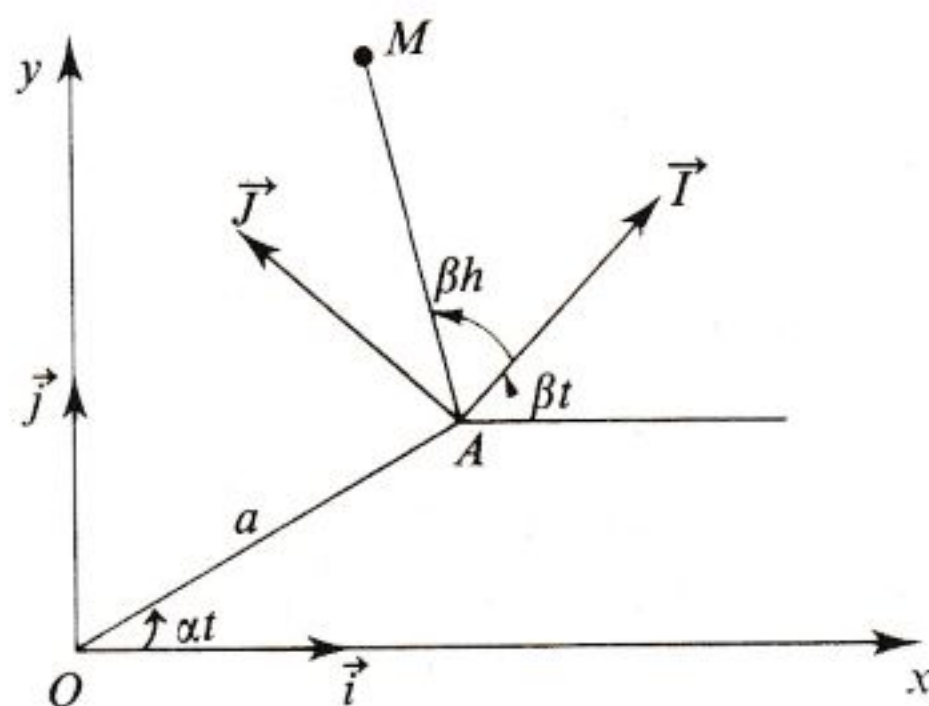


Figura 21.

Según la definición del punto A y de los vectores \vec{I}, \vec{J} se ve inmediatamente que el afijo del punto $M(t)$ en el «sistema de referencia fijo» $(O; \vec{i}, \vec{j})$ es el número complejo $z(t)$ definido por (2).

La relación (2) define pues el movimiento del punto $M(t)$; cuando b y h varían en \mathbf{R} , se obtiene de este modo los movimientos de todos los puntos del plano móvil.

Centro instantáneo de rotación

La *velocidad angular* de rotación del plano móvil \mathcal{P} es igual a β (ya que el vec-

tor \vec{I} de ángulo polar βt está ligado a este plano); al ser ésta no nula, el movimiento de \mathcal{P} tiene un centro instantáneo de rotación que es, en cada instante t , el único punto $M(t)$ de velocidad nula (véase § XII.12). Aquí, la velocidad del punto $M(t)$ es el vector de afijo

$$z'(t) = ia\alpha e^{i\alpha t} + ib\beta e^{i\beta(t+h)};$$

la relación $z'(t) = 0$ equivale a

$$(3) \quad b e^{i\beta h} = -\frac{a\alpha}{\beta} e^{i(\alpha-\beta)t}.$$

Ahora bien, el número $\zeta = b e^{i\beta h}$ es el afijo del punto $M(t)$ en el sistema de referencia móvil $(A; \vec{I}, \vec{J})$, y al ser fijos los números a, α, β, t , la relación (3) define por lo tanto un punto único de velocidad nula que designaremos por K , y que es el *centro instantáneo de rotación* del movimiento considerado.

Por definición, la *rodante* (o *ruleta móvil*) \mathcal{R} de este movimiento es la trayectoria relativa del punto K , y queda determinada en el sistema de referencia $(A; \vec{I}, \vec{J})$ por la parametrización

$$t \mapsto \zeta_K(t) = -\frac{a\alpha}{\beta} e^{i(\alpha-\beta)t}.$$

Esta es circunferencia de centro A y radio $\left| \frac{a\alpha}{\beta} \right|$ recorrida con la velocidad angular constante $\alpha - \beta$.

La *base* (o *ruleta fija*) \mathcal{B} del movimiento es la trayectoria del punto K en el plano fijo ligado al sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Ahora bien, el afijo del punto K en este sistema de referencia es (por comparación con las fórmulas (2) y (3))

$$z_K(t) = a e^{i\alpha t} - \frac{a\alpha}{\beta} e^{i\alpha t},$$

o sea,

$$z_K(t) = a \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) e^{i\alpha t}$$

La base \mathcal{B} es pues la circunferencia de radio $\left| a \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right|$ recorrida con la velocidad angular constante α . Se comprueba que la circunferencia \mathcal{R} es tangente a la circunferencia \mathcal{B} en el punto K (véase la figura 22).

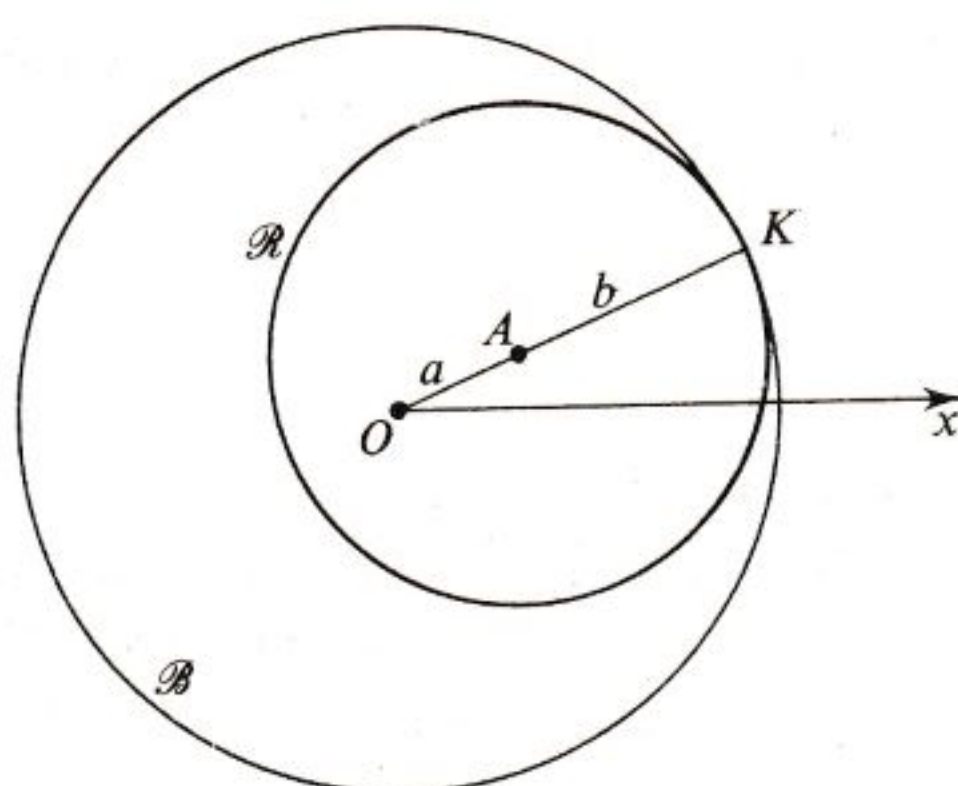


Figura 22.

Curvas cicloidales con centro

Volvamos a la trocoide definida por la parametrización (2). Sus puntos estacionarios (si es que existen) son aquéllos que se obtienen para los valores de t que verifican la relación (3). Ahora bien, solamente existe un tal valor de t si se tiene

$$|b| = \left| a \frac{\alpha}{\beta} \right|,$$

o sea,

$$(4) \quad |b\beta| = |a\alpha|.$$

La relación $|b| = \left| a \frac{\alpha}{\beta} \right|$ significa que el punto móvil $M(t)$ verifica

$$\| \overrightarrow{AM}(t) \| = \left| a \frac{\alpha}{\beta} \right|;$$

en otros términos, el punto $M(t)$ es un punto de la rodante \mathcal{R} (circunferencia del plano móvil de centro A y de radio $\left| a \frac{\alpha}{\beta} \right|$).

Por lo tanto si la trocoide definida por (2) tiene puntos estacionarios, es el arco descrito por un punto de la circunferencia móvil \mathcal{R} de radio $|b|$ al rodar sin deslizamiento sobre una circunferencia fija de radio $\left| a \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right|$.

Esta interpretación hace ver el interés que estas curvas tienen en la teoría de engranajes. Daremos la siguiente

Definición VII.6.2

Una **curva cicloidal** de centro O es una trocoide de centro O que tiene **puntos estacionarios**; si la **circunferencia rodante** \mathcal{R} es exterior a la **circunferencia base** \mathcal{B} , se dice que es una **epicicloide**; si \mathcal{R} es interior a \mathcal{B} , se dice que es una **hipocicloide**.

Observemos que en el caso de una epicicloide, la circunferencia base \mathcal{B} puede ser interior o exterior a \mathcal{R} (véanse las figuras 23 y 24).

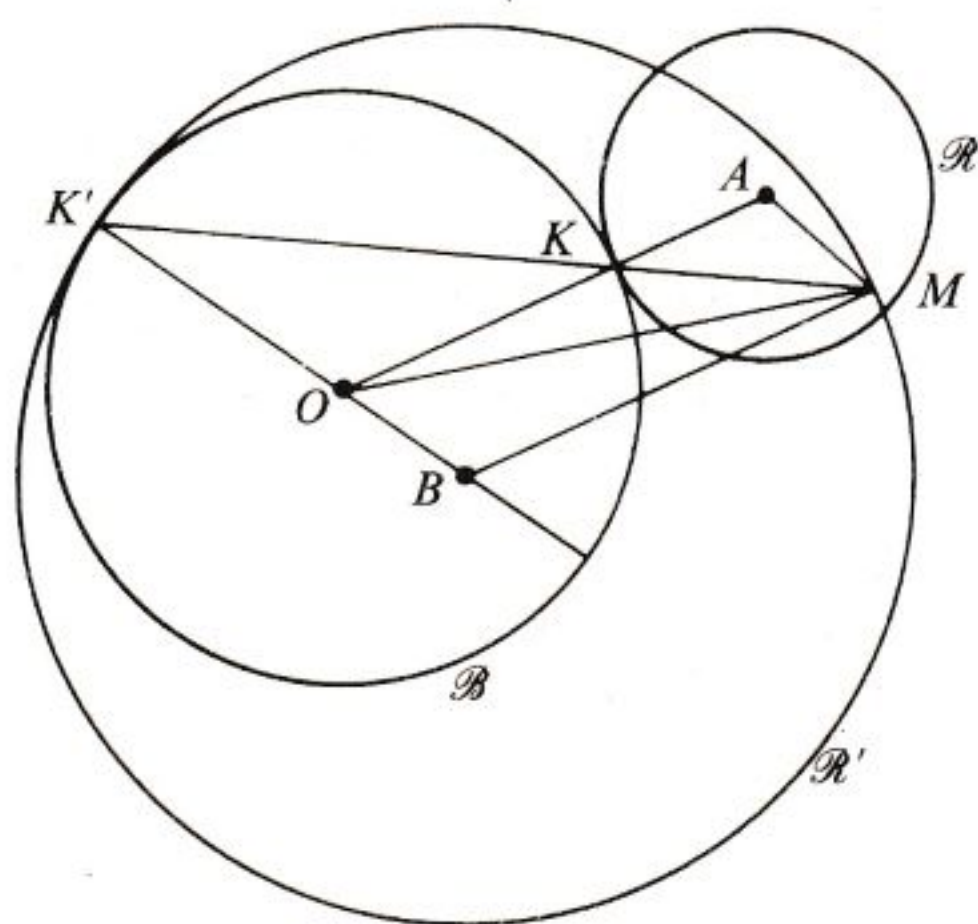


Figura 23. ($\alpha\beta > 0$).

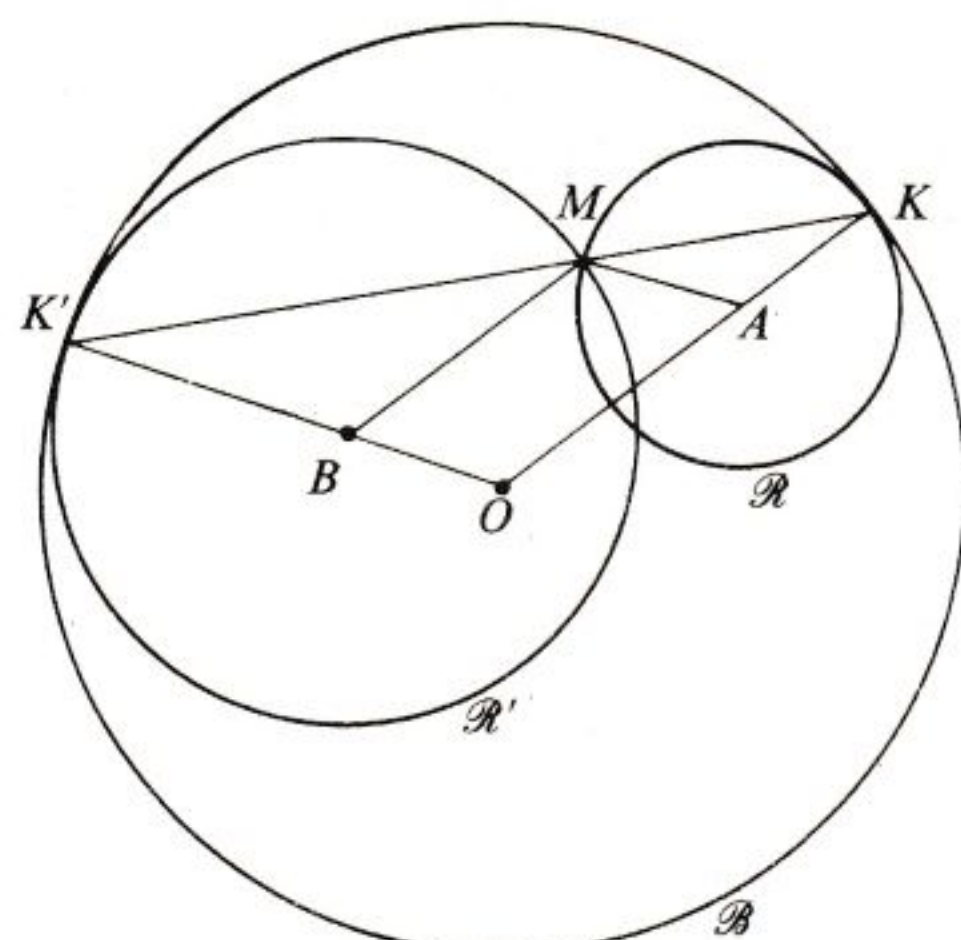


Figura 24. ($\alpha\beta < 0$).

Para que la circunferencia \mathcal{R} sea interior a la circunferencia \mathcal{B} , es necesario y suficiente que su centro A esté situado *entre* los puntos O y K (véase la figura 24). Ahora bien, los afijos respectivos de A y K en la base $(O; \vec{i}, \vec{j})$ son

$$z_A = a e^{i\alpha t} \quad \text{y} \quad z_K = a \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{i\alpha t}.$$

Por lo tanto A está entre O y K si, y solamente si, se tiene $\alpha/\beta < 0$, o sea $\alpha\beta < 0$: en este caso, los puntos de \mathcal{R} describen *hipocicloides*; en el caso contrario, describen *epicicloides*. En conclusión

VII.6.1 Para que la trocoide definida por (2) sea una **epicicloide** [resp. una **hipocicloide**], es necesario y suficiente que los números a, b, α, β , verifiquen

$$\left| \frac{b}{a} \right| = \frac{\alpha}{\beta} \left[\text{resp.} \left| \frac{b}{a} \right| = -\frac{\alpha}{\beta} \right].$$

Doble generación de una curva cicloidal

Intercambiando los papeles de los pares (a, α) y (b, β) se ve inmediatamente que la trocoide definida por (1) o (2) puede ser considerada de dos maneras como descrita por un punto ligado a una circunferencia \mathcal{R} que rueda sobre una circunferencia \mathcal{B} . Vamos a comparar estos dos modos de generación en el caso de una curva cicloidal.

Sea \mathcal{C} la curva cicloidal definida por (2) en el caso en que $|a\alpha| = |b\beta|$.

a) Según hemos visto ya, esta curva se engendra al rodar sin deslizamiento la circunferencia de centro A y de radio $\left| a \frac{\alpha}{\beta} \right| = |b|$ sobre la circunferencia \mathcal{B} de centro O y de radio

$$R = \left| a \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right| = \left| b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \right|.$$

Recordemos que la velocidad angular de rotación de este plano es β .

b) La relación

$$z(t) = a e^{i\alpha t} + b e^{i\beta(t+h)}$$

se escribe también:

$$z(t) = b e^{i\beta\tau} + a e^{i\alpha(\tau-h)}$$

poniendo $\tau = t + h$. Intercambiando a con b , α con β y cambiando h por $-h$ se ve que \mathcal{C} se engendra al rodar sin deslizamiento la circunferencia \mathcal{R}' de centro B y de radio $|a|$ sobre la misma circunferencia \mathcal{B} , siendo el afijo de B

$$z_B(t) = b e^{i\beta\tau} = b e^{i\beta(t+h)}.$$

El nuevo plano móvil \mathcal{P}' tiene por velocidad angular α y el nuevo centro instantáneo de rotación K' (punto de contacto de \mathcal{R}' y \mathcal{B}) tiene por afijo

$$z_{K'}(t) = b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{i\beta t} = b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{i\beta(t+h)}.$$

Se observará que la *distinción entre epicicloide e hipocicloide es independiente de la generación elegida*.

Mediante un cálculo sencillo, se tiene:

$$z(t) - z_{K'}(t) = a e^{i\alpha t} + \frac{b\beta}{\alpha} e^{i\beta(t+h)} = \frac{\beta}{\alpha} [z(t) - z_K(t)].$$

De ahí se deduce que los puntos M, K, K' están alineados (véanse las figuras 23 y 24); además, el punto M está entre K y K' si $\alpha\beta < 0$ (caso de una hipocicloide) y está en el exterior del segmento $[K, K']$ si $\alpha\beta > 0$ (caso de una epicicloide).

Si se supone $\alpha + \beta \neq 0$, se observará que existe siempre una generación única tal que el punto O es exterior a la circunferencia rodante \mathcal{R} . Se trata de la generación para la cual el radio de la circunferencia rodante es mínimo y que permite dibujar más fácilmente la curva \mathcal{C} . Si se supone $|\beta| > |\alpha|$ (lo cual implica $|b| < |a|$) esta generación es la primera de las que acabamos de describir. En el caso de una epicicloide, la circunferencia rodante \mathcal{R} es entonces *exterior* a la circunferencia base \mathcal{B} (véase la figura 23).

Si se tiene $\alpha + \beta = 0$, los dos modos de generación coinciden; la circunferencia rodante \mathcal{R} pasa entonces por O ; la curva cicloidal correspondiente se reduce a un segmento de recta (ver más adelante).

Epitrocoides e hipotrocoides

Volvamos al caso general de una trocoide cualquiera \mathcal{T} definida por la parametrización (1) o (2), siendo las constantes a, α, b, β cualesquiera.

Si $\alpha\beta > 0$, se dice que \mathcal{T} es una epitrocoide; si $\alpha\beta < 0$ se dice que \mathcal{T} es una hipotrocoide: según hemos visto ya, \mathcal{T} se puede considerar de dos maneras distintas como descrita por un punto ligado a una circunferencia \mathcal{R} que rueda sin resbalar sobre una circunferencia fija \mathcal{B} .

Para fijar ideas, supongamos $|\beta| \geq |\alpha|$; se dice entonces que \mathcal{T} es una curva cicloidal alargada [resp. acortada] si se tiene

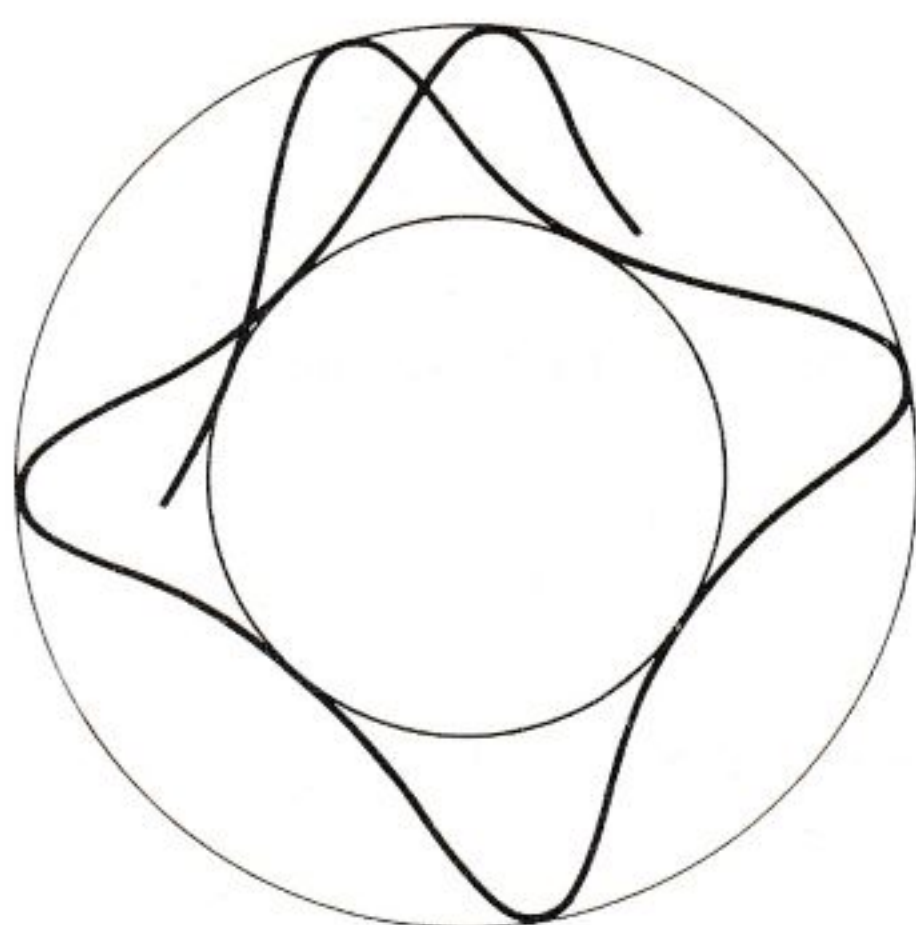
$$|b| > \left| \frac{a\alpha}{\beta} \right| \quad \left[\text{resp. } |b| < \left| \frac{a\alpha}{\beta} \right| \right].$$

Si se elige la generación para la cual el radio de la circunferencia rodante \mathcal{R} es más pequeño (por lo tanto igual aquí a $|a\alpha/\beta|$), las curvas cicloidales alargadas

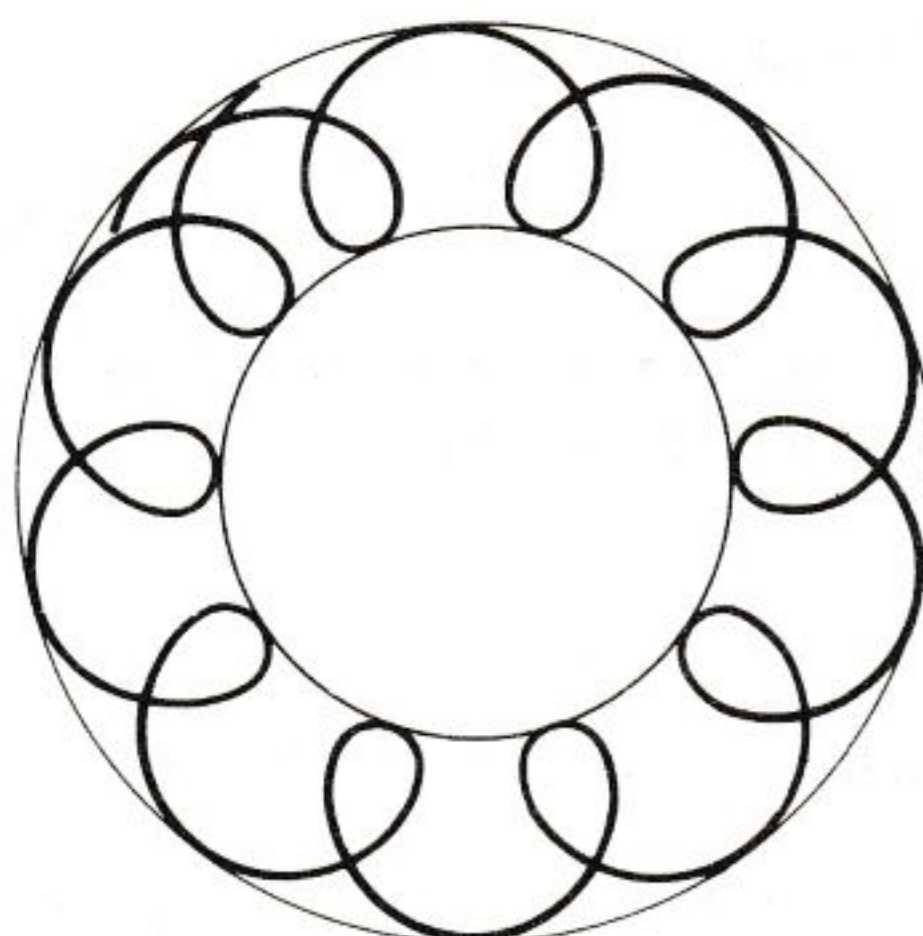
[resp. acortadas] son las que se describen por los puntos del plano móvil exteriores [resp. interiores] a la circunferencia rodante.

Las curvas cicloidales alargadas presentan «bucles». Las curvas cicloidales acortadas presentan «ondulaciones» (véase la figura 25).

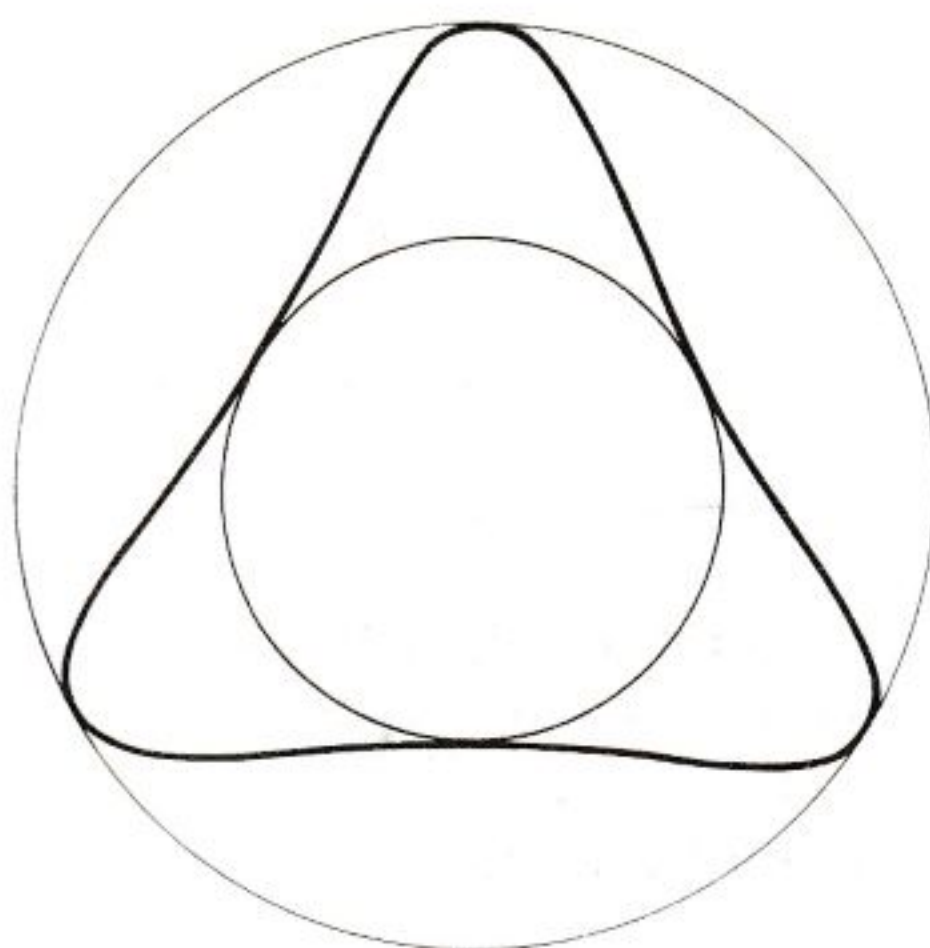
Observación. Del mismo modo se estudiarían las **curvas cicloidales rectas** descritas por los puntos de un plano móvil ligado a una circunferencia que rueda sin deslizar sobre una recta fija. Sus propiedades se proponen en el ejercicio VII.22.



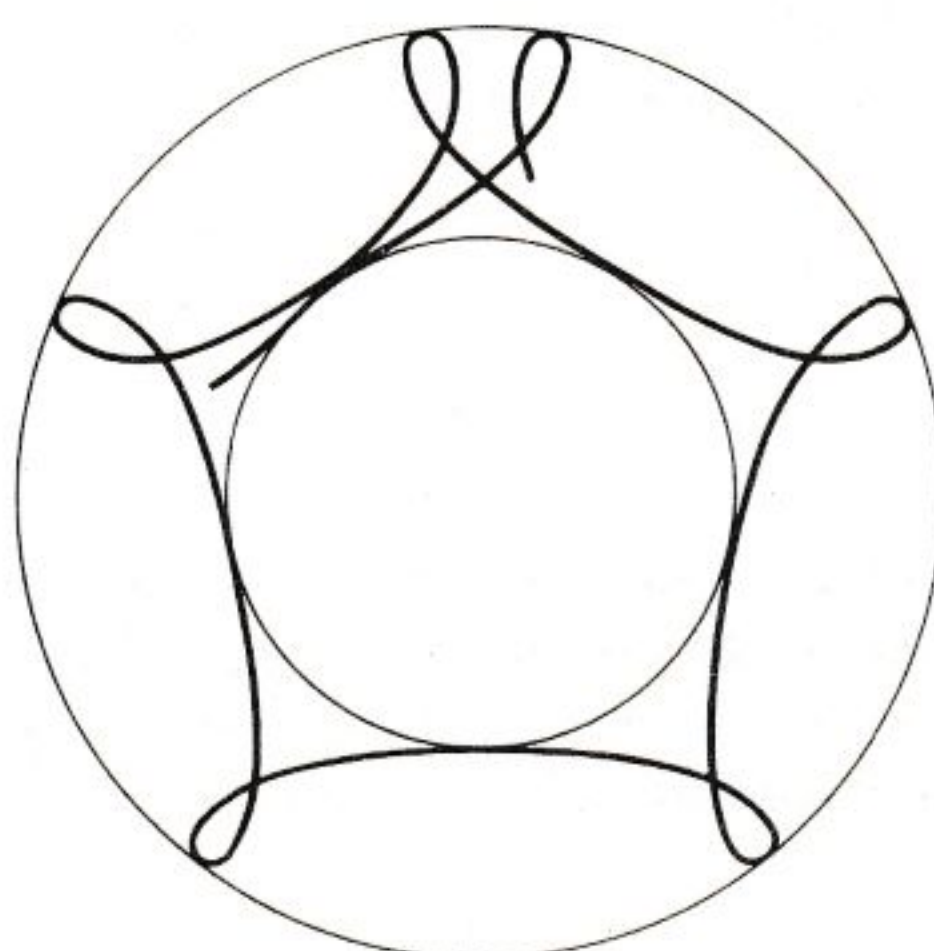
epitrocoide acortada



epitrocoide alargada



hipotrocoide acortada



hipotrocoide alargada

Figura 25.

§ VII.7 PROPIEDADES GENERALES DE LAS CURVAS CICLOIDALES

Consideremos de nuevo la curva cicloidal \mathcal{C} definida por la parametrización

$$t \mapsto z(t) = a e^{i\alpha t} + b e^{i\beta(t+h)}$$

con

$$\frac{a}{b} = \varepsilon \frac{\beta}{\alpha} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{y} \quad \beta \neq \alpha.$$

Poniendo $n = \beta/\alpha$, se obtiene

$$z(t) = \frac{a}{n} (n e^{i\alpha t} + \varepsilon e^{i\beta(t+h)}).$$

La transformada de \mathcal{C} en la rotación de ángulo θ_0 alrededor de O está definida por la parametrización

$$t \mapsto Z(t) = \frac{a}{n} (n e^{i\alpha t + i\theta_0} + \varepsilon e^{i\alpha n(t+h) + i\theta_0}).$$

Puesto que se tiene $n \neq 1$, se puede elegir siempre θ_0 de modo que se tenga

$$\varepsilon e^{i\alpha n h + i\theta_0} = -e^{i\theta_0}$$

(basta con tomar $\theta_0 = \frac{n\alpha h}{n-1}$ si $\varepsilon = -1$ y $\theta_0 = \frac{n\alpha h - \pi}{n-1}$ si $\varepsilon = +1$). El cambio de parámetro $\theta = \alpha t + \theta_0$ nos lleva entonces al estudio de la curva cicloidal definida por la parametrización

(1)

$$Z(\theta) = \frac{a}{n} (n e^{i\theta} - e^{in\theta}).$$

En lo que sigue vamos a designar por M el punto de afijo $Z(\theta)$ definido por (1), por A el punto de afijo $a e^{i\theta}$, por \vec{I}, \vec{J} los vectores de afijos respectivos $e^{in\theta}$, $i e^{in\theta}$, y por \mathcal{P} el plano móvil ligado al sistema de referencia $(A; \vec{I}, \vec{J})$. El centro instantáneo de rotación del movimiento de \mathcal{P} es el punto K de afijo

$$z_K = a \frac{n-1}{n} e^{i\theta}$$

(véase § 6); la base \mathcal{B} de este movimiento es la circunferencia de centro O y de radio $\left| a \frac{n-1}{n} \right|$; su *rodante* es la circunferencia \mathcal{R} de centro A y de radio $|b| = |a/n|$.

a) En un punto ordinario M de \mathcal{C} , la tangente a \mathcal{C} está dirigida por el vector de afijo

$$\frac{dZ}{d\theta} = i a(e^{i\theta} - e^{in\theta});$$

el vector \overrightarrow{KM} tiene por afijo

$$Z - z_K = \frac{a}{n}(e^{i\theta} - e^{in\theta}).$$

De ahí resulta que la normal en un punto ordinario M de \mathcal{C} es la recta MK (se trata de hecho de un resultado general de la teoría de los movimientos de un plano sobre otro plano).

b) Busquemos ahora los puntos estacionarios de \mathcal{C} ⁽¹⁾, que corresponden a los valores de θ tales que $dZ/d\theta = 0$, o sea $e^{i(n-1)\theta} = 1$. Estos valores constituyen el subgrupo $G = \frac{2\pi}{n-1} \mathbf{Z}$ de \mathbf{R} . Para un tal valor se tiene

$$(2) \quad \frac{d^2Z}{d\theta^2} = a(n-1)e^{i\theta} \quad \text{y} \quad \frac{d^3Z}{d\theta^3} = ia(n^2-1)e^{i\theta}.$$

De ahí se deduce que los puntos estacionarios son los puntos comunes a \mathcal{B} y a $\text{sop}(\mathcal{C})$. En un punto tal, \mathcal{C} tiene a la recta OM como tangente generalizada. Si $n \neq -1$, la disposición en un punto tal es, según (2), un *retroceso de primera especie*.

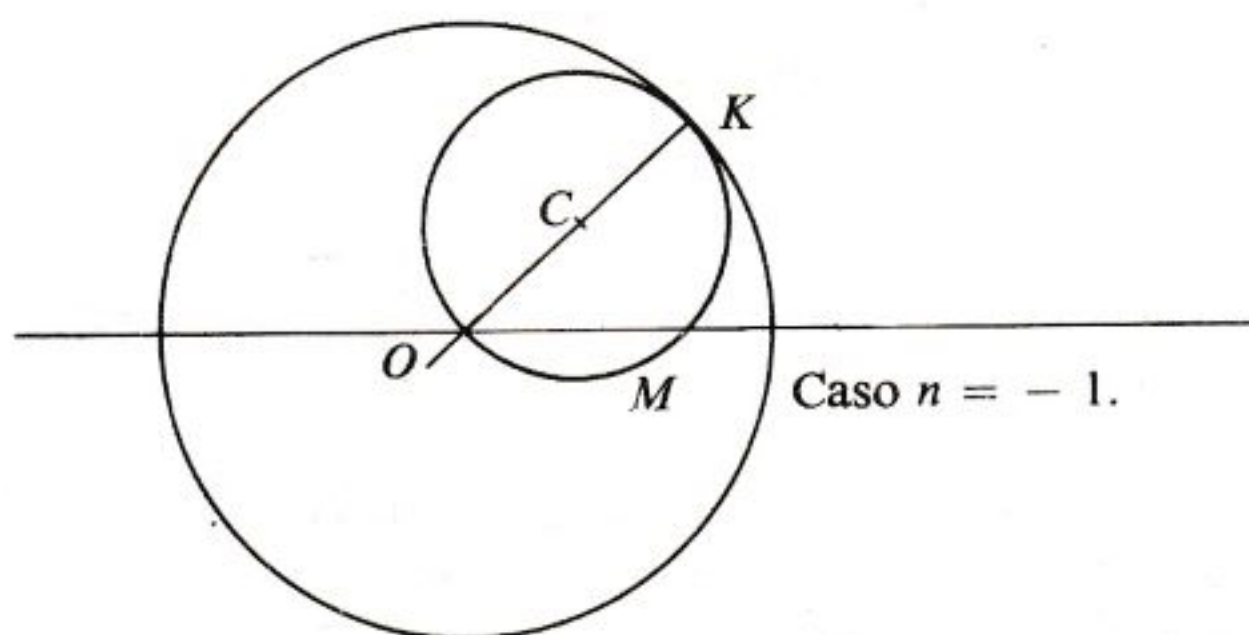


Figura 26.

⁽¹⁾ Aunque \mathcal{C} no sea siempre un arco simple o cerrado simple, nos permitiremos aquí llamar *puntos estacionarios* a los puntos $M(\theta)$ tales que $Z'(\theta) = 0$, ya que este § ante todo tiene una finalidad práctica.

c) Estudiemos el caso en que $n = -1$. Se tiene entonces, $Z(\theta) = 2a \cos \theta$; el soporte de \mathcal{C} es el segmento de recta $(-2|a| \leq x \leq 2|a|, y = 0)$ y el movimiento de $M(\theta)$ es *vibratorio*. El radio de la base es $2|a|$ y el de la rodante es $|a|$.

● En lo que sigue, vamos a suponer $n \neq \pm 1$.

Curvas cicloidaes semejantes

Observemos en primer lugar que el soporte de la curva cicloidal \mathcal{C} definida por (1) está contenido en la *corona* limitada por la circunferencia \mathcal{B} (de centro O y de radio $\left|a \frac{n-1}{n}\right|$) y la circunferencia \mathcal{L} , de centro O y de radio $\left|a \frac{n+1}{n}\right|$; los puntos estacionarios de \mathcal{C} pertenecen a \mathcal{B} y el arco \mathcal{C} es tangente a \mathcal{L} en los puntos de afijo $Z(\theta)$, con

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-1} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Consideremos entonces la curva cicloidal \mathcal{C}' definida por la parametrización

$$(3) \quad Z(\theta) = \frac{a'}{n'} (n' e^{i\theta} - e^{n'i\theta}), \quad (n' \in \mathbf{R}).$$

Para que el arco \mathcal{C}' sea semejante a \mathcal{C} , es necesario que la razón de los radios de las circunferencias \mathcal{B}' y \mathcal{L}' asociadas a \mathcal{C}' sea igual a la razón de los radios de las circunferencias \mathcal{B} , \mathcal{L} asociadas a \mathcal{C} , o sea:

$$(4) \quad \left| \frac{n'+1}{n'-1} \right| = \left| \frac{n+1}{n-1} \right|.$$

Un estudio rápido de la función $x \mapsto \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ muestra que la relación (4) equivale a $n' = n$ o $n' = 1/n$.

Inversamente, si $n' = n$ o $n' = 1/n$, se ve fácilmente que el arco \mathcal{C}' definido por (3) es semejante a \mathcal{C} (si $n' = n$ es inmediato; si $n' = 1/n$ se hace el cambio de parámetro $\theta' = \theta/n$). En resumen: *para que las curvas \mathcal{C} , \mathcal{C}' definidas respectivamente por (1) y (2) sean semejantes, es necesario y suficiente que se tenga $n' = n$ o $n' = 1/n$.*

Se observará que el cambio de n por $1/n$ equivale a considerar el segundo modo de generación de \mathcal{C} (véase § 6).

Estudio del conjunto de los puntos estacionarios de una cicloide

Mantengamos todas las notaciones anteriores. Distinguiremos dos casos fundamentales:

Primer caso: $n \notin \mathbf{Q}$; en este caso, la imagen del grupo $G = \frac{2\pi}{n-1} \mathbf{Z}$ por la aplicación $\exp : \theta \mapsto e^{i\theta}$ es un subgrupo denso \mathcal{G} de la circunferencia unidad U de \mathbf{C} ; la restricción a G de la aplicación exponencial es *inyectiva*. La cicloide (\mathcal{C}) tiene por lo tanto una infinidad de puntos estacionarios. (Se puede deducir de ahí que $\text{sop}(\mathcal{C})$ no es entonces una curva algebraica.)

Segundo caso: $n \in \mathbf{Q}$; la imagen \mathcal{G} del grupo G por la aplicación exponencial es entonces un subgrupo finito de U , cuyo cardinal se designará por N . En este caso la cicloide \mathcal{C} tiene N puntos estacionarios.

Resulta fácil calcular N en función de n . Pongamos $n = p/q$, donde p y q son enteros primos entre sí.

Para que se tenga $e^{i\theta} \in \mathcal{G}$ es necesario y suficiente que existan $\lambda \in \mathbf{Z}$ y $\mu \in \mathbf{Z}$ tales que

$$\theta = 2\lambda\pi + 2\mu\pi \frac{q}{p-q} = \frac{2\pi}{p-q} [\lambda p + (\mu - \lambda)q].$$

Ahora bien, según el teorema de Bezout, cuando (λ, μ) recorre $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, el entero $\lambda p + (\mu - \lambda)q$ recorre \mathbf{Z} ; por lo tanto $e^{i\theta} \in \mathcal{G}$ si, y solamente si, existe $k \in \mathbf{Z}$ tal que $\theta = \frac{2k\pi}{p-q}$. De ahí se deduce

$$N = |p - q|.$$

Isometrías que dejan a una cicloide globalmente invariante

Manteniendo las mismas hipótesis y notaciones, designemos por S al conjunto de los puntos estacionarios de \mathcal{C} . El grupo \mathcal{D} de las rotaciones de \mathcal{C}_2 que dejan a S invariante es ⁽¹⁾ el conjunto de las rotaciones u_ξ , donde

$$u_\xi : z \mapsto \xi z, \quad \text{con} \quad \xi \in \mathcal{G}.$$

La aplicación $\xi \mapsto u_\xi$ es un isomorfismo de \mathcal{G} sobre \mathcal{D} ; sea \mathfrak{J} el grupo engendrado por \mathcal{D} y por la simetría σ , donde

$$\sigma : z \mapsto \bar{z}.$$

⁽¹⁾ Todo movimiento que deje a S invariante es por necesidad una rotación de centro O , ya que O es isobaricentro de los puntos de S si S es finito, y si S es infinito, su adherencia \bar{S} es una circunferencia de centro O .

Entonces \mathcal{D} es un subgrupo distinguido de índice 2 en \mathcal{J} , e \mathcal{J} es el grupo de las isometrías de \mathcal{C}_2 que dejan a S invariante.

Es claro que toda isometría (resp. todo desplazamiento) que deja invariante a la cicloide (\mathcal{C}) tiene que dejar también invariante a S . Recíprocamente, vamos a demostrar que todo elemento de \mathcal{J} deja a (\mathcal{C}) invariante

- según (1), es claro que (\mathcal{C}) es invariante en σ ,
- se tiene:

$$Z\left(\theta + \frac{2k\pi}{n-1}\right) = e^{2ik\pi/n-1} Z(\theta),$$

por lo tanto, para todo $k \in \mathbf{Z}$, la rotación u_ξ , donde $\xi = e^{2ik\pi/n-1}$, deja a (\mathcal{C}) invariante.

De ahí se desprende nuestra afirmación. Podemos concluir:

- El grupo de los desplazamientos que dejan a (\mathcal{C}) invariante es \mathcal{D} .
- El grupo de las isometrías que dejan a (\mathcal{C}) invariante es \mathcal{J} .

Observemos que si $n \in \mathbf{Q}$, \mathcal{D} e \mathcal{J} son finitos y se tiene $\text{card}(\mathcal{D}) = N = |p - q|$,

$$\text{card}(\mathcal{J}) = 2N.$$

El grupo \mathcal{J} recibe entonces el nombre de *grupo diedral de orden N* .

Si $n \notin \mathbf{Q}$, el grupo \mathcal{G} es denso en U . De ahí se deduce fácilmente que el soporte de (\mathcal{C}) es denso en la corona circular definida por $u \leq |z| \leq v$, donde

$$u = \inf \left(\left| a \frac{n-1}{n} \right|, \left| a \frac{n+1}{n} \right| \right) \quad \text{y} \quad v = \sup \left(\left| a \frac{n-1}{n} \right|, \left| a \frac{n+1}{n} \right| \right).$$

Cicloides que tienen un conjunto finito de puntos estacionarios

Sea N un entero ≥ 1 y \mathcal{B} una circunferencia de centro O , de radio $r > 0$. Investiguemos las cicloides que tienen como conjunto de puntos estacionarios al conjunto

$$S = \{ r e^{2ik\pi/N}, k \in \mathbf{Z} \}.$$

Una tal cicloide puede ser parametrizada en la forma:

$$\theta \mapsto z(\theta) = \frac{a}{n} (n e^{i\theta} - e^{in\theta}) \quad \text{con} \quad n \in \mathbf{Q}^*.$$

Poniendo n en forma irreducible, sea esta $n = p/q$, se tiene necesariamente:

$$N = |p - q| \quad \text{y} \quad r = \left| a \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right|.$$

Si $n > 0$, se encuentra una infinidad de valores distintos posibles de n y todos estos valores son buenos (cada valor conduce a una epicloide que tiene a S como conjunto de puntos estacionarios).

Busquemos los números racionales $n < 0$ que resuelven el problema. Se puede elegir entonces $p' > 0$ y $q < 0$; p y q son primos entre sí cuando, y solamente cuando, p y N son primos entre sí. Se tiene además $p - q > 0$, de donde $p \leq N$. Existen por lo tanto $\varphi(N)$ enteros p posibles ($\varphi(N)$ designa el número de enteros $\leq N$ y primos con N) y todos estos enteros p son buenos, definiendo cada uno de ellos a q de manera única.

A cada par (p, q) así obtenido corresponde una hipocicloide con N retrocesos. Existen solamente para $N \geq 2$.

Discusión. Sabemos que dos valores distintos n', n'' de n proporcionan arcos semejantes si, y solamente si, se tiene $n' n'' = 1$.

Si tomamos $n > 0$, obtenemos una *infinidad de epicicloides con N retrocesos*, no semejantes dos a dos.

Si tomamos $n < 0$ obtenemos de hecho, salvo una semejanza, sólo $\frac{1}{2} \varphi(N)$ *hipocicloides con N retrocesos*, ya que los pares (p, q) y (p', q') proporcionan curvas semejantes si, y solamente si, $(p', q') = (p, q)$ o $(p', q') = (q, p)$.

En particular, existe solamente (salvo una semejanza) una hipocicloide con tres retrocesos, y una hipocicloide con cuatro retrocesos. No existe ninguna hipocicloide con un retroceso; la hipocicloide de dos retrocesos tiene como soporte un segmento de recta.

Señalemos que las cicloides que tienen un número finito de puntos estacionarios son *curvas unicursales* (por lo tanto algebraicas). En efecto, poniendo $Z(\theta) = x(\theta) + iy(\theta)$, la relación $Z(\theta) = \frac{a}{n} (n e^{i\theta} - e^{in\theta})$ muestra que x e y son funciones racionales de $t = \tan \theta/2$ (si $n = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$).

Evoluta de una cicloide

Volvamos a la curva cicloidal \mathcal{C} definida por la parametrización (1) y a las notaciones indicadas al comienzo de este §. Para obtener la evoluta \mathcal{C}' basta con buscar una función derivable $\rho(\theta)$ tal que la curva definida por

$$\theta \mapsto g(\theta) = Z(\theta) + \rho(\theta) \frac{a}{n} (e^{i\theta} - e^{in\theta})$$

tenga, para el valor θ del parámetro, a la recta MK como tangente. En efecto, la recta MK es la normal en M a \mathcal{C} y tiene como vector director al vector de afijo $a/n(e^{i\theta} - e^{in\theta})$.

Debemos expresar que $g'(\theta)$ es de la forma $\lambda(e^{i\theta} - e^{in\theta})$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene

$$g'(\theta) = \frac{a}{n} \{ e^{i\theta}[(n + \rho) i + \rho'(\theta)] - e^{in\theta}[(n + n\rho) i + \rho'(\theta)] \}.$$

Poniendo que el número $g'(\theta)/e^{i\theta} - e^{in\theta}$ es igual a su conjugado, se obtiene

$$\rho = -\frac{2n}{n+1}.$$

La evoluta buscada queda definida por lo tanto por

$$\theta \mapsto Z_1(\theta) = \frac{a(n-1)}{n(n+1)} [n e^{i\theta} + e^{in\theta}],$$

o sea, poniendo $a_1 = a(n-1/n+1)$,

$$Z_1(\theta) = \frac{a_1}{n} [n e^{i\theta} + e^{in\theta}].$$

Se ve pues que la evoluta de \mathcal{C} es una cicloide deducida de \mathcal{C} por la semejanza representada por el número complejo

$$s = \frac{n-1}{n+1} e^{i(\pi/n-1)}.$$

Al ser \mathcal{C} de clase C^∞ , al considerar la semejanza inversa resulta que:

Una de las evolventes de la cicloide \mathcal{C} es la cicloide deducida de \mathcal{C} por la semejanza representada por el número

$$\frac{1}{s} = \frac{n+1}{n-1} e^{-i(\pi/n-1)}.$$

§ VII.8 ESTUDIO DE ALGUNAS CURVAS CICLOIDALES PARTICULARES

Estudio de la cardiode

Por definición, la *cardioides* es la epicloide con un retroceso definido por

$$\theta \mapsto Z(\theta) = \frac{a}{2} [2 e^{i\theta} - e^{2i\theta}].$$

Tomemos $a > 0$. La base \mathcal{B} es la circunferencia de centro O y de radio $a/2$. Una de las rodantes tiene por radio $a/2$, la otra a . Designemos por S el punto de afijo $z(0) = a/2$, por M el de afijo $Z(\theta)$, por K el centro instantáneo de rotación de la rodante \mathcal{R} (de centro A y de radio $a/2$). Designemos por T la tangente común a \mathcal{B} y \mathcal{R} en K , por H la intersección de las rectas T y SM . M es simétrico de S respecto a T .

Designemos por \mathcal{R}' la segunda rodante, por B su centro. Se sabe que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BM}$.

Además, B está sobre \mathcal{B} (ya que el radio de \mathcal{R}' es a). La longitud $\|\overrightarrow{BM}\|$ es pues constante e igual a a , y se dice que la cardiode es una *curva conchoide de la circunferencia \mathcal{B} respecto al punto S* .

La evoluta \mathcal{C}_1 de \mathcal{C} se deduce de \mathcal{C} por la homotecia de centro O y de razón $-\frac{1}{3}$; admite la parametrización

$$\theta \mapsto Z_1(\theta) = \frac{a}{6} [2 e^{i\theta} + e^{2i\theta}].$$

Para el valor θ del parámetro, la circunferencia rodante γ de radio $a/6$ que engendra a esta evoluta es tangente a \mathcal{B} en K . Por lo tanto el centro de curvatura en M a \mathcal{C} pertenece a γ (véase la figura 27).

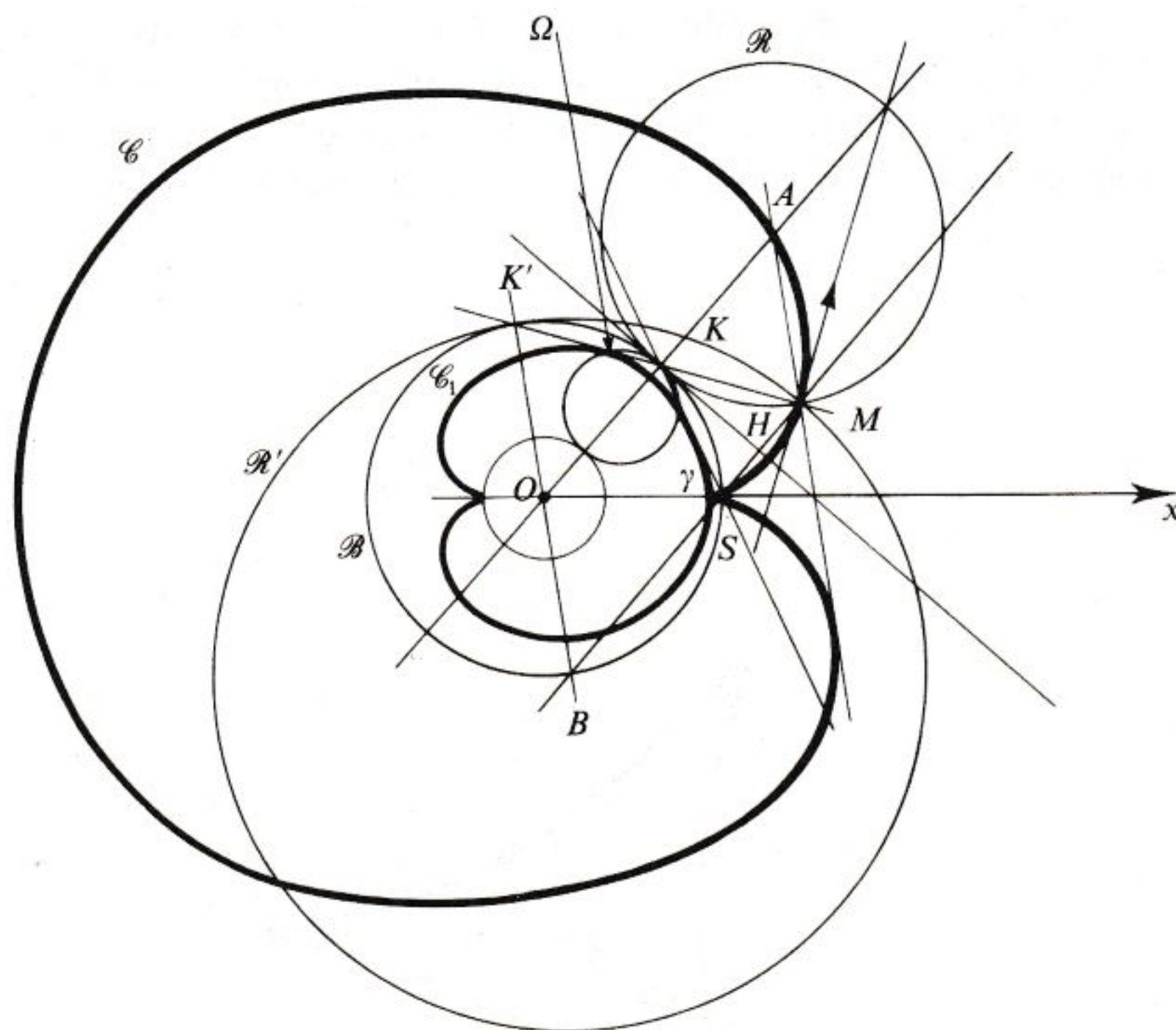


Figura 27.

Hipocicloide de tres retrocesos

Por definición, la hipocicloide de tres retrocesos es el arco \mathcal{C} definido por

$$\theta \mapsto Z(\theta) = \frac{a}{2} (2 e^{i\theta} + e^{-2i\theta})$$

(se tiene aquí $n = -2$; se supone $a > 0$). El radio de la base \mathcal{B} es $r = 3a/2$. Una de las rodantes, llamémosla \mathcal{R} , tiene por radio $a/2 = r/3$, la otra, llamémosla \mathcal{R}' , tiene por radio $a = 2r/3$. El soporte de \mathcal{C} está contenido en la corona $r/3 \leq |z| \leq r$; \mathcal{C} es tangente a la circunferencia \mathcal{L} de centro O y de radio $r/3$ en los tres puntos de afijos

$$-\frac{r}{3}, \quad -\frac{r}{3}j, \quad -\frac{r}{3}j^2 :$$

la circunferencia \mathcal{L} recibe el nombre de *circunferencia tritangente* a \mathcal{C} .

La circunferencia \mathcal{R} es tangente a \mathcal{L} en un punto que designaremos por L . Se sabe que la recta ML es la tangente en $M = M(\theta)$ a \mathcal{C} . La dirección de esta tangente está representada por el número complejo $\xi(\theta) = e^{i\theta} + e^{-2i\theta}$; si se cambia θ por $\theta + \pi$, $\xi(\theta)$ queda cambiado en $i\lambda\xi(\theta)$, donde $\lambda \in \mathbf{R}$; M queda cambiado en M_1 , L en L_1 : las rectas ML y M_1L_1 son ortogonales, por tanto se cortan sobre \mathcal{L} ya que $[LL_1]$ es un diámetro de \mathcal{L} . De cada punto de \mathcal{L} se puede por lo tanto trazar dos tangentes a \mathcal{C} ortogonales entre sí, y se dice que \mathcal{L} es *curva ortóptica* de \mathcal{C} .

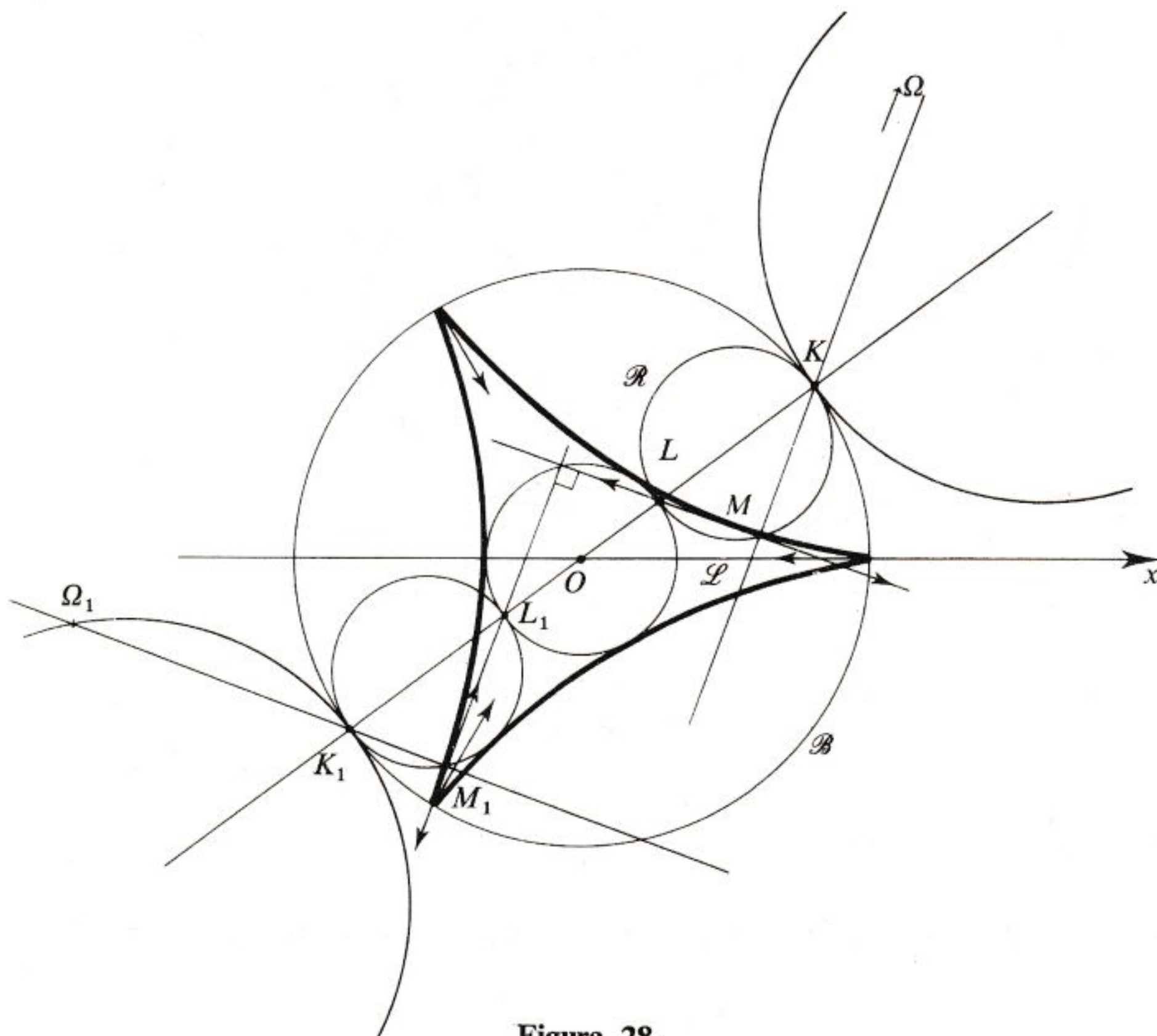


Figura 28.

La construcción del centro de curvatura Ω en M a \mathcal{C} es análoga a la que se ha hecho para la cardiode (se utiliza una generación de la evoluta de \mathcal{C}). La evoluta de \mathcal{C} se deduce de \mathcal{C} por la semejanza de centro O , de razón 3 y de ángulo $-\pi/3$ (véase la figura 28).

Estudio de la nefroide

Por definición, la nefroide es la epicicloide de dos retrocesos definida por

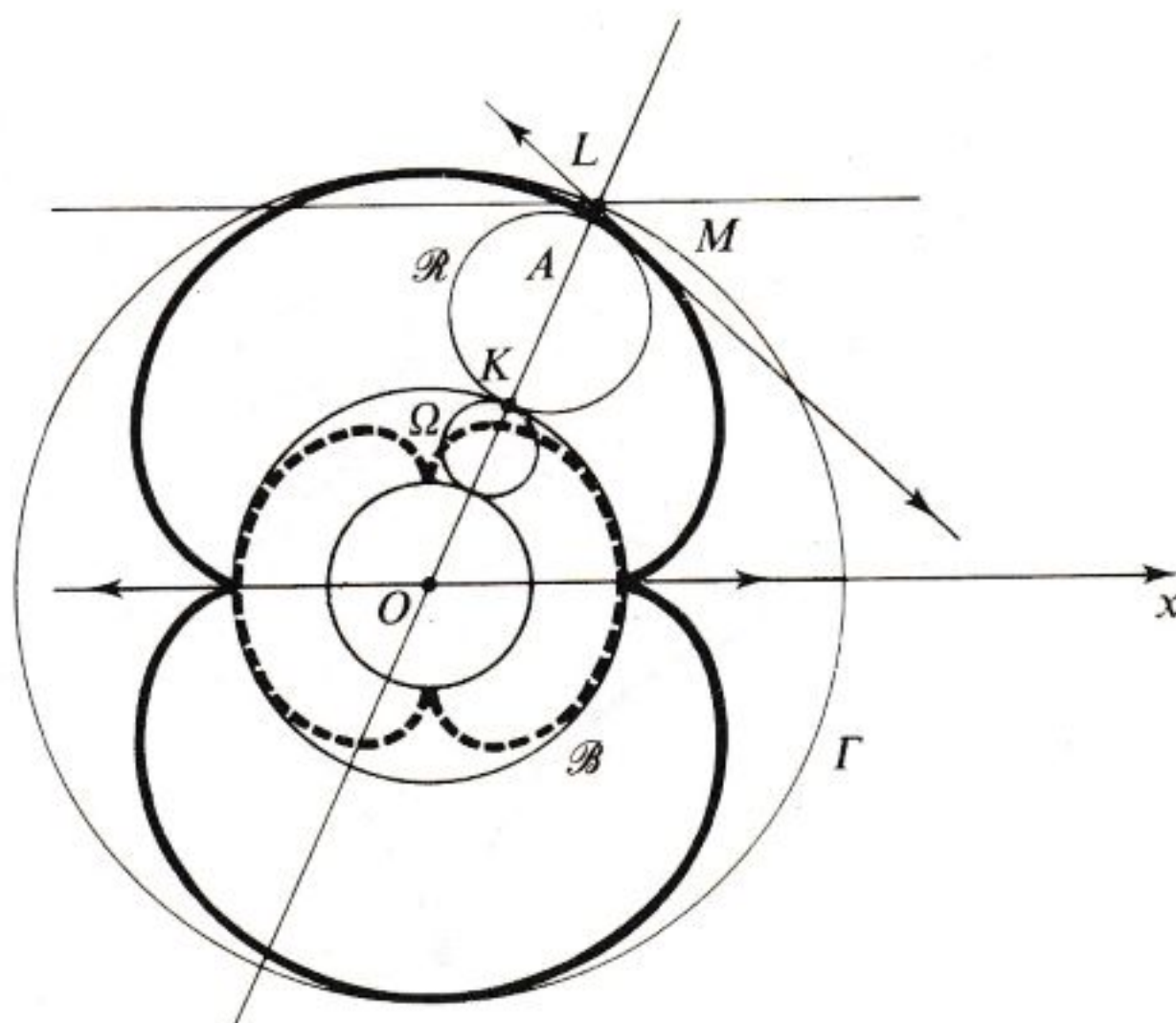
$$\theta \mapsto Z(\theta) = \frac{a}{3} (3 e^{i\theta} - e^{3i\theta}).$$

Se tiene aquí $n = 3$, el radio de la base \mathcal{B} es $r = 2a/3$. Se supone $a > 0$. Una de las rodantes, llamémosla \mathcal{R} , tiene por radio $a/3$. Los dos puntos de retroceso son diametralmente opuestos sobre \mathcal{B} . Las notaciones M, A, K tendrán el significado habitual. Designaremos por L el punto diametralmente opuesto a K sobre \mathcal{R} . La tangente en M a \mathcal{C} es la recta ML y su dirección está representada por el número complejo

$$-\frac{a}{3} [e^{i\theta} + e^{3i\theta}] = -\frac{2a}{3} e^{2i\theta} \cos \theta.$$

Se deduce de ello que la recta simétrica de ML respecto a OA es paralela al eje Ox .

La evoluta \mathcal{C} se deduce de \mathcal{C} por la semejanza de centro O , de razón $\frac{1}{2}$ y de



----- evoluta de Γ

Figura 29.

ángulo $\pi/2$; de donde se deduce la construcción del centro de curvatura Ω en M , utilizando una generación de esta evoluta (véase la figura 29).

Estudio de la hipocicloide de cuatro retrocesos

Por definición, esta hipocicloide es el arco \mathcal{C} definido por

$$\theta \mapsto Z(\theta) = \frac{a}{3} [3 e^{i\theta} + e^{-3i\theta}].$$

Supondremos $a > 0$. El radio de la base \mathcal{B} es $r = 4(a/3)$, el de una de las rodantes, llamémosla \mathcal{R} , es $r/4 = a/3$. Se tiene aquí $n = -3$.

Las notaciones M , K , A , L tendrán el sentido habitual.

El punto L es el punto medio de OK y la dirección de la tangente ML en M a \mathcal{C} está representada por el número complejo $2a \cos \theta e^{-i\theta}$. Se deduce de ello que *las direcciones de ML y OK son simétricas respecto a Ox* . De ahí resulta que ML pasa por los puntos U y V , proyecciones ortogonales respectivas de K sobre Ox y Oy . La longitud UV es pues constante e igual a r .

La curva \mathcal{C} es de grado 6. Su ecuación cartesiana se obtiene partiendo de las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{4}{3} a \cos^3 \theta, \quad y = \frac{4}{3} a \sin^3 \theta,$$

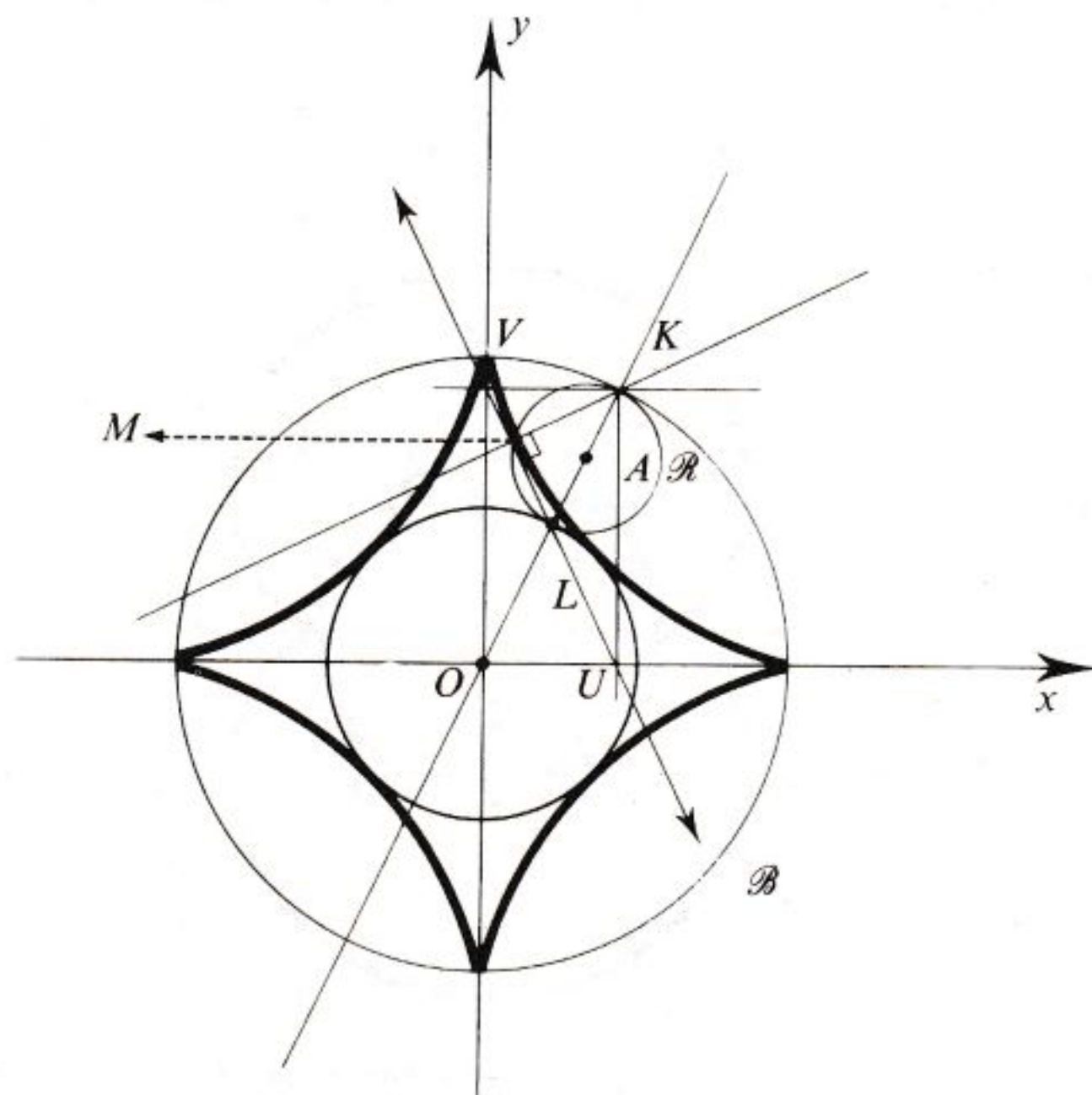


Figura 30.

sacadas de la expresión de $Z(\theta)$. Eliminando u y v entre las relaciones $u^3 = x/r$, $v^3 = y/r$, $u^2 + v^2 = 1$, se obtiene la ecuación buscada, o sea

$$(X^2 + Y^2 - 1)^3 + 27 X^2 Y^2 = 0 \quad \text{con} \quad X = \frac{x}{r}, Y = \frac{y}{r}.$$

(véase la figura 30).

Estudio de las trocoides

Vamos a dar breves indicaciones acerca de la construcción de las trocoides generales. Sea \mathcal{C} una tal curva, definida por la parametrización

$$t \mapsto z(t) = a e^{i\alpha t} + b e^{i\beta(t+h)} \quad (a \neq 0, b \neq 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta).$$

Supondremos fijos a , α y β y haremos variar b y h . La parametrización dada puede ser interpretada entonces como el movimiento de un punto ligado a un plano móvil \mathcal{P} , según hemos explicado ya al comienzo del §.

Llamaremos K al centro instantáneo de rotación, cuyo afijo es

$$z_K(t) = a \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{i\alpha t}.$$

Las notaciones A , \mathcal{B} , \mathcal{R} , M tendrán la misma significación que al comienzo del § 6.

Por una rotación sobre \mathcal{C} podemos reducirnos al caso en que $h = 0$, lo cual daremos por supuesto en adelante (permaneciendo b variable).

Para $b = \pm a(\alpha/\beta)$ se obtienen dos *cicloides* iguales que se dicen *asociadas* a la trocoide \mathcal{C} . Sabemos que \mathcal{C} es una epitrocoide (resp. hipotrocoide) si las cicloides asociadas son epicicloides (resp. hipocicloides).

Si $b \neq \pm a(\alpha/\beta)$, sabemos que \mathcal{C} no tiene puntos estacionarios. Es evidente, en fin, que el grupo de los desplazamientos (resp. isometrías) que dejan a \mathcal{C} invariante contiene al grupo de los desplazamientos (resp. isometrías) que dejan invariante a una cicloide asociada, y en general, estos dos grupos son, por otra parte, iguales.

Esta observación permite ya hacerse una idea de la forma de \mathcal{C} .

Para obtener la forma general del trazado de \mathcal{C} , utilizaremos dos procedimientos, limitándonos al caso en que $|z(t)|$ no sea nulo (es decir, $a^2 \neq b^2$).

Primer método. Según el teorema del levantamiento VI.6.1, existe una función φ , de clase C^∞ sobre \mathbf{R} , tal que

$$z(t) = |z(t)| e^{i\varphi(t)}.$$

Ahora bien, para todo t , una de las funciones $\cotg \varphi$ o $\tg \varphi$ está definida en el entorno de t . Se tiene

$$\tg \varphi = \frac{a \operatorname{sen} \alpha t + b \operatorname{sen} \beta t}{a \cos \alpha t + b \cos \beta t}, \quad \cotg \varphi = \frac{a \cos \alpha t + b \cos \beta t}{a \operatorname{sen} \alpha t + b \operatorname{sen} \beta t}.$$

Un cálculo sencillo muestra que en todos los casos, el signo de $\varphi'(t)$ es el de la expresión

$$E = a^2 \alpha + b^2 \beta + ab(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) t.$$

Pongamos

$$\begin{aligned} A &= a^2 \alpha + b^2 \beta + ab(\alpha + \beta) = (a + b)(a\alpha + b\beta) \\ B &= a^2 \alpha + b^2 \beta - ab(\alpha + \beta) = (a - b)(a\alpha - b\beta). \end{aligned}$$

Se ve que el signo de E es constante si, y solamente si, se tiene: $AB \geq 0$. Se discutirán pues las variaciones de $\varphi(t)$ según el signo de la cantidad

$$AB = (a^2 - b^2)(a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2).$$

Segundo método. Este método se aplica solamente cuando la función $z(t)$ es periódica, o sea cuando $\beta/\alpha \in \mathbf{Q}$. (Equivale a decir que las cicloides asociadas tienen un número finito de retrocesos). En este caso, pondremos $\beta/\alpha = n = (\varepsilon p/q)$ (con $\varepsilon = \pm 1$, siendo p y q enteros primos entre sí y > 0) y $q\theta = \alpha t$. La curva \mathcal{C} queda entonces definida por la función

$$\theta \mapsto Z(\theta) = a e^{iq\theta} + b e^{i\varepsilon p\theta}, \quad \theta \in \mathbf{R},$$

y el período de la función Z es 2π .

Nuestro método consiste en calcular el número v de vueltas efectuado por el punto M de afijo $Z(\theta)$ alrededor de O cuando θ varía entre 0 y 2π . Ahora bien, según la teoría de los índices (véase un curso de funciones analíticas) se tiene

$$v = \frac{1}{2i\pi} \int_{\vec{\gamma}} \frac{dZ(\theta)}{Z(\theta)}$$

designando por $\vec{\gamma}$ al camino definido por $\theta \mapsto Z(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Haremos el cálculo cuando $\varepsilon = +1$. Poniendo $u = e^{i\theta}$ y designando por \vec{C} el camino definido por $\theta \mapsto e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, se obtiene:

$$v = \frac{1}{2i\pi} \int_{\vec{C}} \frac{aqu^q + bpu^p}{u(au^q + bu^p)} du.$$

Si $q < p$, se tiene

$$v = \frac{1}{2i\pi} \int_{\vec{C}} \frac{aq + bpu^{p-q}}{u(a + bu^{p-q})} du.$$

Esta integral se puede calcular por el método de los residuos (véase tomo 4):

— cuando $|a| > |b|$, el único polo de la función a integrar interior a \vec{C} es 0 , siendo q el residuo correspondiente;

— cuando $|a| < |b|$, el interior de \vec{C} contiene, además del polo 0 , los $N = p - q$ polos r_{ξ}^k , $0 \leq k \leq N - 1$, designando por r un número cualquiera tal que $r^N = -a/b$ y poniendo $\xi = e^{2i\pi/N}$. El residuo en el polo r_{ξ}^k es 1 . Se obtiene por lo tanto

$$v = q \quad \text{si} \quad |a| > |b| \quad \text{y} \quad v = p \quad \text{si} \quad |a| < |b|.$$

De igual modo se vería que, si $q > p$,

$$v = q \quad \text{cuando} \quad |a| > |b| \quad \text{y} \quad v = p \quad \text{si} \quad |a| < |b|.$$

Finalmente, cuando $\varepsilon = -1$, se obtiene del mismo modo

$$v = q \text{ si } |a| > |b| \text{ y } v = -p \text{ si } |a| < |b|.$$

Combinando los métodos 1° y 2° se llega a prever los puntos múltiples y la forma de \mathcal{C} . El caso más interesante es aquél en que $v = 1$ y en que, además, la función φ es estrictamente monótona. Se puede demostrar entonces que \mathcal{C} es un *arco cerrado simple*.

Se observará que $N = |p - q|$ es el número de retrocesos de cada cicloide asociada a \mathcal{C} .

Damos a continuación (véase la figura 31) la forma de las epitrocoides asociadas a una nefroide y de las hipotrocoides asociadas a una hipocicloide de tres retrocesos. (Dejamos para el lector la determinación de la forma de estas curvas en los casos intermedios.)

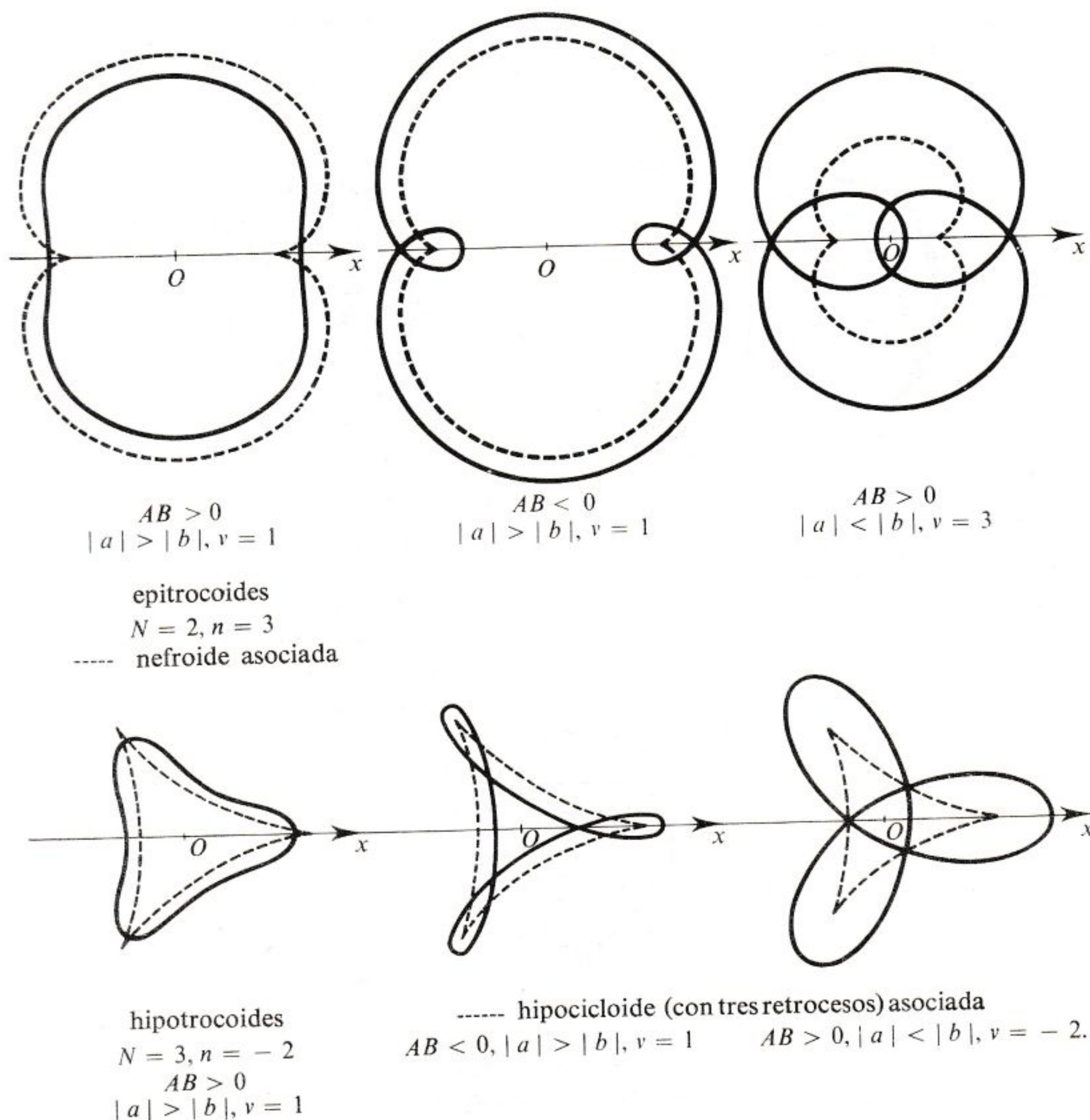


Figura 31.

Aplicación al motor de explosión rotativo (llamado también «motor Wankel»)

Principio. Un rotor R y un árbol A están ligados por engranajes. El rotor está en contacto con el cárter C a lo largo de tres generatrices. Los cilindros que forman la cara interna de C , las dos caras de R y el árbol A son paralelos. La sección recta de las generatrices de contacto de C y R es un triángulo equilátero. El cárter C es fijo, y fijo también respecto al eje A de A .

Las ligaduras son tales que cuando el rotor está animado de un movimiento cuya rotación alrededor de A es uniforme, el eje A es arrastrado en un movimiento de rotación uniforme del mismo sentido.

El movimiento del rotor queda asegurado por la expansión provocada de gases comprimidos, de tal forma que se producen tres explosiones por cada vuelta del rotor. El esquema que damos a continuación (en el que se representan las secciones rectas de las piezas esenciales del motor en las distintas fases del funcionamiento) proporciona una idea del mecanismo (véase la figura 32).

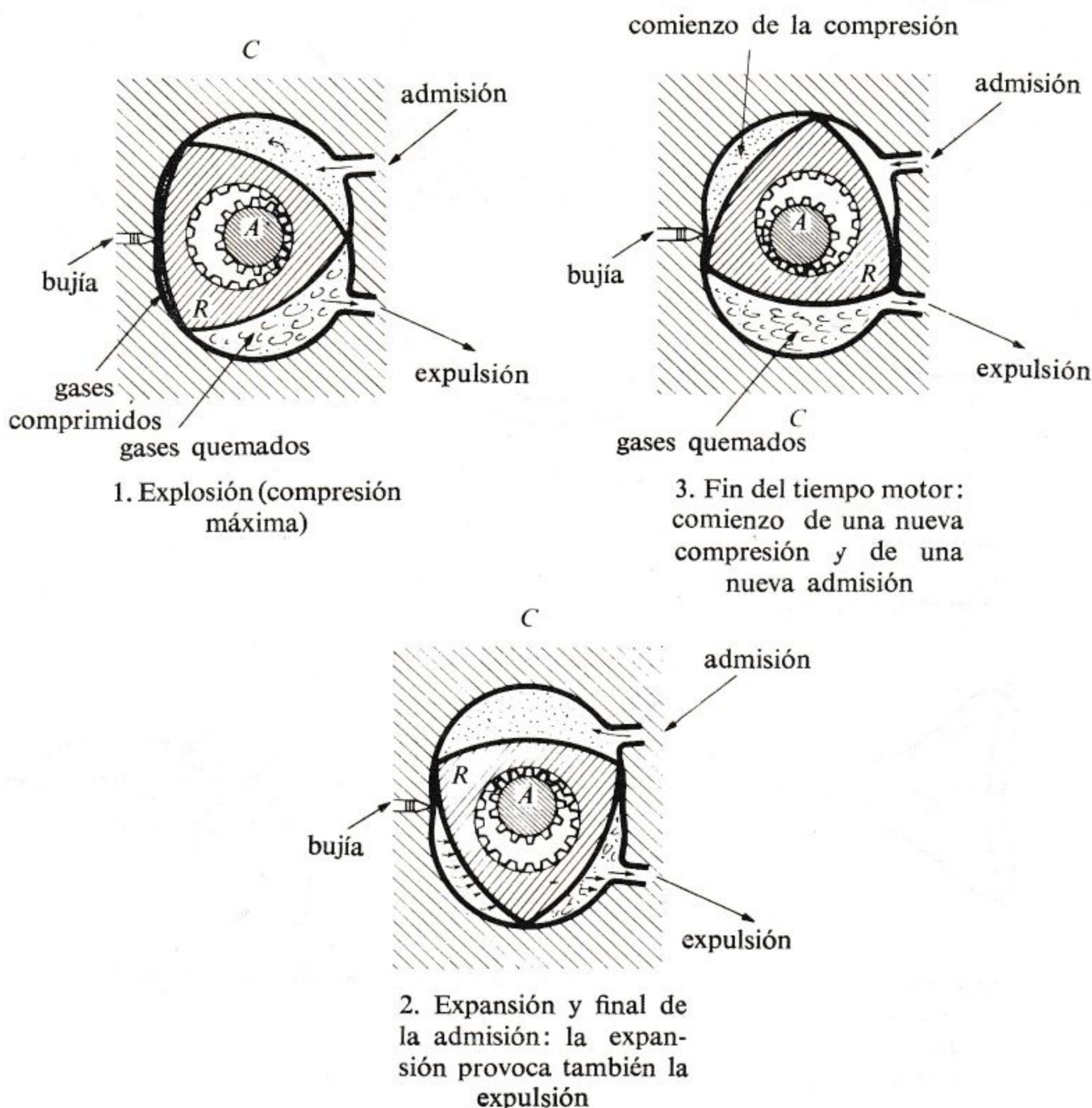


Figura 32.

Vamos a determinar las formas posibles que se pueden dar al cárter C , y basta con describir su sección recta. Para ello vamos a trabajar en un plano de sección recta. Sea O el centro del árbol, \vec{Ox} y \vec{OX} ejes que parten de O , ligados respectivamente al árbol y al cárter.

Se ve que los vértices M, N, P del triángulo equilátero (sección recta de las generatrices de contacto de C y R) describen una misma epitrocoide respecto al plano del árbol. Si se elige adecuadamente el eje \vec{Ox} , el afijo $z(t)$ de M , respecto a \vec{Ox} , es pues de la forma:

$$z(t) = a e^{i\alpha t} + b e^{i\beta t},$$

con $a > 0, b > 0, \alpha > 0, \beta > 0$, y $\alpha > \beta$. Sea ω la velocidad angular del plano del árbol ($\omega > 0$). El afijo $Z(t)$ de M respecto a \vec{OX} es evidentemente (habiendo elegido convenientemente el eje \vec{OX})

$$Z(t) = e^{i\omega t} z(t) = a e^{i\alpha' t} + b e^{i\beta' t}, \text{ con } \begin{cases} \alpha' = \alpha + \omega \\ \beta' = \beta + \omega \end{cases}$$

Por lo tanto la trayectoria absoluta de M es otra epitrocoide.

Expresemos que los puntos M, N, P tienen la misma trayectoria. Esto ocurre si, y solamente si, son idénticos los arcos definidos por

$$Z_k(t) = a e^{i\alpha' t} = b e^{i(\beta' t + 2k\pi/3)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Para ello, es necesario y suficiente que exista $t_0 \in \mathbf{R}$ tal que, para todo t , se tenga $Z_1(t) = Z_0(t + t_0)$, lo cual equivale a la existencia de $m, n \in \mathbf{Z}$ y de $t_0 \in \mathbf{R}$ tales que

$$\alpha' t_0 = 2m\pi, \quad \beta' t_0 = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi.$$

A fin de cuentas, los puntos M, N, P describen la misma trocoide si, y solamente si, la razón β'/α' es de la forma

$$\beta'/\alpha' = \frac{3n+1}{3m}, \text{ con } m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}.$$

Las trocoides así obtenidas son curvas cerradas (puesto que $\beta'/\alpha' \in \mathbf{Q}$). Tienen solamente interés cuando su índice respecto a O vale $+1$, y cuando no presentan puntos dobles. Según el estudio general, estas condiciones se cumplen cuando

- a) $(a^2 - b^2)(a^2 \alpha'^2 - b^2 \beta'^2) > 0$,
- b) siendo p/q la forma irreducible de β'/α' , se tiene o bien $|a| < |b|$ y $p = 1$, o bien

$$|a| > |b| \quad \text{y} \quad q = 1.$$

Ahora bien, $q = 1$ es imposible. Queda pues la condición: $|a| < |b|$ y $p = 1$; es decir, m es múltiplo de $3n + 1$.

La trocoide más sencilla se obtiene para $m = 3n + 1$, o sea $q = 3$; la cicloide asociada es entonces una *nefroide*.

Los distintos puntos del rotor describen curvas definidas por

$$Z(t) = a e^{i\alpha'(t+t_0)} + b e^{i\beta'(t+t_0)},$$

con a fijo y con $|b| > |a(1 - \alpha/\beta)|$ (esta condición expresa que los puntos del rotor son exteriores a la circunferencia que rueda sobre el árbol sin resbalar). Solamente tendrá interés práctico el motor realizado cuando todas las curvas así definidas satisfagan las condiciones $a)$ y $b)$, lo cual se cumple ciertamente cuando $|1 - \alpha/\beta| > 1$.

Observación. El motor rotativo desarrolla a igualdad de carga una mayor potencia que el motor de explosión clásico de cuatro tiempos. En efecto, para un solo cilindro, el motor rotativo se beneficia de tres explosiones por vuelta, mientras que el motor de cuatro tiempos se beneficia solamente de una explosión por cada dos vueltas.

A pesar de ello, la puesta a punto del motor rotativo resulta ser muy delicada: los problemas de lubricación son en particular muy arduos.

Otro problema difícil de resolver es el del «freno motor».

Capítulo VIII

Propiedades afines de las superficies

Introducción

En este capítulo vamos a abordar nuevamente, desde un punto de vista teórico, el estudio de las superficies iniciado con ejemplos en el capítulo III. Empezaremos definiendo de un modo preciso el concepto de *hoja geométrica*, que es el análogo, en dimensión superior, del concepto de *arco geométrico* estudiado en el capítulo V; pero nos vamos a limitar aquí a hojas geométricas, de dimensión 2, de un espacio afín de dimensión 3. Estas hojas corresponden al concepto intuitivo de «superficie». El concepto esencial será el de *plano tangente*.

Estudiaremos a continuación algunas clases notables de hojas.

En el capítulo siguiente estudiaremos las propiedades métricas de las hojas de un espacio afín *euclídeo* de dimensión 3.

● En el presente capítulo, la letra \mathcal{E} designará un espacio afín cualquiera de dimensión 3, ligado al espacio vectorial E . Siempre que sea necesario, identificaremos \mathcal{E} con E mediante elección de un origen.

Recordemos que la diferencial de una aplicación con valores en un espacio afín ha sido definida en el tomo 2 (§ V.2).

Si V es un entorno del punto a en un espacio vectorial o afín cualquiera, y si $f: V \rightarrow \mathcal{E}$ es una aplicación diferenciable en el punto a , su diferencial en este punto se designará aquí por Df_a en lugar de $f'(a)$.

§ VIII.1 HOJAS GEOMÉTRICAS

Con los convenios anteriores pondremos:

Definición VIII.1.1

Una **hoja parametrizada** de clase C^k ($k \geq 0$) de \mathcal{E} es una aplicación de clase C^k de un dominio de \mathbf{R}^2 en \mathcal{E} .

Recordemos aquí que un dominio de \mathbf{R}^2 es una parte abierta y conexa de \mathbf{R}^2 .

Las hojas parametrizadas constituyen lo análogo de los caminos; al igual que para estos últimos, vamos a introducir un concepto de C^k -equivalencia. Pero vamos a considerar solamente aquí hojas de clase C^k , con $k \geq 1$.

Definición VIII.1.2

Designando por D, Δ dos dominios de \mathbf{R}^2 , sean: $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ y $\Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ dos hojas parametrizadas de clase C^k de \mathcal{E} ($k \geq 1$). Se dice que F y Φ son C^k -equivalentes si existe un difeomorfismo $\theta : \Delta \rightarrow D$, de clase C^k , tal que $\Phi = F \circ \theta$.

Recordemos que un difeomorfismo de clase C^k de Δ sobre D es una biyección de Δ sobre D , de clase C^k , lo mismo que su inversa.

Para que una biyección $\theta : \Delta \rightarrow D$ sea un difeomorfismo de clase C^k ($k \geq 1$), es necesario y suficiente que θ sea de clase C^k y que su jacobiano no se anule en ningún punto de Δ (véase tomo 2, VI.5).

El inverso y los compuestos de difeomorfismos de clase C^k son evidentemente difeomorfismos de clase C^k . Se deduce de aquí que la relación « F y Φ son C^k -equivalentes» es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las hojas de clase C^k de \mathcal{E} . Pondremos:

Definición VIII.1.3

Una **hoja geométrica** de clase C^k de \mathcal{E} es una clase de C^k -equivalencia de hojas parametrizadas de clase C^k .

Para abreviar, diremos muchas veces: «hoja de clase C^k » en lugar de «hoja geométrica de clase C^k ».

Las hojas parametrizadas que constituyen una hoja geométrica Σ se llaman

parametrizaciones admisibles de Σ (o, simplemente, parametrizaciones de Σ). Si $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ es una parametrización admisible de Σ , todo difeomorfismo $\theta : \Delta \rightarrow D$ de clase C^k recibe el nombre de **cambio de parámetro admisible** en Σ .

Si $\Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ es otra parametrización admisible de Σ , se observará que pueden existir *distintos cambios de parámetro admisibles* $\theta : \Delta \rightarrow D$ tales que $\Phi = F \circ \theta$, salvo que F sea *inyectiva* (caso de una hoja simple, véase § 2).

Resulta inmediatamente de la definición VIII.1.2 que dos hojas parametrizadas C^k -equivalentes $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ y $\Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ tienen *la misma imagen* $F(D) = \Phi(\Delta)$.

La imagen común de las parametrizaciones de una hoja geométrica Σ recibirá el nombre de **soporte** de Σ y será designada por $\text{sop}(\Sigma)$.

Adoptaremos un lenguaje análogo al del capítulo V y diremos que una hoja Σ contiene un punto M de \mathcal{E} si $M \in \text{sop}(\Sigma)$.

Se observará que dos hojas parametrizadas pueden tener la misma imagen sin ser C^k -equivalentes. Cuando se da el conjunto $\text{sop}(\Sigma)$ no queda pues determinada en general la hoja Σ .

Subhojas

Sea $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ una hoja parametrizada de clase C^k ($k \geq 1$). Las parametrizaciones C^k -equivalentes a F son evidentemente de clase C^k y constituyen una hoja geométrica Σ de clase C^k . Esta hoja será llamada simplemente *hoja de clase C^k definida por la parametrización F* .

Por definición, llamaremos **subhoja** de Σ a toda hoja geométrica Σ_U de clase C^k definida por la *restricción* de F a un dominio U contenido en D .

No abordaremos aquí el problema de la *prolongación* de una parametrización admisible cualquiera de Σ_U en una parametrización de Σ . Tal prolongación no siempre existe.

Arcos trazados sobre una hoja

Sea $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ una parametrización de una hoja Σ de clase C^k ($k \geq 1$), y sea γ un arco geométrico de \mathbf{R}^2 , de clase p ($p \leq k$), y de soporte contenido en D , definido por una parametrización $f : I \rightarrow D$.

Entonces la parametrización $F \circ f : I \rightarrow \mathcal{E}$ define un arco Γ de clase p de \mathcal{E} cuyo soporte está contenido en $\text{sop}(\Sigma)$. Por abuso de lenguaje se dice que este arco Γ está *trazado sobre la hoja Σ* . Se ve inmediatamente que el arco geométrico Γ depende solamente del arco geométrico γ y no de la parametrización f elegida. Con las definiciones establecidas en la página 319, Γ es la *imagen de γ por F* y lo podemos designar poniendo $\Gamma = F(\gamma)$.

Sea entonces $\Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ otra parametrización de Σ y sea $\theta : \Delta \rightarrow D$ un cambio de parámetro admisible tal que $\Phi = F \circ \theta$. Se tiene evidentemente $\Gamma = \Phi(\gamma')$, donde $\gamma' = \theta^{-1}(\gamma)$ designa el arco de \mathbf{R}^2 , de soporte contenido en Δ , definido por la parametrización $\varphi = \theta^{-1} \circ f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$.

El concepto de arco trazado sobre Σ no depende pues de la parametrización elegida para definir Σ .

Una vez elegida la parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \mapsto F(u, v)$, las imágenes de los segmentos de recta de ecuación $u = \text{Cte}$, o $v = \text{Cte}$, contenidos en D , reciben el nombre de **líneas coordenadas de Σ** (respecto a F).

Hojas orientadas

Sean D, Δ dominios de \mathbf{R}^2 y sea $\theta : \Delta \rightarrow D$, $(u, v) \mapsto [\theta_1(u, v), \theta_2(u, v)]$ un difeomorfismo de clase C^k ($k \geq 1$) de Δ sobre D . Recordemos que el **jacobiano** de θ es la función numérica $J_\theta = \frac{D(\theta_1, \theta_2)}{D(u, v)}$ definida en Δ por

$$J_\theta(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \theta_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \theta_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}.$$

De acuerdo con las hipótesis, la función J_θ es de clase C^{k-1} , por lo tanto continua y en todas partes no nula. Al ser Δ *conexo*, se deduce que J_θ *mantiene un signo constante sobre Δ* . Diremos que el difeomorfismo θ es *directo* (o que conserva la orientación del plano) si se tiene $J_\theta > 0$; si se tiene $J_\theta < 0$, se dirá que el difeomorfismo θ es *indirecto*.

Se sabe (véase tomo 2, V.4.7) que el jacobiano de la aplicación inversa θ^{-1} es la función $J_{\theta^{-1}}$ definida sobre D por

$$J_{\theta^{-1}}(\theta(m)) = \frac{1}{J_\theta(m)};$$

por otra parte, si $\theta : \Delta \rightarrow D$ y $\varphi : D \rightarrow U$ son dos difeomorfismos, el jacobiano del difeomorfismo compuesto $\varphi \circ \theta$ es la función definida sobre Δ por

$$J_{\varphi \circ \theta}(m) = J_\varphi[\theta(m)] \cdot J_\theta(m).$$

Se deduce fácilmente que el recíproco y el compuesto de difeomorfismos directos son difeomorfismos directos.

Si en la definición VIII.1.2 se sustituyen las palabras *un difeomorfismo* θ por un *difeomorfismo directo* θ , se obtiene otra relación de equivalencia sobre el conjunto de las hojas parametrizadas de clase C^k . Esta relación es más fina que la simple C^k -equivalencia y la llamaremos C^k -equivalencia positiva.

Definición VIII.1.4

} Una **hoja geométrica orientada de clase C^k** es una clase de C^k -equivalencia
 } positiva de hojas parametrizadas de clase C^k .

A cada parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ de clase C^k , asociaremos la hoja geométrica orientada Σ_+ de clase C^k constituida por las parametrizaciones positivamente C^k -equivalentes a F . Las parametrizaciones de la forma $\Phi = F \circ \theta$, donde $\theta : \Delta \rightarrow D$ es un difeomorfismo *indirecto* de clase C^k , constituyen también una hoja geométrica orientada Σ_- . De esta hoja Σ_- se dirá que es *opuesta a Σ_+* ; pero no es necesariamente distinta de Σ_+ . En efecto, pueden existir dos cambios de parámetro admisibles θ, φ uno directo y el otro indirecto, tales que se tenga $F \circ \theta = F \circ \varphi$.

Al igual que en el caso de los arcos geométricos, cada hoja geométrica Σ está formada, según los casos, por una o por dos hojas orientadas que reciben el nombre de **orientaciones** de Σ . Si existen dos de ellas, se dice que son *opuestas*. Si Σ admite una sola orientación, la hoja orientada Σ es igual a su opuesta.

Por extensión de V.2.2 se tiene fácilmente:

VIII.1.1 Para que una hoja geométrica Σ definida por una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$, tenga **una orientación única**, es necesario y suficiente que exista un cambio de parámetro admisible **indirecto** $\theta : D \rightarrow D$ tal que se tenga $F = F \circ \theta$.

Esta proposición muestra que las hojas que tienen una sola orientación son relativamente excepcionales.

Todos los enunciados que siguen y que se refieren a hojas geométricas (definición y propiedades del orden de multiplicidad de un punto, del plano tangente, de hojas regulares, etc...) son válidas a fortiori para *hojas orientadas*. Esta extensión es evidente y no insistiremos en ella si no es para señalar las propiedades de las hojas orientadas.

Ejemplo

Supongamos \mathcal{E} provisto de una estructura euclídea y referido a un sistema de referencia ortonormal y sean f, g dos funciones numéricas de clase C^k sobre un intervalo de \mathbf{R} . A estos datos asociamos la hoja de clase C^k de ecuaciones paramétricas

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \operatorname{sen} v, \quad z = g(u) \quad (u \in I, v \in \mathbf{R});$$

esta hoja se dice *de revolución alrededor de Oz*. Para la parametrización considerada, las líneas coordenadas son los *paralelos* (definidos por $u = \text{Cte}$, $v \in \mathbf{R}$) y los *meridianos* (definidos por $v = \text{Cte}$, $u \in I$).

§ VIII.2 ESTUDIO DEL SOPORTE DE UNA HOJA

Puntos simples. Puntos múltiples

Sea Σ una hoja de clase C^k definida por una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$. Si M es un punto de $\operatorname{sop}(\Sigma)$, el cardinal del conjunto $F^{-1}(M)$ no depende de la elección de F , ya que los cambios de parámetro admisibles en Σ son *biyecciones*:

- Si $\operatorname{card}(F^{-1}(M)) = 1$, se dice que el punto M es **simple**.
- Si $\operatorname{card}(F^{-1}(M))$ es un entero $p \geq 2$, se dice que M es **múltiple**, de *multiplicidad* p : cuando $p = 2$, se dice que M es *doble*; se dice que es *triple* si $p = 3$, *cuádruple* si $p = 4$, etc...
- Finalmente, si $\operatorname{card}(F^{-1}(M))$ es infinito, se dice que el punto M es de *multiplicidad infinita*. Este caso se presenta con frecuencia en la práctica.

Un punto simple de $\operatorname{sop}(\Sigma)$ se llamará brevemente *punto simple de Σ* .

Ejemplos

1. Sea f una función numérica de clase C^k en un dominio D de \mathbf{R}^2 y sea $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ la parametrización definida en un sistema de referencia afín dado de \mathcal{E} por sus coordenadas

$$(1) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v).$$

Esta claro que F es *inyectiva*. Si Σ designa la hoja definida por f , todos los puntos de $\text{sop}(\Sigma) = F(D)$ son simples. Se observará que el soporte de Σ es la *superficie de ecuación cartesiana* $z = f(x, y)$.

● En lo sucesivo llamaremos **parametrización cartesiana** a toda parametrización F que puede ser definida, en un sistema de referencia adecuado, mediante una parametrización F de la forma (1), y diremos simplemente que la hoja Σ definida por F es la *hoja de ecuación cartesiana* $z = f(x, y)$.

2. Sea $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{E}$ la parametrización definida, en un sistema de referencia fijo de \mathcal{E} , por sus coordenadas:

$$x = a \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = \frac{au(1 - u^2)}{1 + u^2}, \quad z = v.$$

La hoja Σ definida por F es cilíndrica (véase § III.5); su soporte es la *superficie cilíndrica* S de ecuación $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$. Todos los puntos de la recta Oz son dobles; los demás puntos de S son simples (véase la figura 1); estas propiedades se deducen del estudio de la cúbica plana de ecuaciones paramétricas

$$x = a \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = \frac{au(1 - u^2)}{1 + u^2},$$

para la cual O es un punto doble.

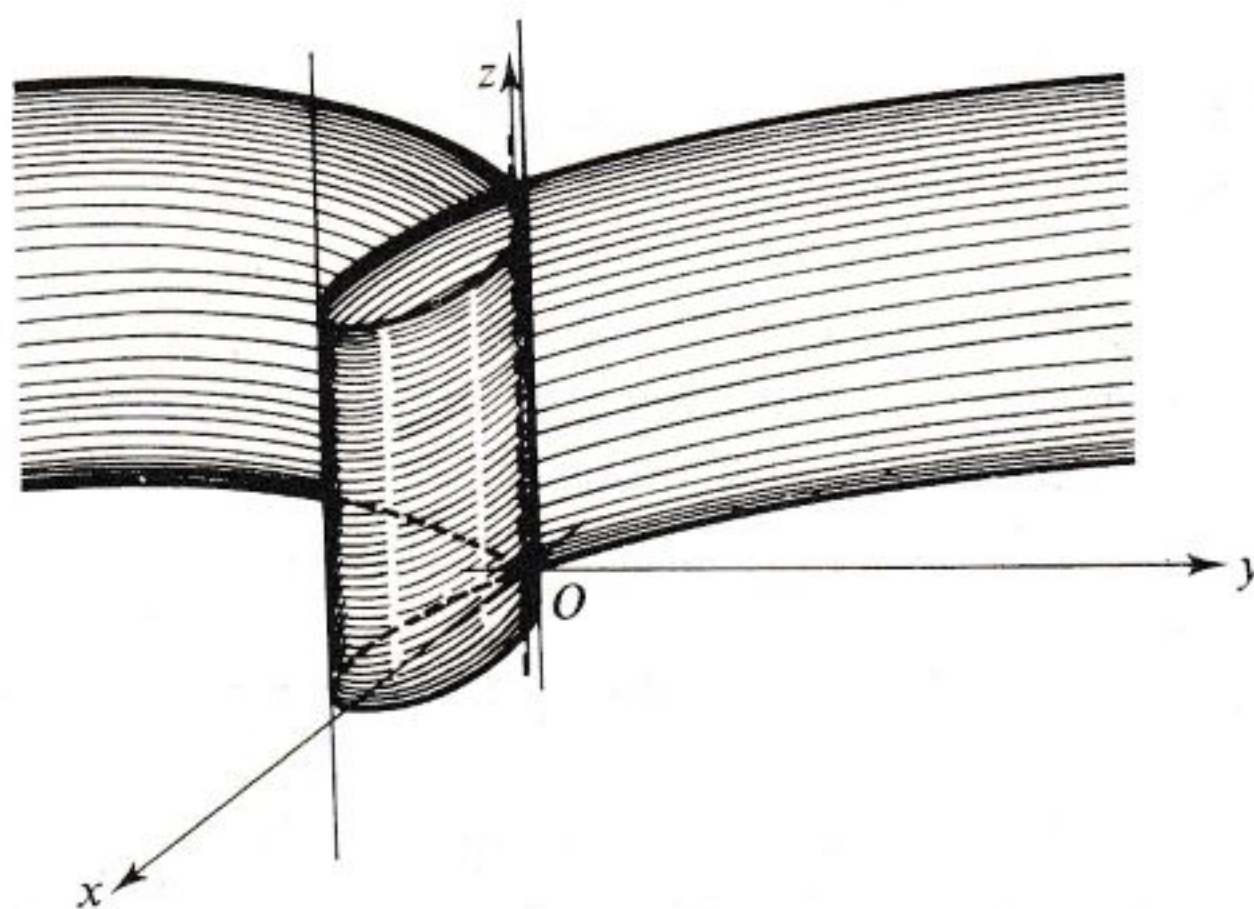


Figura 1.

3. Referido el espacio \mathcal{E} a un sistema afín fijo, sea S el cono de ecuación

$$x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0 \quad (k \neq 0).$$

a) S es el soporte de la hoja Σ definida por la parametrización F de coordenadas

$$x = kv \cos u, \quad y = kv \operatorname{senu}, \quad z = v \quad (u, v \in \mathbf{R}).$$

Para esta hoja Σ , todos los puntos de S tienen una multiplicidad infinita. Sin embargo, si M es un punto de S distinto de O , el conjunto $F^{-1}(M)$ es numerable, mientras que el conjunto $F^{-1}(O)$ es la recta $v = 0$ de \mathbf{R}^2 , la cual no es numerable.

b) Consideremos la subhoja Σ' de Σ definida por la restricción de F al conjunto $]-\pi, +\pi[\times \mathbf{R}$ de \mathbf{R}^2 . El soporte de Σ' es el conjunto S del que se quita la generatriz de ecuación $y = 0, x = -kz$.

Todos los puntos del soporte de Σ' son simples, a excepción del punto O , el cual es de multiplicidad infinita.

Definición VIII.2.1

*Una hoja geométrica se dice que es **simple** si todos los puntos de su soporte son simples.*

Equivale ello a decir que las parametrizaciones admisibles de esta hoja son *inyectivas*.

El ejemplo 1 anterior hace ver que *toda hoja que admite una parametrización cartesiana es simple*.

Observación. Si $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ y $\Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ son dos parametrizaciones admisibles de una misma hoja simple Σ , existe un solo cambio de parámetro θ tal que $\Phi = F \circ \theta$; ya que dos aplicaciones cualesquiera $\theta_1 : \Delta \rightarrow D$ y $\theta_2 : \Delta \rightarrow D$ que verifican $F \circ \theta_1 = F \circ \theta_2$ son entonces necesariamente iguales.

VIII.2.1 Toda hoja simple admite dos orientaciones distintas.

Demostración. Sea Σ una hoja simple definida por una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$. Si Σ admitiera solamente una orientación, existiría un difeomorfismo indirecto $\theta : D \rightarrow D$ tal que $F = F \circ \theta$. Ahora bien, al ser F *inyectiva*, la relación $F = F \circ \theta$ implica que θ se reduce a la aplicación idéntica de D en D , y la aplicación idéntica es directa. Se llegaría por lo tanto a una contradicción.]]

§ VIII.3 HOJAS REGULARES

Sea Σ una hoja geométrica de clase C^k definida por una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ y sea $\Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ otra parametrización admisible de Σ . Si $\theta : \Delta \rightarrow D$ es un cambio de parámetro tal que $\Phi = F \circ \theta$, se tiene, para todo punto $\mu \in \Delta$, y poniendo $m = \theta(\mu)$

$$D\Phi_\mu = DF_m \circ D\theta_\mu.$$

Ahora bien, la diferencial $D\theta_\mu$ es un isomorfismo de \mathbf{R}^2 sobre sí mismo (ya que θ es un difeomorfismo). Se ve pues que los rangos de las diferenciales $D\Phi_\mu$ y DF_m (que son aplicaciones lineales de \mathbf{R}^2 en E) son iguales. En consecuencia, si, para todo $m \in D$, el rango de DF_m es igual a 2, entonces, para todo $\mu \in \Delta$, el rango de $D\Phi_\mu$ es igual a 2. Podemos pues decir:

Definición VIII.3.1

Una hoja geométrica Σ definida por una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ se dice que es **regular** si la diferencial de F en cada punto m de D es una aplicación lineal de rango 2 ⁽¹⁾.

El estudio que antecede prueba que, en efecto, esta definición es independiente de la parametrización F elegida.

Designemos por $F(u, v)$ el valor de F en el punto m de D , de coordenadas u, v . Entonces DF_m es la aplicación lineal

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow E, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha F'_u(u, v) + \beta F'_v(u, v);$$

y la condición « DF_m es de rango 2) equivale a que los vectores $F'_u(u, v)$ y $F'_v(u, v)$ sean independientes. Por lo tanto:

VIII.3.1 Para que la hoja Σ definida por la parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \mapsto F(u, v)$ sea **regular**, es necesario y suficiente que, para todo $(u, v) \in D$, los vectores F'_u y F'_v sean **independientes**.

Cuando \mathcal{E} está provisto de una estructura de espacio euclídeo orientado, esto equivale a decir que el vector $\vec{N}(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ no se anula nunca (véase capítulo IX).

⁽¹⁾ Señalemos que a una aplicación F que verifica esta condición se la llama *inmersión*, y la hoja Σ que define se dice que está *inmersa* en \mathcal{E} .

Ejemplo

Sea Σ la hoja simple definida, en un sistema de referencia dado $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} , por la parametrización cartesiana

$$F: D \rightarrow \mathcal{E}, (x, y) \mapsto (x, y, z = f(x, y))$$

donde f designa una función numérica de clase C^k en el dominio D de \mathbf{R}^2 ($k \geq 1$).

Los vectores $F'_x(x, y)$ y $F'_y(x, y)$ están definidos por sus componentes respectivas en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$F'_x(x, y) : (1, 0, f'_x(x, y)); \quad F'_y(x, y) : (0, 1, f'_y(x, y)).$$

Al ser su matriz de rango 2, estos vectores son linealmente independientes. Uniendo este resultado con el obtenido en el § anterior, enunciaremos

VIII.3.2 *Toda hoja geométrica de clase C^k ($k \geq 1$) que admite una parametrización cartesiana es **simple y regular**.*

Vamos a ver que este resultado admite un recíproco *local* ⁽¹⁾. Con más precisión, se tiene

Teorema VIII.3.3

Sea Σ una hoja de clase C^k definida por una parametrización $F: D \rightarrow \mathcal{E}$ y sea $m_0 = (u_0, v_0)$ un punto de D tal que la diferencial de F en m_0 sea de rango 2.
Existe entonces un dominio D_0 , contenido en D y que contiene a m_0 , tal que la subhoja Σ_0 de Σ definida por la restricción de F a D_0 admite una parametrización cartesiana (de donde resulta que Σ_0 es **simple y regular**).

Demostración. Designemos por f, g, h las coordenadas de F en un sistema de referencia afín arbitrariamente dado $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} .

Por hipótesis, la matriz

$$\begin{bmatrix} f'_u(u_0, v_0) & g'_u(u_0, v_0) & h'_u(u_0, v_0) \\ f'_v(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) & h'_v(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

⁽¹⁾ Lo mismo que para los arcos, la palabra «local» no hace aquí referencia a la topología del soporte de la hoja. Se refiere a la topología del dominio de definición de una parametrización cualquiera de la hoja.

es de rango 2. Permutando las coordenadas, podemos pues suponer que el determinante funcional

$$\frac{D(f, g)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} f'_u & g'_u \\ f'_v & g'_v \end{vmatrix}$$

verifica

$$\frac{D(f, g)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Según el teorema de inversión local (tomo 2, teorema VI.5.1) existe un abierto D_0 contenido en D y que contiene a m_0 , tal que la aplicación

$$D_0 \rightarrow \mathbf{R}^2, (u, v) \mapsto (f(u, v), g(u, v))$$

define un *difeomorfismo* θ de D_0 en un abierto Δ_0 de \mathbf{R}^2 que contiene el punto (x_0, y_0) ; este difeomorfismo es de clase C^k .

Se puede suponer evidentemente que D_0 es *conexo*, en cuyo caso $\Delta_0 = \theta(D_0)$ es *conexo*.

Sea entonces Σ_0 la hoja definida por la restricción de F a D_0 ; la aplicación $\Phi = F \circ \theta^{-1} : \Delta_0 \rightarrow \mathcal{E}$ es una parametrización admisible de Σ_0 , la cual se ve fácilmente que es *cartesiana*. En efecto, las coordenadas del punto $\Phi(x, y)$ son, por construcción

$$x, \quad y \quad \text{y} \quad h \circ \theta^{-1}(x, y).$$

Por lo tanto, Σ_0 está definida, en el sistema de referencia considerado, por una ecuación cartesiana de la forma $z = \varphi(x, y)$, $((x, y) \in \Delta_0)$.]

Observación. Manteniendo las notaciones de esta demostración, se ve que la condición

$$\frac{D(f, g)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$$

equivale a decir que el vector \vec{k} no está en el plano vectorial engendrado por los vectores $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$; ahora bien, si el punto $M_0 = F(u_0, v_0)$ es simple, este plano vectorial es la dirección del *plano tangente* a Σ en el punto M_0 (véase § 4), y su existencia equivale a la independencia lineal de los vectores $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0),$

$\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$. Hemos establecido pues el resultado que sigue, que completa VIII.3.2 y que será utilizado con frecuencia.

VIII.3.4 Sea $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia afín dado de \mathcal{E} y sea Σ una hoja geométrica que admite, en un punto simple ⁽¹⁾ M_0 , un plano tangente no paralelo al vector \vec{k} .

Existe entonces una subhoja de Σ que contiene a M_0 y que admite una ecuación cartesiana de la forma

$$z = f(x, y).$$

En consecuencia, sea Σ una hoja geométrica simple y regular, y sea $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia afín cualquiera dado de \mathcal{E} . Por cada punto M_0 de \mathcal{E} pasa una subhoja de Σ que admite una ecuación cartesiana de la forma

$$z = f(x, y) \quad \text{o} \quad x = g(y, z) \quad \text{o} \quad y = h(z, x).$$

En efecto, el plano tangente a Σ en M_0 no puede ser paralelo a la vez a los tres vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ y se puede aplicar VIII.3.3 sustituyendo si es preciso \vec{k} por \vec{i} o \vec{j} .

El teorema VIII.3.2 muestra que el estudio de una hoja regular se reduce *localmente* ⁽²⁾ al estudio de hojas *simples y regulares* definidas por parametrizaciones cartesianas, por lo que tiene mucha importancia en la práctica. Este teorema permite también establecer la relación entre los conceptos de hoja y de subvariedad de \mathcal{E} (véase § 8).

Funciones diferenciables en una hoja simple y regular

Sea Σ una hoja de clase C^k ($k \geq 1$) simple y regular, de soporte S , y sea $\alpha : S \rightarrow \mathbf{R}$ una función numérica.

Si para una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ de Σ la función $\alpha \circ F$ es de clase C^p en D ($p \leq k$), ocurre entonces evidentemente lo mismo para *toda* parametrización de Σ . (Esto resulta del hecho de que los cambios de parámetro en Σ son difeomorfismos de clase C^k .)

⁽¹⁾ La razón de suponer M_0 simple es para poder dar un enunciado de naturaleza geométrica. De hecho, el teorema VIII.3.2 hace ver que nos podemos reducir al caso de una hoja simple reduciendo D si es preciso (es decir sustituyendo Σ por una subhoja).

⁽²⁾ Ver nota de la página 510.

Cuando esto ocurre, diremos (por abuso de lenguaje) que α es una *función de Clase C^p en Σ* .

El conjunto de las funciones de clase C^p en Σ constituye evidentemente una \mathbf{R} -álgebra $\mathcal{C}^p(\Sigma)$ con las leyes habituales:

$$\text{suma: } (\alpha + \beta)(M) = \alpha(M) + \beta(M) \quad (M \in S)$$

$$\text{producto: } (\alpha\beta)(M) = \alpha(M)\beta(M)$$

$$\text{multiplicación por } \lambda \in \mathbf{R}: (\lambda\alpha)(M) = \lambda[\alpha(M)];$$

la subálgebra de las *funciones constantes* en Σ se identifica evidentemente con el cuerpo \mathbf{R} de escalares.

§ VIII.4 PLANO TANGENTE

Designemos por $F: D \rightarrow \mathcal{E}$ y $\Phi: \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ dos parametrizaciones admisibles de una misma hoja Σ de clase C^k y sea $\theta: \Delta \rightarrow D$ un cambio de parámetro admisible tal que $\Phi = F \circ \theta$.

Si M es un *punto simple* de Σ , existe un punto único $m \in D$ y un punto único $\mu \in \Delta$ tales que

$$M = F(m) = \Phi(\mu)$$

se tiene (véase § 3)

$$(1) \quad D\Phi_\mu = DF_m \circ D\theta_\mu.$$

Según hemos hecho notar ya, la diferencial $D\theta_\mu$ es un isomorfismo de \mathbf{R}^2 en sí mismo. La relación (1) muestra que las aplicaciones lineales $D\Phi_\mu$ y DF_m tienen la misma imagen. Esta imagen es un subespacio de E , el cual depende solamente del punto M , que designaremos por T_M . La *dimensión* de T_M es igual al *rango* de DF_m , por lo tanto igual a 0, 1 ó 2. Se da la siguiente

Definición VIII.4.1

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sea } \Sigma \text{ una hoja geométrica definida por una parametrización } F: D \rightarrow \mathcal{E} \\ \text{y sea } M = F(m) \text{ un punto simple de } \Sigma. \end{array} \right.$

- a) El punto M se dice que es **estacionario** si DF_m es de rango ≤ 1 , **regular** si DF_m es de rango 2.
 b) Si M es un **punto regular**, el plano vectorial $T_M = \text{Im}(DF_m)$ recibe el nombre de **plano vectorial tangente** a Σ en M ; el plano afín \mathcal{C}_M de dirección T_M que pasa por M recibe el nombre de **plano tangente** a Σ en M ; los elementos no nulos de T_M son llamados **vectores tangentes** a Σ en M , y las rectas contenidas en \mathcal{C}_M que pasan por M son llamadas **tangentes** a Σ en M .

El estudio que antecede muestra que en efecto estas definiciones son independientes de la parametrización F elegida.

Por otra parte, los conceptos acabados de definir no se modifican si se sustituye la hoja Σ por una *subhoja que pasa por M* . En consecuencia, para determinar T_M , se puede utilizar cambios de parámetro admisibles definidos solamente en un entorno de m . En particular, si Σ es una hoja regular, nos podremos limitar siempre (sustituyendo Σ por una subhoja) al caso en que Σ está definida por una parametrización cartesiana (véase § 3).

Ecuaciones del plano tangente

Sea como siempre Σ una hoja de clase C^k ($k \geq 1$) definida por una parametrización $F: D \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \mapsto F(u, v)$ y sea $M_0 = F(u_0, v_0)$ un punto simple de Σ .

Sabemos (véase § 3) que M es regular si, y solamente si, los vectores $F'_u(u_0, v_0)$ y $F'_v(u_0, v_0)$ son *linealmente independientes*; el plano vectorial T_{M_0} está pues parametrizado por

$$(2) \quad (\lambda, \mu) \mapsto M_0 + \lambda \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R}).$$

Designemos ahora por f, g, h las coordenadas de F en un sistema de referencia afín de \mathcal{E} fijado arbitrariamente. En este sistema de referencia, el plano tangente \mathcal{C}_{M_0} admite la *ecuación cartesiana*

$$(2\text{bis}) \quad \begin{vmatrix} x - f(u_0, v_0) & y - g(u_0, v_0) & z - h(u_0, v_0) \\ f'_u(u_0, v_0) & g'_u(u_0, v_0) & h'_u(u_0, v_0) \\ f'_v(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) & h'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Si la hoja Σ está definida por la ecuación cartesiana $z = f(x, y)$, todo queda reducido al caso anterior designando por F la parametrización $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$. Se ve de este modo que el plano tangente a Σ en el punto de coordenadas

$$(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$$

admite la ecuación cartesiana

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - f(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

o sea, desarrollando

(3)

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0).$$

Propiedades de contacto

Al igual que la tangente a un arco, el plano tangente a una hoja puede caracterizarse por una propiedad de contacto. Para enunciarlo cómodamente, supondremos el espacio vectorial \mathbf{R}^2 provisto de una *norma*, (siendo los resultados obtenidos independientes de la elección de esta norma).

VIII.4.1 Sea Σ una hoja de \mathcal{E} definida por una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ y

sea $M_0 = F(m_0)$ un punto simple y regular de Σ .

Para que el plano afín \mathcal{P} definido por la ecuación cartesiana $\varphi(M) = 0$ sea **tangente** en M_0 a Σ , es necesario y suficiente que se tenga, en el entorno de m_0 :

$$(4) \quad \varphi(F(m)) = o(\|\overrightarrow{m_0 m}\|).$$

Demostración. Puesto que la función compuesta $\psi = \varphi \circ F$ es diferenciable (ya que lo son F y φ) tenemos

$$\psi(m) = \psi(m_0) + D\psi_{m_0} \cdot \overrightarrow{m_0 m} + o(\|\overrightarrow{m_0 m}\|);$$

y la relación (4) equivale a las relaciones

$$(5) \quad \psi(m_0) = \varphi(M_0) = 0, \quad D\psi_{m_0} = 0.$$

Ahora bien, se tiene

$$D\psi_{m_0} = D(\varphi \circ F)_{m_0} = D\varphi_{M_0} \circ DF_{m_0}$$

y puesto que φ es *afín*, su diferencial en cada punto es igual a su *parte lineal* $f = L(\varphi)$.

Por otra parte, la diferencial DF_{m_0} es la aplicación lineal $\mathbf{R}^2 \rightarrow E$, $(du, dv) \mapsto F'_u(u_0, v_0) du + F'_v(u_0, v_0) dv$, designando por (u_0, v_0) las coordenadas de m_0 . La relación $L(\varphi) \circ DF_{m_0} = 0$ equivale, pues, a

$$(6) \quad L(F'_u) = 0 \quad \text{y} \quad L(F'_v) = 0,$$

y las relaciones (6) traducen el hecho de que los vectores F'_u y F'_v son paralelos al plano \mathcal{P} . Por otra parte, la primera de las relaciones (5) expresa que \mathcal{P} pasa por M_0 . Las condiciones (5) expresan, pues, que \mathcal{P} es el plano tangente a Σ en M_0 .]

Observación. Se obtiene una presentación menos abstracta utilizando las coordenadas f, g, h de F en un sistema de referencia dado de \mathcal{E} . Pongamos entonces

$$\varphi(M) = ax + by + cz + d \quad (a, b, c, d = \text{Ctes}),$$

designando por x, y, z las coordenadas del punto M en este mismo sistema de referencia. Si m designa el punto de D de coordenadas u, v , se tiene

$$\psi(u, v) = \psi[F(m)] = af(u, v) + bg(u, v) + ch(u, v) + d.$$

La relación $D\psi_m = 0$, equivale entonces a las relaciones

$$\psi'_u(u_0, v_0) = 0, \quad \psi'_v(u_0, v_0) = 0,$$

o sea

$$af'_u(u_0, v_0) + bg'_u(u_0, v_0) + ch'_u(u_0, v_0) = 0$$

$$af'_v(u_0, v_0) + bg'_v(u_0, v_0) + ch'_v(u_0, v_0) = 0$$

y se ve que estas relaciones traducen el hecho de que los vectores $F'_u(u_0, v_0)$ y $F'_v(u_0, v_0)$ son paralelos a \mathcal{P} .]

Caso de una parametrización cartesiana

Supongamos definida la hoja Σ en un sistema de referencia adecuado $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ por la ecuación cartesiana

$$z = f(x, y),$$

donde f designa una función numérica de clase C^k en un dominio plano D de \mathbf{R}^2 . Se puede tomar entonces como F la aplicación que, al punto $m \in D$, de coordenadas (x, y) , asocia el punto M de coordenadas (x, y, z) , y si, con ayuda del sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$, se identifica \mathbf{R}^2 con el plano de ecuación $z = 0$, el punto m es la *proyección* de M sobre este plano.

Para que el plano \mathcal{P} de ecuación

$$z - z_0 - p(x - x_0) - q(y - y_0) = 0$$

sea tangente a Σ en el punto $M_0 = F(m_0)$, es necesario y suficiente que se tenga

$$(7) \quad z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0) - f(x, y) = o(\|\overrightarrow{m_0 m}\|),$$

poniendo $m = (x, y)$ y $m_0 = (x_0, y_0)$.

La relación (7) equivale (por ser f diferenciable) a:

$$(8) \quad z_0 = f(x_0, y_0), \quad p = f'_x(x_0, y_0), \quad q = f'_y(x_0, y_0).$$

Nos encontramos aquí de nuevo con la ecuación del plano tangente obtenida directamente, o sea con (3).

Para interpretar geométricamente la relación (7), pongamos, para cada punto $m = (x, y)$ de D

$$z_M = f(x, y) \quad z_P = z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

El punto P , de coordenadas (x, y, z_P) es la intersección con el plano \mathcal{P} de la paralela al eje Oz trazada por m (véase la figura 2).

La aplicación $m \mapsto P$ así definida es una biyección afín del plano (Oxy) sobre el plano \mathcal{P} . Dando a \mathcal{P} una norma cualquiera se ve que la relación (7) equivale a cada una de las relaciones

$$(8) \quad z_M - z_P = o(\|\overrightarrow{m_0 m}\|)$$

$$(8') \quad z_M - z_P = o(\|\overrightarrow{M_0 P}\|).$$

Cada una de las relaciones (8), (8') proporciona una caracterización geométrica del plano tangente a Σ en M_0 .

Extendiendo el concepto de contacto se pueden traducir estas relaciones diciendo que *el plano tangente a una hoja Σ en un punto regular M_0 , es el único plano \mathcal{P} que tiene con Σ un contacto de orden ≥ 1 en M_0 .*

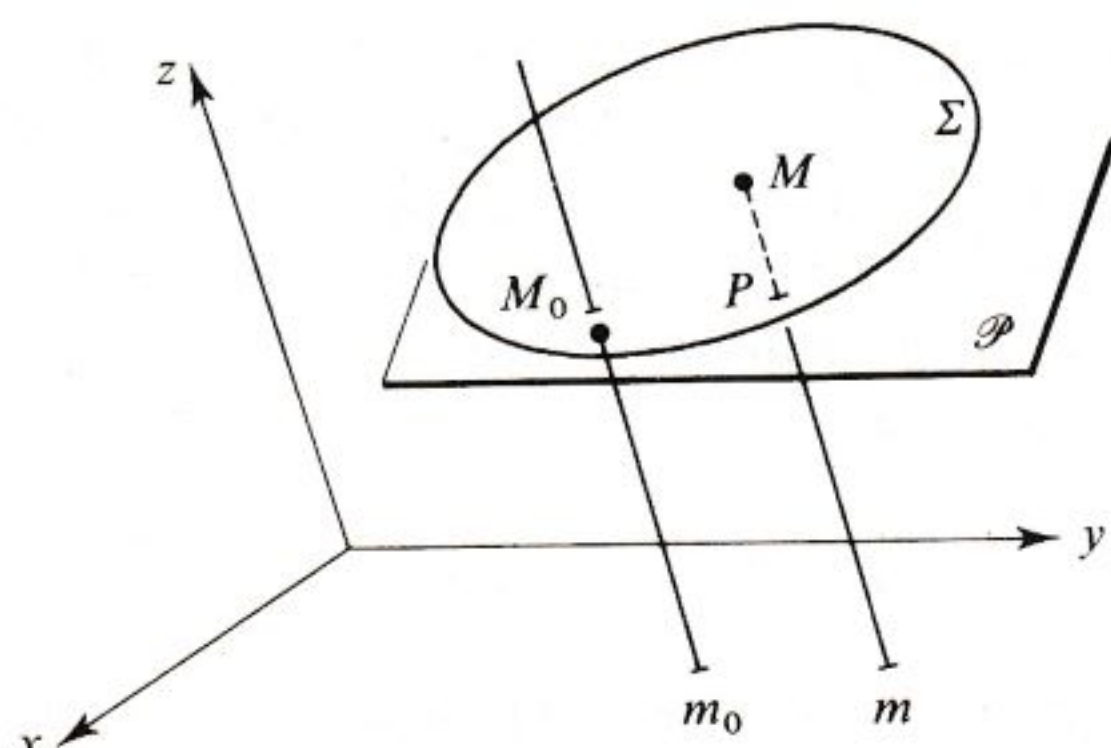


Figura 2.

Tangentes a los arcos trazados sobre Σ

Sea Σ una hoja simple y regular de clase C^k definida por una parametrización $F: D \rightarrow \mathcal{E}$ y sea γ un arco de clase p de \mathbf{R}^2 ($1 \leq p \leq k$), de soporte contenido en D , definido por la parametrización $f: I \rightarrow \mathbf{R}^2$. Designemos por $\Gamma = F(\gamma)$ el arco trazado sobre Σ que le corresponde (véase página 503).

Al ser inyectiva la parametrización F es equivalente decir que γ es simple o que Γ es simple. Por otra parte, para cada $t \in I$, el vector

$$(9) \quad \vec{V}(t) = \frac{d}{dt} [F(f(t))] = DF_{f(t)} \cdot f'(t)$$

es la imagen por la aplicación lineal $DF_{f(t)}$, del vector $f'(t)$. Ahora bien, para cada $m \in D$, la aplicación DF_m es inyectiva por hipótesis (ya que se ha supuesto a Σ regular). La relación $f'(t) = 0$ equivale pues a $\vec{V}(t) = 0$ y es equivalente decir que γ es regular o que Γ es regular.

Un arco simple y regular trazado sobre una hoja simple y regular Σ es pues imagen por F de un arco simple y regular contenido en D .

Si se pone $m_0 = f(t_0)$ y $M_0 = F_0(m_0)$ ($t_0 \in I$), la relación (9) prueba que el vector $\vec{V}(t_0)$, tangente a Γ en el punto M_0 , está contenido en la imagen de la aplicación

lineal DF_{m_0} , es decir en el plano vectorial tangente a Σ en M_0 . En otros términos:

La tangente en un punto M_0 a un arco simple y regular trazado sobre una hoja simple y regular Σ , está contenida en el plano tangente a Σ en M_0 .

● A la inversa, se puede demostrar que toda recta tangente a Σ en M_0 es la tangente en M_0 a un arco simple y regular trazado sobre Σ .

Designemos en efecto por $\vec{V} = \lambda F'_u(u_0, v_0) + \mu F'_v(u_0, v_0)$ un vector cualquiera tangente en el punto $M_0 = F(u_0, v_0)$ y sea $h > 0$ suficientemente pequeño para que el segmento de recta δ de \mathbf{R}^2 definido por la parametrización

$$u = u_0 + \lambda t, \quad v = v_0 + \mu t \quad (|t| < h)$$

esté contenido en D . Entonces la imagen de δ por F es un arco simple y regular trazado sobre Σ , cuya tangente en el punto M_0 está dirigida por el vector \vec{V} .

Tomemos en particular $h > 0$ suficientemente pequeño para que el cuadrado definido por $|u - u_0| < h$, $|v - v_0| < h$ esté contenido en D . Entonces, las dos líneas coordenadas Γ_1 , Γ_2 definidas respectivamente por las parametrizaciones

$$u \mapsto F(u, v_0) \quad (|u - u_0| < h) \quad \text{y} \quad v \mapsto F(u_0, v) \quad (|v - v_0| < h)$$

son arcos simples y regulares trazados sobre Σ , y las tangentes a estos arcos en el punto $M_0 = F(u_0, v_0)$ están dirigidas respectivamente por los vectores $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0)$,

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Observación. Si el soporte de una hoja Σ contiene un segmento de recta g que pasa por un punto simple y regular M_0 , entonces el plano tangente a Σ en M_0 contiene a la recta \mathcal{G} que es soporte del segmento.

Según el teorema VIII.3.2, podemos limitarnos, en efecto, al caso en que Σ es una hoja simple y regular; el segmento g es entonces el soporte de un arco simple y regular trazado sobre Σ y la tangente a este arco es la recta \mathcal{G} que contiene a g .

Esta observación es fundamental en el estudio de las superficies regladas (§ 6).

Vamos a estudiar ahora los planos tangentes a algunas hojas particulares.

Plano tangente a una hoja cónica

Una *hoja cónica* Σ de \mathcal{E} está definida por una parametrización de la forma

$$I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (u, v) \mapsto M(u, v) = O + v \vec{K}(u),$$

donde O designa el *vértice* de la hoja y $u \mapsto \vec{K}(u)$ una función vectorial de clase C^k ($k \geq 1$) sobre un intervalo I de \mathbf{R} (véase p. 185).

Se tiene aquí

$$\frac{\partial M}{\partial u} = v \vec{K}'(u), \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \vec{K}(u).$$

Para que el punto $M(u, v)$ sea regular es necesario y suficiente que los vectores $\vec{K}'(u)$ y $\vec{K}(u)$ sean linealmente independientes, y que se tenga $v \neq 0$, es decir $M \neq O$. Si se cumplen estas condiciones, el plano tangente en el punto $M(u, v)$ está dirigido por los vectores $\vec{K}(u)$ y $\vec{K}'(u)$; contiene pues la generatriz \mathcal{G} que pasa por este punto (según era previsible de acuerdo con la observación anterior), y es el único plano que contiene a \mathcal{G} paralelo al vector $\vec{K}'(u)$, de donde resulta que *el plano tangente a Σ es el mismo en todo punto (distinto de O) de la generatriz \mathcal{G}* . Se observará que el vector $\vec{K}'(u)$ es tangente a la *curva directriz*

$$\Gamma : u \mapsto O + \vec{K}(u)$$

en el punto $m = O + \vec{K}(u)$ (véase la figura 3).

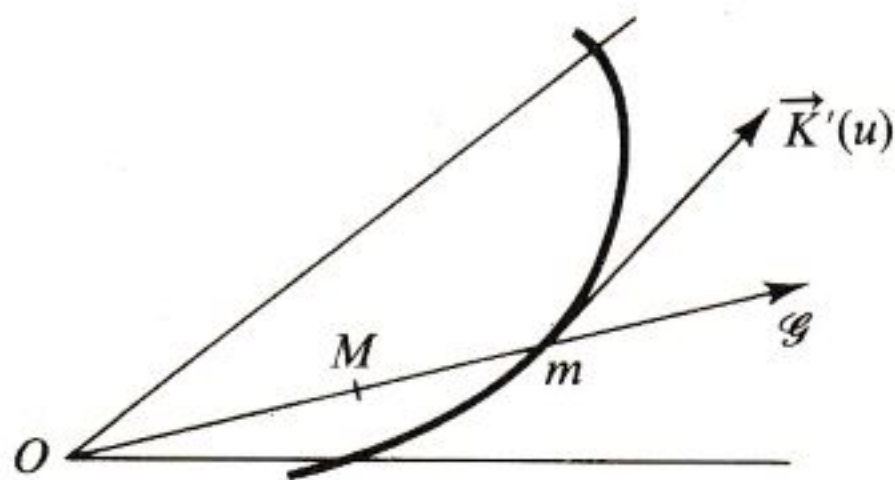


Figura 3.

Plano tangente a una hoja cilíndrica

Una *hoja cilíndrica* Σ de \mathcal{E} está definida por una parametrización de la forma

$$I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, (u, v) \mapsto M(u, v) = f(u) + v \vec{k},$$

donde \vec{k} designa un vector fijo no nulo y $f: I \rightarrow \mathcal{E}$ un arco parametrizado de clase C^k de \mathcal{E} . Se tiene aquí

$$\frac{\partial M}{\partial u} = f'(u), \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \vec{k}.$$

Para que el punto $M(u, v)$ sea regular, es necesario y suficiente que el vector $f'(u)$ sea no colineal con k , y el plano tangente es entonces el único plano que contiene a la generatriz \mathcal{G} de M y que es paralelo al vector \vec{k} . Este plano es el mismo en todo punto de la generatriz \mathcal{G} .

Se observará que $f'(u)$ es un vector tangente a la *directriz* de Σ (arco definido por la parametrización f). Para que Σ admita un plano tangente en un punto de la generatriz \mathcal{G} , es pues necesario y suficiente que ésta no sea tangente a la directriz en el punto $m = f(u)$ (véase la figura 4).

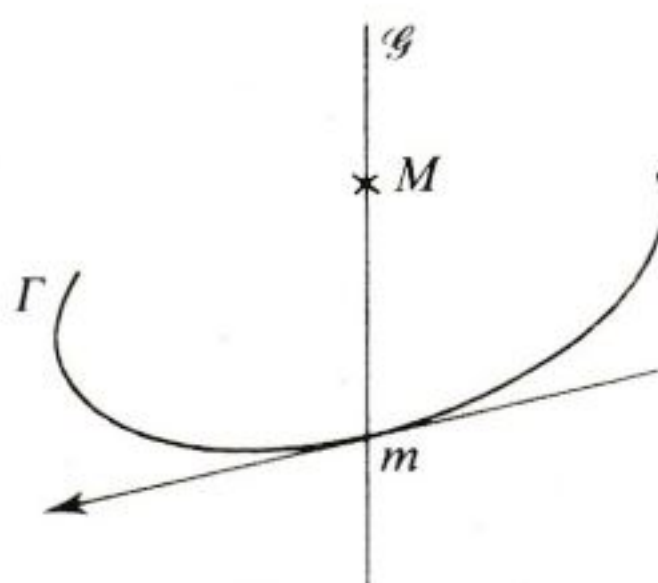


Figura 4.

Plano tangente a una superficie de revolución

Estando provisto el espacio afín \mathcal{E} de una estructura euclídea, sea $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal. Una *hoja de revolución* Σ de eje Oz está definida por ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \operatorname{sen} v, \quad z = g(u) \quad (u \in I, v \in \mathbf{R}),$$

donde f, g son funciones numéricas de clase C^k en un intervalo I de \mathbf{R} .

Los vectores $\partial M / \partial u$ y $\partial M / \partial v$ están definidos por sus componentes

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial u} &: \left(f'(u) \cos v, \quad f'(u) \operatorname{sen} v, \quad g'(u) \right) \\ \frac{\partial M}{\partial v} &: \left(-f(u) \operatorname{sen} v, \quad f(u) \cos v, \quad 0 \right). \end{aligned}$$

Para que estos dos vectores sean independientes es necesario y suficiente que se tenga

$$\frac{\partial M}{\partial u} \neq 0 \quad \text{y} \quad f(u) \neq 0.$$

a) Si el par (u, v) verifica estas condiciones, nos podemos limitar, sustituyendo Σ por una subhoja, al caso en que el punto $M(u, v)$ es simple. El plano tangente a Σ en este punto queda entonces determinado por la tangente Δ_M al paralelo de M y por la tangente D_M al meridiano de M (recordemos que los paralelos y los meridianos son líneas coordenadas). Destaquemos que las rectas D_M y Δ_M son ortogonales (véase la figura 5).

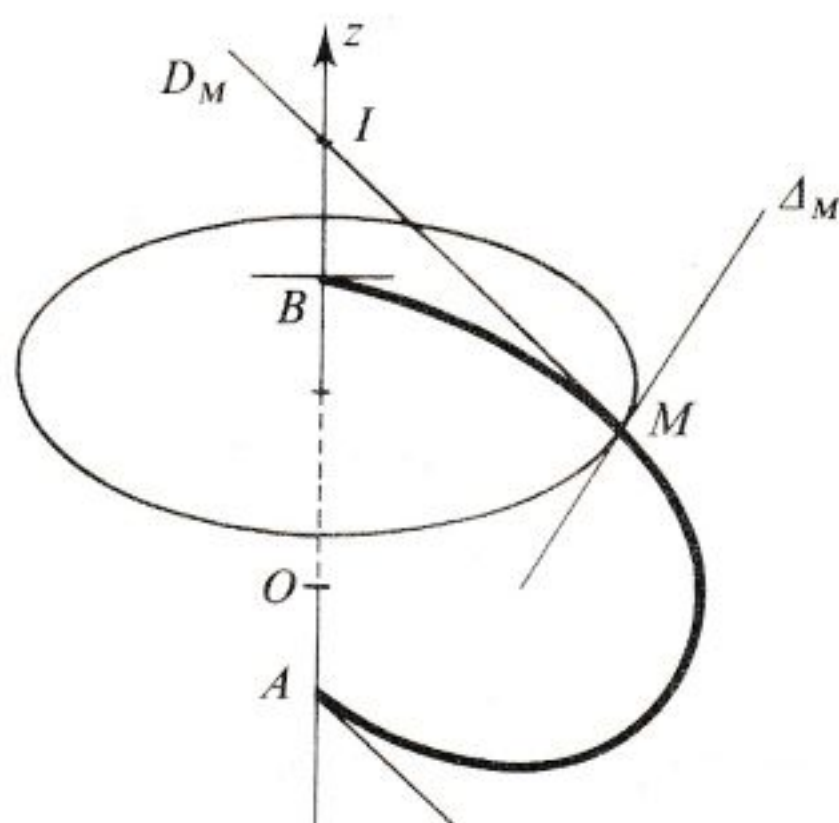


Figura 5.

Si D_M es paralelo a Oz , el *cilindro de revolución* de eje Oz que pasa por M es tangente a Σ a lo largo del paralelo de M ; este cilindro se dice que es *circunscrito* a Σ a lo largo de este paralelo.

Si D_M corta al eje Oz en un punto I , el *cono de revolución* de eje Oz y de vértice I , que pasa por M , es tangente a Σ a lo largo del paralelo de M ; se dice que es *circunscrito* a Σ a lo largo de este paralelo.

Señalemos que las hojas de revolución de eje Oz están caracterizadas por el hecho de que su *normal* en cada punto es coplanaria con Oz .

b) Si se tiene $f(u) = 0$, el punto $M(u, v)$ pertenece al eje Oz , y es un punto múltiple de orden infinito de la hoja a considerar. En algunos casos el soporte de la hoja Σ admite en este punto un *plano tangente geométrico*, y puesto que este plano tangente tiene que permanecer invariante en toda rotación de eje Oz , solamente puede ser el plano perpendicular en M a Oz .

Se da este caso cuando los meridianos de Σ admiten en este punto tangentes perpendiculares a Oz .

El toro cruzado engendrado por la rotación de una circunferencia alrededor

de una secante no diametral de su plano nos proporciona un ejemplo de una hoja de revolución que no admite plano tangente en los puntos situados sobre su eje.

(En la figura 5 se han representado dos disposiciones posibles: en B la hoja Σ admite un plano tangente perpendicular a Oz ; en A no admite plano tangente.)

Intersección de dos superficies

Consideremos dos hojas regulares Σ_1, Σ_2 de clase C^k ($k \geq 1$) que tienen un punto común M_0 y *no son tangentes en este punto* (o sea que tienen en este punto planos tangentes distintos). Vamos a ver que en el entorno de M_0 la intersección de Σ_1 y Σ_2 es un arco regular cuya tangente en M_0 es la intersección de los planos tangentes a Σ_1, Σ_2 .

Tomemos un sistema de referencia afín $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de origen M_0 tal que el vector \vec{k} no sea paralelo ni al plano tangente a Σ_1 en M_0 , ni al plano tangente a Σ_2 en M_0 . Existen entonces una subhoja Σ'_1 de Σ_1 y una subhoja Σ'_2 de Σ_2 que admiten respectivamente ecuaciones cartesianas de la forma

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y),$$

siendo cada una de las funciones f_i ($i = 1, 2$) de clase C^k en un dominio D_i que contiene al punto $(0, 0)$ y que verifica $f_i(0, 0) = 0$.

El problema de la intersección de Σ'_1 y Σ'_2 se reduce a hallar los puntos $(x, y) \in D_1 \cap D_2$ que verifican $f_1(x, y) = f_2(x, y)$.

Ahora bien, al no ser Σ_1 y Σ_2 tangentes en M_0 , se tiene:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) \quad \text{o} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0).$$

En otros términos, la función numérica $f = f_1 - f_2$ (definida en $D_1 \cap D_2$) tiene una diferencial no nula en el punto $(0, 0)$. Por aplicación de la teoría de las funciones implícitas se sabe que existen dos intervalos abiertos I, J de \mathbf{R} que contienen al origen y tales que el conjunto de los puntos $(x, y) \in I \times J$ que verifican $f(x, y) = 0$ es el soporte de un arco simple y regular γ de clase C^k , cuya tangente en el origen es la recta de ecuación

$$xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0) = 0$$

(véase tomo 2, pVI.4.1). Si se designa por σ_i ($i = 1, 2$) la subhoja de Σ'_1 definida por la restricción de f_i al rectángulo $I \times J$, se ve que la intersección de los soportes de σ_1 y σ_2 es un arco simple y regular Γ cuya proyección sobre el plano $(M_0; \vec{i}, \vec{j})$ es el arco γ . La tangente a Γ es entonces la intersección de los planos tangentes a Σ_1, Σ_2 en M_0 .

Enunciaremos el resultado obtenido

VIII.4.2 Sean Σ_1, Σ_2 dos hojas simples y regulares de clase C^k ($k \geq 1$) cuyos soportes tienen un punto común M_0 , y **no son tangentes** en el punto M_0 . Existen entonces una subhoja σ_1 de Σ_1 y una subhoja σ_2 de Σ_2 que contienen a M_0 , y tales que la intersección de los soportes de σ_1 y σ_2 es el soporte de un arco simple y regular de clase C^k ($k \geq 1$); la tangente a este arco en M_0 es la intersección de los planos tangentes a Σ_1, Σ_2 en M_0 .

Este resultado se aplica en particular al caso de la intersección de una hoja con un plano *no tangente*.

El problema de la intersección de una hoja con uno de sus planos tangentes se estudiará al final del § 5.

§ VIII.5 POSICIÓN DE UNA HOJA RESPECTO A UN PLANO TANGENTE

Nos proponemos precisar el estudio (iniciado en el § anterior) de la posición de una hoja Σ respecto a un plano tangente en un punto M_0 simple y regular; supondremos para ello que Σ es de clase C^k con $k \geq 2$.

Según el teorema VIII.3.3 nos podemos limitar (sustituyendo si es preciso Σ por una subhoja que contenga a M_0) al caso en que Σ está definida, en un sistema de referencia adecuado $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, mediante una ecuación cartesiana de la forma

$$z = f(x, y),$$

donde f es una función numérica de clase C^k sobre un dominio D de \mathbf{R}^2 .

Con ayuda del sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ identificaremos \mathcal{E} con \mathbf{R}^3 y el plano

$$\mathcal{P} = (O; \vec{i}, \vec{j})$$

con \mathbf{R}^2 . La aplicación

$$p : M = (x, y, z) \mapsto m = (x, y)$$

será llamada simplemente *proyección* sobre \mathcal{P} . Finalmente se dotará a \mathcal{P} de una norma cualquiera.

Pongamos $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, con $z_0 = f(x_0, y_0)$, $m_0 = (x_0, y_0) = p(M_0)$;

$$\begin{aligned} p &= f'_x(x_0, y_0), \quad q = f'_y(x_0, y_0); \quad r = f''_{x^2}(x_0, y_0), \\ s &= f''_{xy}(x_0, y_0), \quad t = f''_{y^2}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Taylor-Young a f hasta el orden 2 en el entorno del punto $m_0 = (x_0, y_0)$, se obtiene, poniendo $m = (x, y)$:

$$(1) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0) + \frac{1}{2} [r(x - x_0)^2 + \\ &+ 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(y - y_0)^2] + o(\|\overrightarrow{m_0 m}\|^2). \end{aligned}$$

Ahora bien, la ecuación del plano tangente \mathcal{T}_{M_0} a Σ en M_0 es $z = \varphi(x, y)$ con

$$\varphi(x, y) = z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

Al igual que en el § anterior, designemos por M el punto de Σ de coordenadas

$$(x, y, z_M = f(x, y))$$

y por P el punto de \mathcal{T}_{M_0} de coordenadas $(x, y, z_P) = \varphi(x, y)$ (véase la figura 2, p. 518).

La relación (1) se escribe entonces en la forma más sugestiva

$$(2) \quad z_M - z_P = \frac{1}{2} [r(x - x_0)^2 + 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(y - y_0)^2] + o(\|\overrightarrow{m_0 m}\|^2).$$

Sea Q la forma cuadrática definida en \mathbf{R}^2 por

$$Q(X, Y) = rX^2 + 2sXY + tY^2.$$

(esta forma no es otra que la forma cuadrática *asociada a la diferencial segunda de f en m_0* .)

Esta forma Q depende del sistema de referencia elegido en el cual el trozo de hoja considerado está representado por $z = f(x, y)$.

Sin embargo, se llega fácilmente a la conclusión de que la *naturaleza* de Q (o sea si es degenerada o no, si es definida positiva, definida negativa, o no) *no depende*

del sistema de referencia elegido. Esta naturaleza de Q traduce pues una propiedad geométrica local de la hoja Σ en el punto M_0 , que vamos a estudiar en los distintos casos.

Primer caso: La forma Q es definida positiva o definida negativa. Se dice entonces que el punto M_0 es **elíptico**.

Este caso se presenta si, y solamente si, se tiene

$$s^2 - rt < 0.$$

Sabemos que entonces la función $g : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) = z_M - z_P = f(x, y) - \varphi(x, y)$$

admite un *extremo estricto* (local) en m (ver tomo 2, teorema VI.1.2).

Dicho de otro modo, para m suficientemente próximo a m_0 , $z_M - z_P$ mantiene un signo constante y se hace nulo solamente para $m = m_0$. Este hecho se traduce por el hecho de que la hoja Σ permanece, en el entorno de M_0 , a un solo lado del plano tangente \mathcal{T}_{M_0} ; se dice que Σ presenta, en el punto M_0 el *aspecto de un balón* (véase la figura 6).

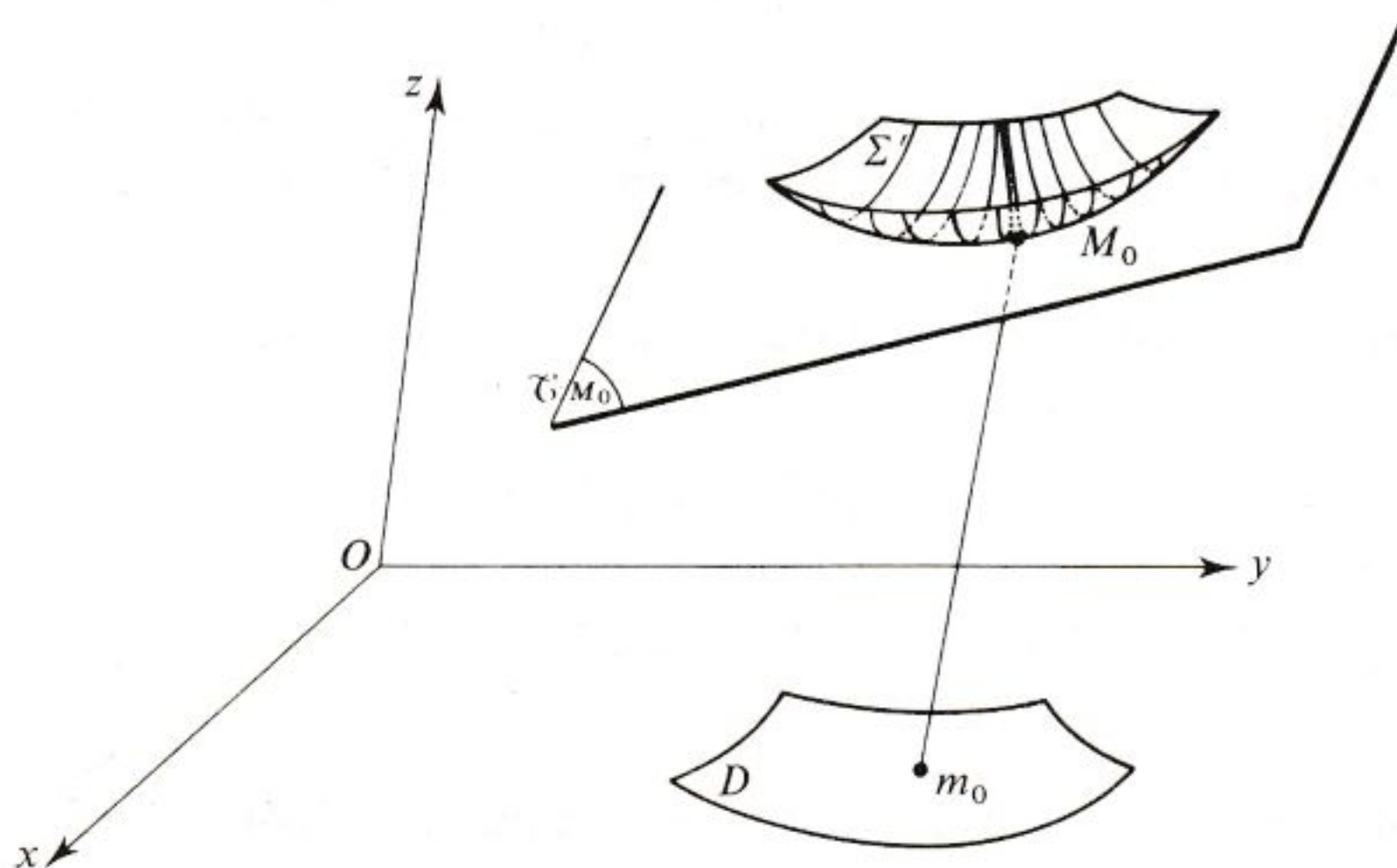


Figura 6. Disposición de balón (punto elíptico).

Se observará que, en este caso, la función f es, en el entorno de m_0 , **convexa** o **cóncava** según que sea $r > 0$ o $r < 0$ (véase tomo 2, VI.2.5).

Segundo caso: La forma Q es no degenerada y no definida. Se dice entonces que el punto M_0 es **hiperbólico**.

Se presenta este caso si, y solamente si, se tiene

$$s^2 - rt > 0.$$

La ecuación $Q(x - x_0, y - y_0) = 0$ define entonces en \mathcal{P} dos rectas distintas l_1, l_2 que pasan por m_0 . Designaremos por S_+ [resp. S_-] al sector de \mathcal{P} constituido por la reunión de $\{m_0\}$ y del conjunto de los puntos $m = (x, y)$ tales que

$$Q(x - x_0, y - y_0) > 0 \quad [\text{resp. } Q(x - x_0, y - y_0) < 0].$$

Sea l una recta que pasa por m_0 y está contenida en el plano \mathcal{P} . Podemos suponer a l definida mediante ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = x_0 + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b \quad (a, b) \neq (0, 0), \lambda \in \mathbf{R};$$

designaremos M_λ [resp. P_λ] por el punto de Σ [resp. \mathcal{C}_{M_0}] que se proyecta en el punto $m_\lambda = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b)$ de l . El punto M_λ está definido para λ suficientemente próximo a 0, y la parametrización $\lambda \mapsto M_\lambda$ define un arco Γ_i trazado sobre Σ ; la tangente a Γ_i en M_0 es la recta de \mathcal{C}_{M_0} definida por la parametrización $\lambda \mapsto P_\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}$).

Según (2), se tiene, para λ suficientemente pequeño:

$$(4) \quad z_{M_\lambda} - z_{P_\lambda} = \frac{\lambda^2}{2} Q(a, b) + o(\lambda^2).$$

Si $Q(a, b) = 0$ (es decir si $l = l_1$ o si $l = l_2$), la relación (4) no proporciona ninguna información acerca del signo de $z_{M_\lambda} - z_{P_\lambda}$.

Si $Q(a, b) \neq 0$, la relación (4) muestra que, para $|\lambda|$ suficientemente pequeño, el número $z_{M_\lambda} - z_{P_\lambda}$ es del mismo signo que $Q(a, b)$, por lo tanto > 0 si $l \subset S_+$, y < 0 si $l \subset S_-$. De ello se deduce:

Si l está contenido en S_+ [resp. S_-], el arco Γ_i queda por encima [resp. por debajo] de \mathcal{C}_{M_0} en el entorno de M_0 y no toca a este plano más que en el punto M_0 .

De manera análoga se establecería el resultado más general que sigue:

Si Γ es un arco simple y regular trazado sobre Σ y que pasa por M_0 , y si la proyección sobre \mathcal{P} de la tangente a Σ en M_0 está contenida en S_+ [resp. S_-], entonces,

en el entorno de M_0 , el arco Γ queda por encima [resp. por debajo] del plano tangente \mathcal{C}_{M_0} , y solamente toca a este plano en M_0 .

La hoja Σ atraviesa por lo tanto a su plano tangente \mathcal{C}_{M_0} en el entorno de M_0 . Se dice que Σ presenta en M_0 el aspecto de **un puerto de montaña o de una silla de montar** (véase la figura 7).

Tercer caso: La forma Q es degenerada. Se dice entonces que el punto M_0 es **parabólico**.

Se presenta este caso si, y solamente si, se tiene

$$s^2 - rt = 0.$$

Este caso precisa de un estudio más delicado y no se puede enunciar un resultado general. Cuando la hoja Σ es de clase C^k , $k \geq 3$, es sin embargo posible dar resultados cualitativos que cubren la mayor parte de los casos. Un caso importante de punto parabólico es el de los puntos de una *superficie reglada desarrollable* (véase § 7).

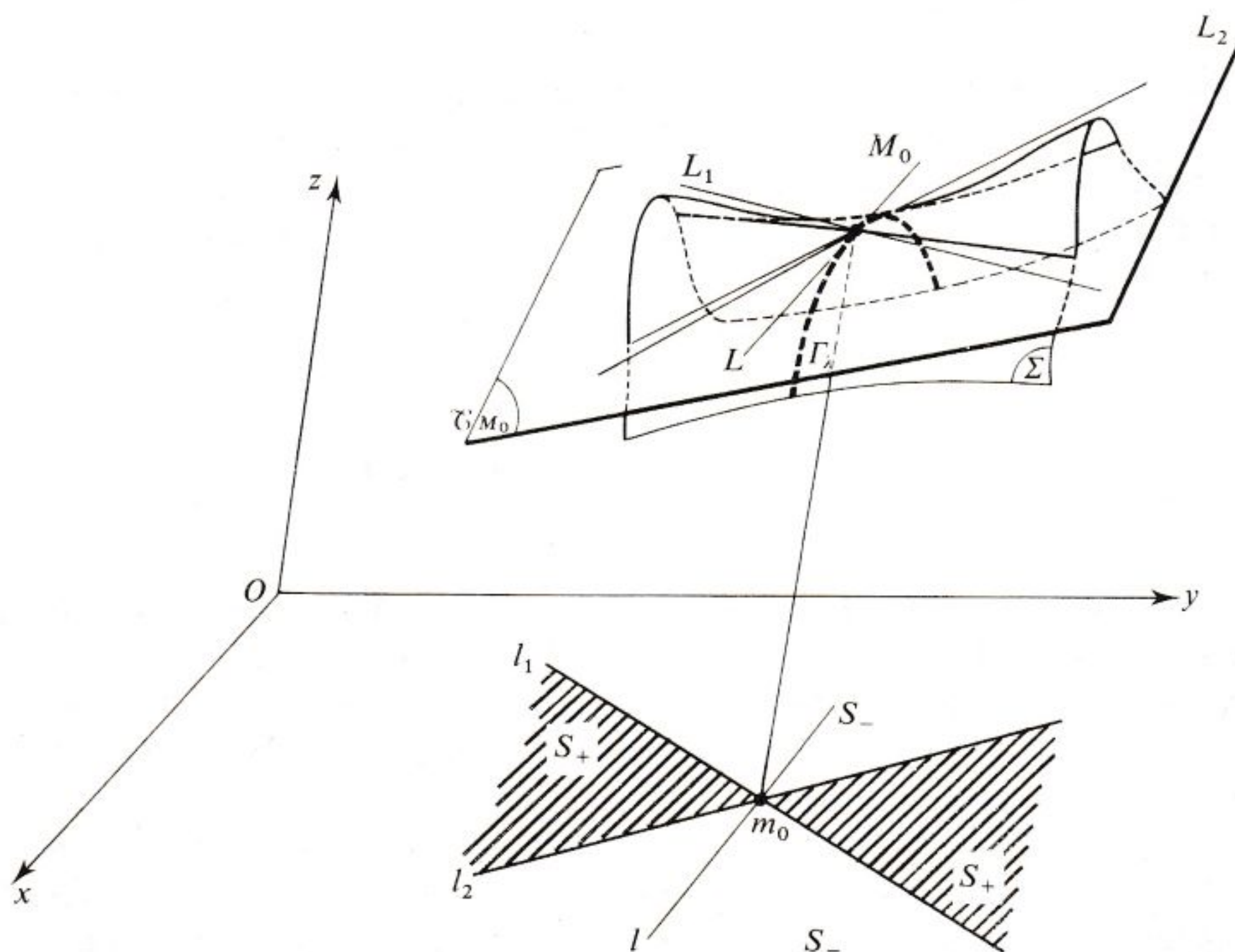


Figura 7. Disposición en puerto o silla de montar (punto hiperbólico)

Tangentes asintóticas

Pongámonos en el caso en que la forma Q es *no definida*, es decir en el caso de un punto *hiperbólico* o *parabólico* M_0 (caso segundo o tercero) *pero no idénticamente nula*, y designemos como siempre por $\{l_1, l_2\}$ el haz de rectas de \mathcal{P} definido por la ecuación

$$Q(x - x_0, y - y_0) = 0$$

(si M_0 es parabólico, se tiene $l_1 = l_2$).

● Las tangentes a Σ en M_0 que se proyectan sobre \mathcal{P} según l_1, l_2 reciben el nombre de **tangentes asintóticas** a Σ en M_0 ; sus direcciones se dice que son las **direcciones asintóticas** de Σ en M_0 .

Según lo que antecede, el haz de tangentes asintóticas queda definido por las ecuaciones

$$Q(x - x_0, y - y_0) = 0, \quad z = z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

y si M es parabólico, este haz se reduce a una recta.

Designemos por \vec{I}, \vec{J} a los vectores tangentes que se proyectan respectivamente según \vec{i}, \vec{j} (son los vectores tangentes a las líneas coordenadas $y = \text{Cte}$, $x = \text{Cte}$ en M_0); para que el vector tangente

$$\vec{V} = \lambda \vec{I} + \mu \vec{J}$$

dirija una de las tangentes asintóticas en M_0 , es necesario y suficiente que se tenga $Q(\lambda, \mu) = 0$, o sea

$$r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2 = 0.$$

Observemos que nos podemos limitar siempre (por aplicación del teorema VIII.3.2) al caso en que M_0 es el origen del sistema de referencia y en que el plano $\mathcal{P} = (M_0; \vec{I}, \vec{J})$ es el plano tangente a Σ en M_0 . En este caso, las tangentes asintóticas son las mismas rectas l_1, l_2 .

Por convenio, si la forma Q es idénticamente nula, toda tangente a Σ en M_0 será considerada como asintótica.

Estudio de la disposición en silla de montar para una hoja de clase C^k , $k \geq 3$

Cuando la hoja Σ es de clase C^k con $k \geq 3$, se pueden completar y precisar los resultados anteriormente obtenidos para un punto en silla y estudiar la intersección de la hoja Σ con el plano tangente \mathcal{T}_{M_0} .

Para ello, mantengamos las notaciones anteriores, suponiendo siempre $s^2 - rt > 0$. La función

$$g(x, y) = z_M - z_P = f(x, y) - \varphi(x, y)$$

tiene las mismas derivadas parciales de orden 2 que f en el punto $(x_0, y_0) = m_0$ y sus derivadas parciales de orden 1 en este punto son nulas.

Según la proposición V.11.3, existen por lo tanto:

- un recinto abierto U de \mathbf{R}^2 que contiene a $(0, 0)$;
- un entorno abierto V de m_0 en \mathcal{P} , contenido en D ;
- un difeomorfismo de clase C^{k-2} : $\Phi : U \rightarrow V$, tales que, para todo $(u, v) \in U$, se tiene

$$g(\Phi(u, v)) = u^2 - v^2.$$

Designemos por d_1, d_2 los segmentos intersecciones de U con las rectas de ecuaciones $u = v$, $u = -v$. Entonces $\gamma_1 = \Phi(d_1)$ y $\gamma_2 = \Phi(d_2)$ son dos arcos simples y regulares del plano \mathcal{P} , contenidos en V y que tienen como tangentes en m_0 a las rectas l_1, l_2 anteriormente definidas (p. 352). Designemos finalmente por Γ_1, Γ_2 a los arcos simples y regulares trazados sobre Σ que se proyectan según γ_1, γ_2 (véase la figura 9). La reunión de los soportes de Γ_1, Γ_2 es el conjunto de los puntos $M = (x, y, z)$ que verifican a la vez

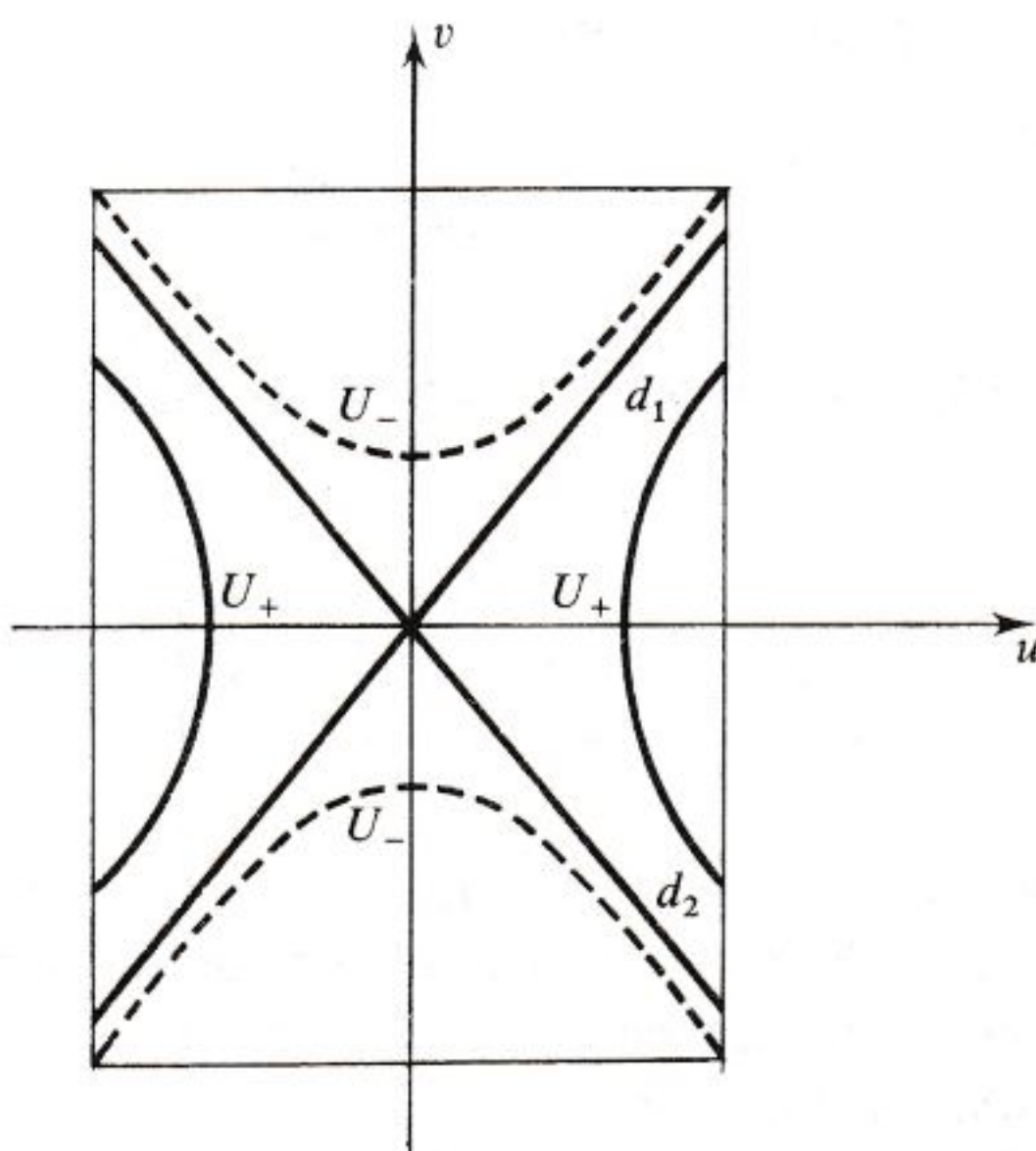


Figura 8.

$$(x, y) \in V, \quad z = f(x, y) \quad \text{y} \quad g(x, y) = 0;$$

en otros términos, son los puntos de $\mathcal{C}_{M_0} \cap \text{sop}(\Sigma)$ cuya proyección pertenece a V . En resumen:

Existe una subhoja de Σ , que contiene a M_0 , cuya intersección con el plano tangente \mathcal{C}_{M_0} se descompone en dos arcos simples y regulares Γ_1, Γ_2 ; y las tangentes a estos arcos en M_0 son las tangentes asintóticas a Σ en M_0 (véase la figura 9).

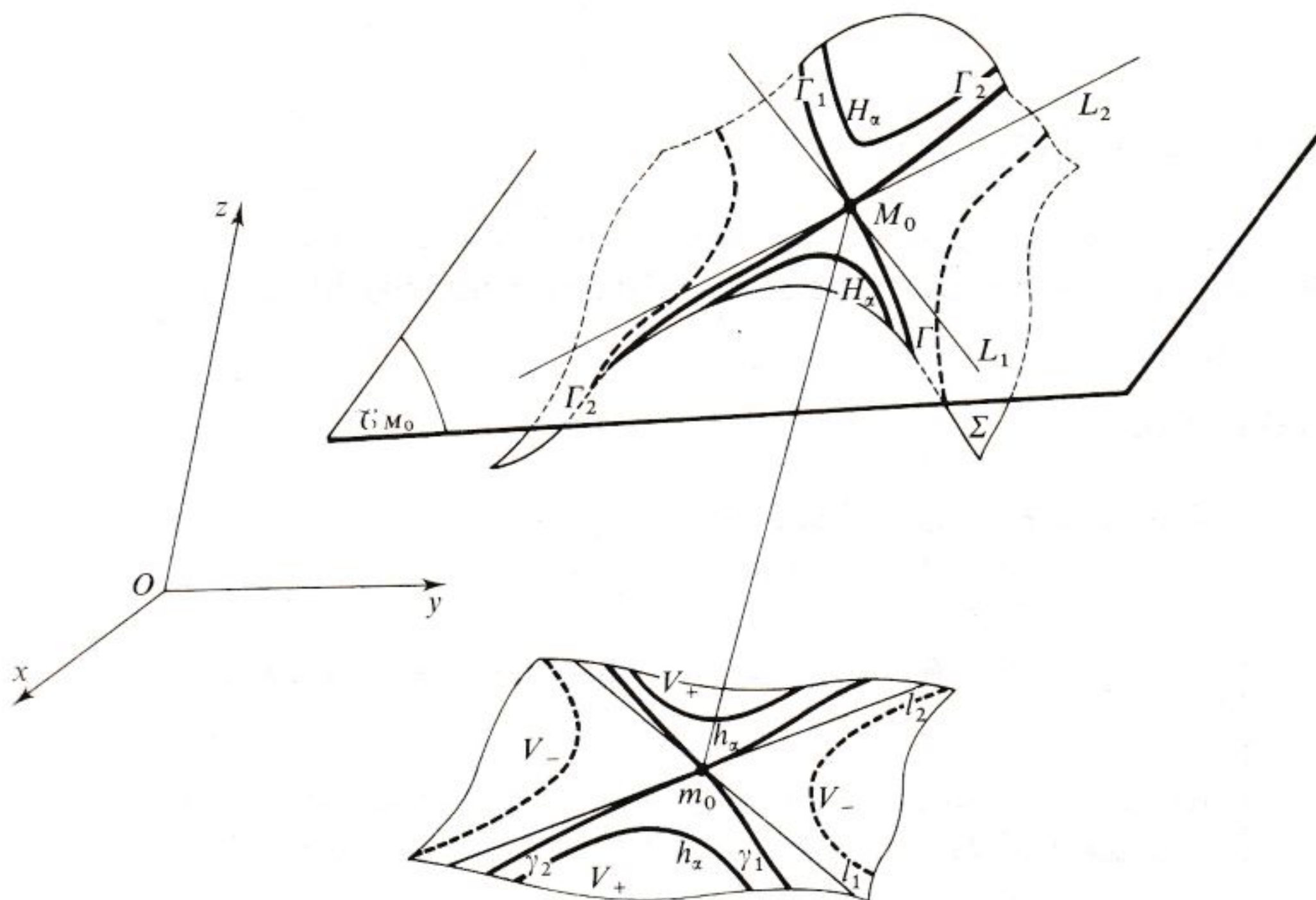


Figura 9.

En un punto de silla, la intersección de una hoja con su plano tangente presenta por lo tanto un *punto doble* cuyas tangentes son las tangentes asintóticas en este punto. Es pues un *punto doble con ramas reales distintas*.

Para terminar, designemos por U_+ [resp. U_-] al conjunto de los puntos $(u, v) \in U$, tales que

$$u^2 - v^2 > 0 \text{ [resp. } u^2 - v^2 < 0],$$

y pongamos $V_+ = \Phi(U_+)$, $V_- = \Phi(U_-)$. La relación $(g \circ \Phi)(u, v) = u^2 - v^2$ muestra inmediatamente que los puntos de Σ cuya proyección pertenece a V_+ [resp. V_-] son los que quedan estrictamente por encima [resp. por debajo] del plano tangente \mathcal{C}_{M_0} (véanse las figuras 8 y 9).

Observación. Sea H_α la sección de Σ por el plano, paralelo a \mathcal{C}_{M_0} , de ecuación

$$z - z_0 - p(x - x_0) - q(y - y_0) = \alpha.$$

Con las notaciones anteriores, H_α es el conjunto de los puntos de Σ que verifican $g(x, y) = \alpha$. Cuando α es suficientemente próximo a 0, la proyección h_α sobre \mathcal{P} es la imagen por Φ del segmento de hipérbola $u^2 - v^2 = \alpha$ contenido en U . Por lo tanto, H_α es la reunión de los soportes de dos arcos simples y regulares de clase C^{k-2} (véase la figura 9).

Haciendo variar α en un entorno de 0, se obtiene de este modo una familia (H_α) de «líneas de nivel» (véase tomo 4 p. 182).

§ VIII.6 SUPERFICIES REGLADAS

No pretendemos aquí hacer una teoría completa y sistemática de las superficies regladas, y nos limitaremos a presentar algunos conceptos básicos indispensables.

Definición VIII.6.1

Una **hoja reglada** de clase C^k ($k \geq 1$) es una hoja geométrica Σ definida por una parametrización de la forma

$$(1) \quad F : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}; (u, v) \mapsto M(u, v) = P(u) + v\vec{K}(u)$$

donde I designa un intervalo abierto de \mathbf{R} y donde $P : I \rightarrow \mathcal{E}$, $\vec{K} : I \rightarrow E$ designan dos funciones de clase C^k en I que verifican

$$(\forall u \in I) \quad \vec{K}(u) \neq 0$$

Es costumbre llamar también superficie reglada a una hoja reglada, si bien es preferible reservar el término de «superficie» para las subvariedades de \mathcal{E} (véase § 8).

● Convendremos aquí en llamar *elemento de superficie reglada* a toda subhoja simple y regular de una superficie reglada.

Propiedades

Volvamos a la parametrización (1).

a) Para cada $u \in I$, la aplicación $v \mapsto P(u) + v\vec{K}(u)$ es una parametrización de una recta afín $\mathcal{G}(u)$, que pasa por el punto $P(u)$, y está dirigida por el vector $\vec{K}(u)$. Las rectas $\mathcal{G}(u)$ reciben el nombre de **generatrices** de Σ .

Si el punto $M = P(u) + v\vec{K}(u)$ es simple, la recta $\mathcal{G}(u)$ es la única generatriz de Σ que pasa por ese punto, y se dice que es *la generatriz de este punto*.

b) El arco C definido por la parametrización $I \rightarrow \mathcal{E}$, $u \mapsto P(u)$ recibe el nombre de **curva directriz** de Σ . A cada cambio de parámetro $\theta : I \rightarrow J$, admisible para C , corresponde el cambio de parámetros, admisible para Σ , definido por

$$I \times \mathbf{R} \rightarrow J \times \mathbf{R}, \quad (u, v) \mapsto (\theta(u), v).$$

c) La hoja cónica de E definida por la parametrización

$$I \times \mathbf{R} \rightarrow E, \quad (u, v) \mapsto v\vec{K}(u),$$

recibe el nombre de **hoja cónica directriz** de Σ , o, simplemente, de **cono director** de Σ .

d) Se tiene, evidentemente

$$\frac{\partial M}{\partial u} = P'(u) + v\vec{K}'(u), \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \vec{K}(u).$$

Si, para un punto $(u, v) \in I \times \mathbf{R}$, los vectores $P'(u) + v\vec{K}'(u)$ y $\vec{K}(u)$ son *independientes*, existe pues una subhoja simple y regular de Σ que contiene al punto $M(u, v)$ y que constituye un *elemento de superficie reglada*.

Ejemplos

1. Las hojas cilíndricas y cónicas (véase § III.5) y las hojas conoides (véase página 187) son hojas regladas.

2. Referido el espacio \mathcal{E} a un sistema afín, sea S el **paraboloide hiperbólico** de ecuación cartesiana:

$$xy = pz \quad (p \neq 0).$$

Este paraboloide S es el soporte de la hoja reglada Σ definida por la parametrización

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{uv}{p};$$

(aquí $\vec{K}(u)$ es el vector de componentes $(0, 1, 1/p)$ y $P(u)$ es el punto de coordenadas $(u, 0, 0)$).

Intercambiando los papeles de u y v , se ve que S es también el soporte de la hoja reglada Σ' definida por el vector $\vec{K}(u)$ de componentes $(1, 0, 1/p)$ y el punto $P(u)$ es el de coordenadas $(0, u, 0)$.

De hecho, Σ y Σ' son la misma hoja geométrica (ya que el cambio de parámetros $(u, v) \mapsto (v, u)$ es admisible). Esta hoja es *simple y regular*.

De manera análoga se estudiaría el *paraboloide hiperbólico* de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

3. Dotado el espacio \mathcal{E} de una estructura euclídea y de un sistema de referencia ortonormal, sea H el hiperboloide de una hoja de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1 \quad (a, b, c \neq 0).$$

H es el soporte de la hoja reglada definida por la parametrización

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= a \cos u - v \sin u, & y &= b \sin u + \frac{b}{a} v \cos u, \\ z &= \frac{c}{a} v & (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Aquí $\vec{K}(u)$ es el vector de componentes $(-\sin u, b/a \cos u, c/a)$ y $P(u)$ es el punto de coordenadas $(a \cos u, b \sin u, 0)$; el cono director es el cono de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

La parametrización (3) es regular en todas partes; se obtiene pues un elemento de superficie reglada al hacer variar (u, v) en un dominio cualquiera D en el

cual esta parametrización sea *inyectiva*. Por ejemplo se puede tomar el dominio $D =]\alpha, \alpha + 2\pi[\times \mathbf{R}$, siendo el real α cualquiera.

Las generatrices de Σ constituyen uno de los sistemas de generatrices de H ; el otro sistema se obtiene al considerar a H como soporte de la hoja reglada Σ' definida por la parametrización

$$(3') \quad \begin{aligned} x &= -a \cos u + v \operatorname{sen} u, & y &= -b \operatorname{sen} u - \frac{b}{a} v \cos u, \\ z &= \frac{c}{a} v & (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Se pasa de (3) a (3') mediante el cambio de parámetros $(u, v) \mapsto (u + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} v, v)$ (lo cual equivale a cambiar v por $-v$ y z por $-z$), y por lo tanto, Σ y Σ' son una misma hoja geométrica.

En el § III.7 hemos dado otras parametrizaciones de H poniendo en evidencia la existencia de dos sistemas de generatrices.

Plano tangente a una superficie reglada

Sea S un elemento de superficie reglada definido por la parametrización

$$(4) \quad (u, v) \mapsto M(u, v) = P(u) + v\vec{K}(u) \quad ((u, v) \in D).$$

Por comodidad en la exposición, supondremos a D de la forma $I \times \mathbf{R}$, donde I es un intervalo abierto de \mathbf{R} .

Sabemos que el plano \mathcal{C}_M tangente a S en el punto $M(u, v)$, está dirigido por los vectores

$$(5) \quad \frac{\partial M}{\partial u} = P'(u) + v\vec{K}'(u), \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \vec{K}(u);$$

y contiene a la generatriz $\mathcal{G}(u)$ que pasa por M . Vamos a estudiar las variaciones de este plano cuando, permaneciendo fijo u , M recorre $\mathcal{G}(u)$.

Primer caso: Los vectores $P'(u)$, $\vec{K}'(u)$ y $\vec{K}(u)$ son linealmente independientes. En este caso, se ve que (para u fijo) la aplicación $v \mapsto \mathcal{C}_{M(u,v)}$ es una aplicación *inyectiva* de \mathbf{R} en el haz de planos \mathcal{F}_u de eje $\mathcal{G}(u)$. En efecto, si se tiene $v_1 \neq v_2$, los vectores $P'(u) + v_1 \vec{K}'(u)$, $P'(u) + v_2 \vec{K}'(u)$ y $\vec{K}(u)$ no son coplanarios.

Introduciendo en \mathcal{F}_u una topología adecuada, se puede demostrar que se tiene

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{M(u,v)} = \mathcal{C}_\infty,$$

donde \mathcal{C}_∞ designa el plano que contiene a $\mathcal{G}(u)$, paralelo al vector $\vec{K}'(u)$. La dirección de \mathcal{C}_∞ es la del plano tangente al *cono director* de S , a lo largo de la generatriz correspondiente. Este plano recibe el nombre de *plano tangente asintótico* a S relativo a la generatriz \mathcal{G}_u .

Si se prolonga la aplicación $v \mapsto \mathcal{C}_{M(u,v)}$ a la *recta proyectiva* $\hat{\mathbf{R}}$ poniendo $\mathcal{C}_{M(u,\infty)} = \mathcal{C}_\infty$, esta aplicación se convierte en una *biyección* de $\hat{\mathbf{R}}$ sobre \mathcal{F}_u .

En consecuencia, *todo plano del haz \mathcal{F}_u , distinto de \mathcal{C}_∞ , es tangente a S en un punto único de \mathcal{G}_u .*

Segundo caso: Los vectores $\vec{K}(u)$, $\vec{K}'(u)$ y $P'(u)$ están ligados.

En este caso, estos vectores constituyen un sistema de rango 2 (ya que, por hipótesis, los vectores $\partial M/\partial u$ y $\partial M/\partial v$ son linealmente independientes en todo punto de S).

Sea entonces T_u el plano vectorial engendrado por los vectores $\vec{K}(u)$, $\vec{K}'(u)$ y $P'(u)$; según (5) se ve que el plano tangente a S , en un punto cualquiera $M(u, v)$ de $\mathcal{G}(u)$, es el plano \mathcal{C}_u , que contiene a $\mathcal{G}(u)$ y es paralelo a T_u . Este plano es por lo tanto fijo.

En conclusión, *para que el plano tangente a S sea el mismo en todo punto de la generatriz $\mathcal{G}(u)$, es necesario y suficiente que los vectores $\vec{K}(u)$, $\vec{K}'(u)$ y $P'(u)$ estén ligados.*

Estudiaremos más adelante (§ 7) el caso en que esto ocurre *para todo valor de u* : se dice en este caso que la superficie reglada S es *desarrollable*.

Caso de las cuádricas

Hemos visto ya que los paraboloides hiperbólicos y las cuádricas de rango 4 de generatrices reales admiten dos sistemas de generatrices; por cada punto M de una tal cuádrica Q , pasa una generatriz y sólo una de cada sistema, siendo estas dos generatrices distintas.

El plano tangente a Q en M es pues el único plano que contiene a estas dos generatrices.

Se puede demostrar que los paraboloides hiperbólicos y las cuádricas de rango 4 de generatrices reales son las únicas superficies regladas que admiten dos sistemas de generatrices, es decir tales que, por cada punto de Σ pasan dos rectas distintas trazadas sobre Σ .

Junto con los conos y los cilindros de segundo grado, son también las únicas superficies *regladas* de segundo grado.

Naturaleza de los puntos de una superficie reglada

Sea S un *elemento de superficie reglada* definido por la parametrización

$$(4) \quad (u, v) \mapsto M(u, v) = P(u) + v \vec{K}(u) \quad ((u, v) \in D).$$

Sabemos que el plano tangente \mathcal{T}_M en el punto $M(u, v)$ contiene a la generatriz $\mathcal{G}(u)$ de M ; existe un segmento de esta generatriz que contiene a M y está contenido en el soporte de S . La intersección del soporte de S con el plano tangente \mathcal{T}_M contiene pues un segmento de recta, y según el estudio hecho en el § 6, se deduce:

*Los puntos de una superficie reglada S de clase C^k ($k \geq 2$) son **hiperbólicos** o **parabólicos** y, en cada punto M de S , la generatriz que pasa por M es una **tangente asintótica**.*

En particular, las tangentes asintóticas en un punto de un paraboloide hiperbólico o de un paraboloide de una hoja son las generatrices que pasan por este punto.

Veremos más adelante que los puntos regulares de una superficie desarrollable son siempre parabólicos (§ IX.3).

§ VIII.7 SUPERFICIES DESARROLLABLES**Definición VIII.7.1**

Sea Σ una **hoja reglada** definida por la parametrización

$$(1) \quad I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (u, v) \mapsto M(u, v) = P(u) + v \vec{K}(u)$$

(véase p. 532). Se dice que Σ es **desarrollable** si, para cada $u \in I$, los vectores $\vec{K}(u)$, $\vec{K}'(u)$ y $P'(u)$ están **ligados**.

El término de *desarrollable* proviene del hecho de que, si \mathcal{E} se halla provisto de una estructura euclídea, toda hoja desarrollable es localmente isométrica a un abierto plano (véase ejercicio VIII.32).

Ejemplos

1. Una hoja cónica de vértice Ω puede estar definida mediante una parametrización de la forma (1) con $P(u) = \Omega$ (de donde $P'(u) = 0$). Del mismo modo,

una hoja cilíndrica puede estar definida mediante una parametrización de la forma (1), con $\vec{K}(u) = \text{Cte}$ (de donde $\vec{K}'(u) = 0$).

Las hojas cónicas y cilíndricas son pues desarrollables.

2. Sea Γ un arco regular de clase C^k ($k \geq 2$) de \mathcal{E} , definido por la parametrización

$$I \rightarrow \mathcal{E}, \quad u \mapsto P(u).$$

Se define una hoja reglada Σ poniendo, para todo $u \in I$ y todo $v \in \mathbf{R}$,

$$(2) \quad M(u, v) = P(u) + vP'(u).$$

Se tiene aquí $\vec{K}(u) = P'(u)$, $\vec{K}'(u) = P''(u)$, lo que demuestra evidentemente que Σ es desarrollable.

Esta hoja Σ se dice que es **la desarrollable de las tangentes** a Γ .

Observemos que se tiene aquí:

$$\frac{\partial M}{\partial u} = P'(u) + vP''(u), \quad \frac{\partial M}{\partial v} = P'(u).$$

Para que el punto $M(u, v)$ sea *regular*, es necesario y suficiente que los vectores $P'(u)$ y $P''(u)$ sean linealmente independientes (es decir que $P(u)$ no sea un punto de inflexión de Γ) y que se tenga $v \neq 0$ (es decir que M sea distinto de $P(u)$). Resulta que **el plano tangente en $M_a \Sigma$ es el plano osculador en $M_a \Gamma$** .

El arco Γ es pues, para Σ , una línea de puntos singulares, que es la **arista de retroceso** de Σ (véase más adelante).

Se demuestra fácilmente que todo arco regular C trazado sobre Σ y que corta al arco Γ en un punto M_0 , es tangente a Γ en M_0 .

En efecto, un tal arco C está definido por una parametrización de la forma:

$$t \mapsto M(t) = P[u(t)] + v(t) P'[u(t)],$$

siendo las funciones $t \mapsto u(t)$ y $t \mapsto v(t)$ derivables; se tiene:

$$\frac{dM}{dt} = [u'(t) + v'(t)] \frac{dP}{du} + v(t) \frac{d^2P}{du^2}$$

lo cual implica que dM/dt es colineal con dP/du si $v(t) = 0$.

Vamos a demostrar ahora que, con hipótesis de regularidad suficientes, los ejemplos anteriores permiten clasificar (localmente) a todas las hojas desarrollables. Consideremos una *hoja desarrollable* Σ de clase C^k ($k \geq 3$) definida por la parametrización

$$(1) \quad I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, (u, v) \mapsto M(u, v) = P(u) + v\vec{K}(u) \quad (\vec{K}(u) \neq 0)$$

y limitémonos al caso en que el rango del sistema formado por los vectores $\vec{K}(u)$ y $\vec{K}'(u)$ es independiente de u . Tenemos que distinguir entonces dos casos:

Primer caso: Los vectores $\vec{K}(u)$ y $\vec{K}'(u)$ están ligados para todo $u \in I$.

En este caso, existe una función numérica λ , de clase C^{k-1} en I que verifica

$$(\forall u \in I) \quad \vec{K}'(u) = \lambda(u) \vec{K}(u).$$

De ahí se deduce, designando por u_0 un elemento cualquiera de I :

$$\vec{K}(u) = F(u) \vec{K}(u_0),$$

con

$$F(u) = \exp\left(\int_{u_0}^u \lambda(t) dt\right).$$

Siendo el vector $\vec{K}(u)$ proporcional a un vector fijo, se ve que Σ es entonces una *hoja cilíndrica*.

Segundo caso: Los vectores $\vec{K}(u)$ y $\vec{K}'(u)$ son linealmente independientes para todo $u \in I$.

En este caso el sistema $(\vec{K}(u), \vec{K}'(u), P'(u))$ es de rango 2 para todo $u \in I$ (ya que, por hipótesis, este sistema es de rango ≤ 2).

Existe entonces un par único (λ, μ) de funciones numéricas definidas en I , tal que

$$(\forall u \in I) \quad \vec{P}'(u) = \lambda(u) \vec{K}(u) + \mu(u) \vec{K}'(u).$$

Calculando λ y μ con ayuda de un sistema de referencia cualquiera, se ve fácilmente que son funciones de clase C^{k-1} .

De las relaciones

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \vec{P}'(u) + v\vec{K}'(u), \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \vec{K}(u),$$

se deduce que, si $u \in I$ es fijo, existe un valor y solo uno de v tal que los vectores $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ están ligados, a saber:

$$v = -\mu(u).$$

Por definición, el arco Γ de clase C^{k-1} definido por

$$u \mapsto P(u) - \mu(u) \vec{K}(u) \quad (u \in I)$$

recibe el nombre de **arista de retroceso de la hoja** Σ .

Para estudiar el papel de la arista de retroceso nos limitaremos a estudiar dos casos:

a) La función $u \mapsto P(u) - \mu(u) \vec{K}(u)$ es constante (es decir, el soporte de Γ se reduce a un punto Ω). Derivando se ve que este caso se presenta si, y solamente si, se tiene

$$(\forall u \in I) \quad \lambda(u) = \mu'(u).$$

La parametrización dada (1) se reduce entonces a

$$(u, v) \mapsto \Omega + (\mu(u) + v) \vec{K}(u).$$

Mediante un cambio de parámetros, se ve que Σ es una **hoja cónica** de vértice Ω .

b) El arco Γ es regular. Derivando se ve que este caso se presenta si, y solamente si, se tiene

$$\lambda(u) - \mu'(u) \neq 0 \quad \text{para todo } u \in I;$$

en efecto, si ponemos

$$Q(u) = P(u) - \mu(u) \vec{K}(u),$$

se tiene

$$Q'(u) = (\lambda(u) - \mu'(u)) \vec{K}(u).$$

En este caso, se tiene

$$(3) \quad (\forall u \in I, \forall v \in \mathbf{R}) \quad M(u, v) = Q(u) + wQ'(u),$$

con

$$(4) \quad w = \frac{\mu(u) + v}{\lambda(u) - \mu'(u)}.$$

Para cada $u \in I$, la aplicación $v \mapsto w$ definida por (4) es una biyección afín de \mathbf{R} en \mathbf{R} . De donde se deduce que la aplicación de $I \times \mathbf{R}$ en sí mismo definida por

$$(u, v) \mapsto \left(u, \frac{\mu(u) + v}{\lambda(u) - \mu'(u)} \right)$$

es un difeomorfismo de clase C^{k-2} y se puede considerar como un cambio de parámetros en la hoja de clase C^{k-2} definida por la parametrización dada (1). Ahora bien, la parametrización (3) que se deduce de (1) mediante este cambio de parámetros, es la de la desarrollable de las tangentes a Γ .

La hoja dada Σ se identifica pues, salvo clases de diferenciabilidad, a la desarrollable constituida por las tangentes a su arista de retroceso.

Esta identificación es completa si Σ es de clase C^∞ .

En la práctica, si se tiene que estudiar una hoja desarrollable, se empieza por determinar el rango del sistema $(\vec{K}(u), \vec{K}'(u))$. Si, para un valor de u , este rango es igual a 2, existe un único valor de v tal que el vector $P'(u) + v\vec{K}'(u)$ es colineal con el vector $\vec{K}(u)$. El punto $Q(u) = P(u) + v\vec{K}(u)$ así obtenido es un *punto estacionario* de Σ , al que se da el nombre de **punto característico** de la generatriz $G_u = (P(u), \vec{K}(u))$.

Si existe un intervalo J en el cual el rango del sistema $(\vec{K}(u), \vec{K}'(u))$ permanece igual a 2, el punto $Q(u)$ (donde u recorre J) describe la arista de retroceso de la desarrollable correspondiente (a menos que el punto $\varphi(u)$ no sea fijo, en cuyo caso, la hoja Σ es cónica).

§ VIII.8 INMERSIONES. SUBVARIEDADES

Para terminar este capítulo, vamos a dar algunas indicaciones acerca del concepto de *subvariedad de dos dimensiones* de \mathcal{E} . Si bien este concepto no figura en el programa, resulta necesario tener de él por lo menos una idea aproximada si se quiere enlazar con el concepto conjuntista de *superficie* definida mediante una ecuación cartesiana (véase cap. III). Es importante saber que, aunque la esfera no sea soporte de ninguna hoja parametrizada regular, es sin embargo una subvariedad regular de \mathcal{E} .

Por otra parte, el concepto de subvariedad es indispensable para la teoría de la integración (véase tomo 4, cap. VI).

La relación entre los conceptos de hoja y de variedad es proporcionado por la teoría de las *inmersiones*. Empezaremos pues por este concepto.

Inmersiones

Sea $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ una parametrización de una hoja Σ y sea $S = F(D)$ el soporte de Σ , provisto de la topología inducida por la topología de \mathcal{E} .

Si F realiza un homeomorfismo de D en S , entonces cualquier otra parametrización admisible de Σ realiza también un homeomorfismo de su dominio de

definición en S (ya que los cambios de parámetro admisibles son homeomorfismos, y el compuesto de dos homeomorfismos es un homeomorfismo). Establecemos la siguiente

Definición VIII.8.1

- a) Una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ se dice que es una **inmersión** si admite, en todo punto de D , una diferencial de rango 2 y si la aplicación $\bar{F} : D \rightarrow F(D)$, $m \mapsto F(m)$ es un **homeomorfismo** de D en el subespacio topológico $F(D)$ de \mathcal{E} .
- b) Una hoja geométrica Σ se dice que está **inmersa** en \mathcal{E} si sus parametrizaciones admisibles son inmersiones.

Según lo que antecede, para que una hoja Σ esté inmersa en \mathcal{E} , es necesario que una de sus parametrizaciones sea una inmersión. Una tal hoja es evidentemente regular y simple (ya que un homeomorfismo es, por definición, biyectivo).

Por extensión de los resultados del § V.3, se deduce fácilmente

VIII.8.1 Toda hoja de clase C^k ($k \geq 1$) que admite una parametrización cartesiana está inmersa en \mathcal{E} .

Demostración. En un sistema de referencia adecuado, una tal hoja Σ está definida mediante una parametrización de la forma $F : D \rightarrow \mathcal{E}$, $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$, siendo la función f de clase C^k en D . El punto $m = (x, y)$ no es otro que la proyección, sobre el plano $(O; x, y)$, paralelamente a Oz , del punto $M = F(x, y)$. La aplicación $\bar{F} : D \rightarrow F(D)$, $M \mapsto F(m)$, admite pues como recíproca la restricción a $F(D)$ de la proyección $p : (x, y, z) \mapsto (x, y)$. Al ser las aplicaciones \bar{F} y p continuas, se deduce que \bar{F} es un homeomorfismo. Sabemos ya por otra parte que Σ es regular (véase VIII.3.2).]

El teorema VIII.3.3 prueba entonces que toda hoja regular de \mathcal{E} es una reunión de hojas *inmersas* en \mathcal{E} .

Caracterización de las hojas inmersiones por su soporte

El teorema que sigue es el análogo del teorema V.3.5:

Teorema VIII.8.2

Para que dos hojas geométricas de clase C^k ($k \geq 1$) inmersiones en \mathcal{E} sean iguales, es necesario y suficiente que tengan el mismo soporte.

Demostración. La condición es evidentemente necesaria. Recíprocamente, sean Σ, Σ' dos hojas de clase C^k de \mathcal{E} , definidas respectivamente mediante las inmersiones

$$F : D \rightarrow \mathcal{E}, \quad \Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{E},$$

con el mismo soporte $S = F(D) = \Phi(\Delta)$. Por hipótesis las aplicaciones

$$\bar{F} : D \rightarrow S, \quad m \mapsto F(m) \quad \text{y} \quad \bar{\Phi} : \Delta \rightarrow S, \quad m \mapsto \Phi(m)$$

son homeomorfismos. La aplicación compuesta $\theta = \bar{F}^{-1} \circ \bar{\Phi} : \Delta \rightarrow D$ es pues un homeomorfismo que verifica $F \circ \theta = \Phi$; para demostrar que $\Sigma' = \Sigma$ basta con demostrar que θ y θ^{-1} son de clase C^k (ya que ello probará que las aplicaciones F y Φ son C^k -equivalentes); con esto nos vemos llevados a un problema *local*.

Designemos por μ_0 un punto cualquiera de D , por F_i y Φ_i ($i = 1, 2, 3$) las coordenadas respectivas de F y Φ en un sistema de referencia afín dado de \mathcal{E} . Intercambiando si es preciso las coordenadas, se puede suponer que las relaciones

$$(1) \quad x = F_1(u, v); \quad y = F_2(u, v)$$

definen un cambio de parámetros admisible en un entorno V_0 del punto $m_0 = \theta(\mu_0)$ (véase teorema VIII.3.3). En otros términos, la aplicación

$$f : (u, v) \mapsto (F_1(u, v), F_2(u, v))$$

es un difeomorfismo de clase C^k de V_0 en $\varphi(V_0)$.

Se tiene, por construcción,

$$F_1 \circ \theta = \Phi_1 \quad \text{y} \quad F_2 \circ \theta = \Phi_2,$$

de donde

$$f \circ \theta_0 = \varphi,$$

designando por θ_0 la restricción de θ a $\theta^{-1}(V_0)$ y por φ la aplicación

$$\theta^{-1}(V_0) \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto (\Phi_1(\alpha, \beta), \Phi_2(\alpha, \beta)).$$

Se tiene pues $\theta_0 = f^{-1} \circ \varphi$ y puesto que φ es de clase C^k lo mismo que f^{-1} , esto demuestra que θ es de clase C^k .

Ahora bien, al ser θ continua, el conjunto $\theta^{-1}(V_0)$ es un entorno de $\mu_0 = \theta^{-1}(m_0)$. Hemos demostrado pues de este modo que cada punto μ_0 de Δ admite un entorno en el cual θ es de clase C^k , y de ahí resulta que θ es de clase C^k en Δ .

Intercambiando Σ con Σ' , se establecería del mismo modo que θ^{-1} es de clase C^k ; de donde el resultado.]]

Observación. Lo mismo que para los arcos, se pueden obtener ejemplos de hojas simples y regulares distintas con el mismo soporte.

Subvariedades de \mathcal{E}

Definición VIII.8.2

De una parte S de \mathcal{E} se dice que es **una subvariedad de dimensión 2 de \mathcal{E}** (o, simplemente, **una superficie**) de clase C^k si cada punto M de S admite en \mathcal{E} un entorno V tal que $V \cap S$ sea el soporte de una hoja de clase C^k inmersa en \mathcal{E} .

Según el teorema VIII.3.3, esto equivale a decir: S es una superficie de clase C^k si cada punto M de S admite un entorno V tal que el conjunto $S \cap V$ admite, en un sistema de referencia adecuado \mathcal{R} , una ecuación cartesiana de la forma $z = f(x, y)$, siendo la función f de clase C^k .

Se puede incluso, sin restringir esta definición, imponer que el sistema de referencia \mathcal{R} pueda deducirse, mediante una permutación de los vectores de base, de un sistema de referencia arbitrariamente dado \mathcal{R}_0 (véase VIII.3.4).

Una superficie de \mathcal{E} es pues la reunión «de elementos de superficie» definidos en un sistema de referencia dado, mediante ecuaciones de la forma

$$z = f(x, y) \quad \text{o} \quad x = g(y, z) \quad \text{o} \quad y = h(z, x).$$

Se comprueba fácilmente que las esferas de un espacio afín euclídeo y, con más generalidad, las cuádricas no reducidas a conos, son *superficies*.

De un modo más general, del teorema VI.3.4 del tomo 2 se deduce inmediatamente:

Teorema VIII.8.3

Sea F una función numérica de clase C^k ($k \geq 1$) en un abierto Ω de \mathcal{E} , cuya diferencial no sea nula. Entonces, el conjunto S de los puntos $M \in \Omega$ que verifican $F(M) = 0$ es una subvariedad de clase C^k y de dimensión 2 de \mathcal{E} .

Se dice para abreviar que S es la superficie definida implícitamente por la ecuación $F(M) = 0$.

Con las hipótesis del teorema VIII designemos por $f(x, y, z)$ el valor de F en el punto de coordenadas (x, y, z) en un sistema de referencia dado \mathcal{R} de \mathcal{E} . De acuerdo con el estudio realizado en el § VII del tomo 2, sabemos además que el plano tangente a S en el punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) admite en \mathcal{R} la ecuación cartesiana

$$(x-x_0) f'_x(x_0, y_0, z_0) + (y-y_0) f'_y(x_0, y_0, z_0) + (z-z_0) f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Con las notaciones utilizadas aquí, equivale a decir que el plano tangente a S en el punto M_0 está definido por la ecuación:

$$DF_{M_0} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0.$$

Contacto de un arco y de una variedad

Por definición, cualquier punto de una superficie S admite, en S , un entorno definido por una ecuación cartesiana de la forma $z = f(x, y)$.

Para el estudio local de las superficies, nos podemos pues limitar al caso de variedades definidas por una ecuación de la forma $F(M) = 0$, siendo la función F de clase C^k en un abierto Ω de \mathcal{E} y verificando

$$(\forall M \in \Omega) \quad DF_M \neq 0.$$

Sea entonces S una tal variedad y sea γ un arco geométrico simple y regular de clase C^k que pasa por un punto M_0 de S . Supongamos a γ definido por una parametrización $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $\varphi(t_0) = M_0$.

Designando por p un entero $\leq k$ diremos que S y γ tienen, en M_0 , un contacto de orden igual a p por lo menos si se tiene

$$F[\varphi(t)] = o[(t - t_0)^p].$$

Para ello, es necesario y suficiente que la función compuesta $F \circ \varphi$ verifique

$$\frac{d}{dt} (F \circ \varphi)_{t_0} = 0 \dots \frac{d^p}{dt^p} (F \circ \varphi)_{t_0} = 0.$$

• Si $p = 1$, se dice que S y γ son *tangentes*. En este caso, la condición impuesta equivale en efecto a $DF_{M_0} \cdot \varphi'(t_0) = 0$, y equivale a decir que la tangente a γ en M_0 está contenida en el plano tangente a S en M_0 .

• Si S y γ tienen un contacto de orden ≥ 2 , se dice que S es *osculatriz* a γ .

• Si S y γ tienen un contacto de orden ≥ 3 , se dice que S es *sobreosculatriz* a γ .

En el caso en que S sea una esfera, nos encontramos de nuevo con las definiciones dadas en el § VI.10.

De manera análoga se puede definir el contacto de una hoja y de una superficie de \mathcal{E} .

Capítulo IX

Propiedades métricas de las superficies

Introducción

En este capítulo, designaremos siempre por \mathcal{E} un **espacio afín euclídeo orientado de dimensión 3** y por E el *espacio vectorial euclídeo* asociado.

Todas las *hojas* que se consideren se supondrán de clase C^k , con $k \geq 1$, y regulares (véase § VIII.3). Según el teorema VIII.3.3, el estudio de tales hojas se reduce localmente al de una hoja *simple* definida por una parametrización cartesiana. Asimismo, en todas las cuestiones teóricas, nos limitaremos al caso de hojas *simples*, lo que nos permitirá hablar sin ambigüedad de «punto» de una hoja. Entiéndase bien que en las aplicaciones prácticas no siempre resulta fácil comprobar que una hoja dada es simple. Por abuso de lenguaje hablaremos del «punto» $M(u, v)$, entendiéndose que esta expresión resulta correcta cuando se sustituye la hoja dada por una *subhoja* adecuada. Este abuso de lenguaje no va a originar aquí dificultad alguna, ya que al igual que en el capítulo IX nos limitamos a un estudio *local* de las hojas. Todos los conceptos que referiremos a un punto M de una hoja simple Σ (formas fundamentales, sistema de referencia de Darboux, curvatura normal o geodésica, torsión geodésica, etc...) permanecen invariantes si se sustituye Σ por una *subhoja* de Σ que contenga a M .

§ IX.1 PRIMERA FORMA CUADRÁTICA FUNDAMENTAL

Definición IX.1.1

Sea T_M el plano vectorial tangente a una hoja Σ en un punto M . La restricción a T_M de la forma cuadrática

$$\vec{V} \mapsto \|\vec{V}\|^2 \quad (\vec{V} \in E)$$

recibe el nombre de **primera forma cuadrática fundamental** de Σ en M .

La primera forma fundamental de Σ en M es pues una *forma cuadrática* en T_M , que designaremos por Φ_1^M (o simplemente por Φ_1 si no hay peligro de confusión). Vamos a buscar su expresión en la base $(\partial M/\partial u, \partial M/\partial v)$ de T_M asociada a una parametrización dada de Σ .

Expresión de Φ_1

Sea $F : D \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \mapsto M(u, v)$ una parametrización admisible de Σ . En el punto $M = M(u, v)$ el plano vectorial tangente T_M está dirigido por los vectores

$$\frac{\partial M}{\partial u} = F'_u(u, v), \quad \frac{\partial M}{\partial v} = F'_v(u, v).$$

Para cada vector

$$\vec{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v}$$

de T_M se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_1^M(\vec{V}) &= \|\vec{V}\|^2 = \left\| \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \lambda^2 + 2 \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \lambda \mu + \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 \mu^2 \end{aligned}$$

Se suele poner

$$(1) \quad \boxed{E = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v}, \quad G = \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2.}$$

Si Σ es de clase C^k ($k \geq 1$), las funciones E, F, G son de clase C^{k-1} en D . En la base $(\partial M/\partial u, \partial M/\partial v)$, la forma Φ_1^M tiene pues por expresión

$$(2) \quad \boxed{\Phi_1^M(\vec{V}) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2},$$

designando por (λ, μ) las componentes de \vec{V} en esta base.

Se suele escribir la relación (2) en la forma «diferencial»:

$$\boxed{\Phi_1^M(dM) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

poniendo

$$dM = \frac{\partial M}{\partial u} du + \frac{\partial M}{\partial v} dv.$$

Observación. Las funciones E, F, G pueden ser definidas para toda hoja de clase C^k ($k \geq 1$), no necesariamente regular. La forma cuadrática $(\lambda, \mu) \mapsto E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$ es evidentemente *positiva* y es *definida* si, y solamente si, los vectores $\partial M/\partial u, \partial M/\partial v$ son independientes, es decir si M es *regular*. Se tiene pues siempre

$$(3) \quad EG - F^2 \geq 0,$$

cumpléndose la igualdad $EG - F^2 = 0$ solamente si M es *estacionario* (véase § VIII.4).

Ponemos

$$\boxed{H = \sqrt{EG - F^2}},$$

de donde, al estar \mathcal{E} orientado (véase § II.2)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 &= \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 - \left(\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \right)^2 \\ &= EG - F^2 = H^2, \end{aligned}$$

o sea

$$\boxed{H = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\|}.$$

La función H así definida es de clase C^{k-1} en D ; es positiva y solamente se anula en un punto (u, v) de D si $M(u, v)$ es un punto estacionario de Σ . La vamos a utilizar en el tomo 4 (§ V.8) para definir el área de Σ .

Longitud de un arco trazado sobre Σ

Sea como siempre Σ la hoja de clase C^k ($k \geq 1$) definida por la parametrización $F: D \rightarrow \mathcal{E}$ y sea Γ un arco trazado sobre Σ . Supondremos que Γ es la imagen por F del arco plano γ definido por la parametrización de clase C^p ($p \geq 1$)

$$I \rightarrow D, \quad t \mapsto (u(t), v(t)).$$

Entonces Γ está definido por la parametrización

$$\varphi: I \rightarrow \mathcal{E}, \quad t \mapsto F[u(t), v(t)],$$

y se tiene (con las notaciones anteriores)

$$\varphi'(t) = u'(t) \frac{\partial M}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial M}{\partial v},$$

de donde

$$\|\varphi'(t)\|^2 = Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t).$$

Si $I = [a, b]$ es un intervalo compacto, la longitud de Γ es, pues

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt,$$

o sea, simbólicamente

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Si Γ es regular, todo parámetro normal s de Γ verifica

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2},$$

o sea, simbólicamente (poniendo $du = u'(t) dt$ y $dv = v'(t) dt$)

$$(4) \quad \boxed{ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Esta relación permite considerar la hoja Σ como una *variedad riemanniana* de dimensión 2, cuyo « ds^2 », en el «sistema de coordenadas u, v » viene dado por (4) [véase 13].

Para traducir este hecho, se suele decir que la primera forma fundamental de una hoja representa «el ds^2 de esta hoja».

Ortogonalidad de dos vectores tangentes

Mantengamos como siempre las mismas notaciones y designemos por

$$\vec{V}_1 = \lambda_1 \frac{\partial M}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial M}{\partial v}, \quad \vec{V}_2 = \lambda_2 \frac{\partial M}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial M}{\partial v}$$

dos vectores tangentes en M a la hoja Σ , *supuesta regular*. Se tiene:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = E\lambda_1 \lambda_2 + F(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + G\mu_1 \mu_2;$$

o sea

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = B_1^M(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

designando por B_1^M la **forma bilineal simétrica** asociada a la forma cuadrática fundamental Φ_1^M (lo que se podía prever teóricamente ⁽¹⁾).

La condición de ortogonalidad de \vec{V}_1, \vec{V}_2 es pues:

$$(5) \quad \boxed{E\lambda_1 \lambda_2 + F(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + G\mu_1 \mu_2 = 0}.$$

Aplicación

Consideremos dos arcos regulares Γ_1, Γ_2 trazados sobre Σ que pasan por el punto $M = M(u, v)$, definidos respectivamente dando las funciones:

$$t \mapsto (u_1(t), v_1(t)), \quad t \mapsto (u_2(t), v_2(t))$$

tales que $u_1(t_0) = u_2(t_0) = u, v_1(t_0) = v_2(t_0) = v$.

Para que estos arcos sean *ortogonales* en el punto M , es necesario y suficiente que los vectores (tangentes respectivamente a estos arcos).

⁽¹⁾ Sea en efecto Q una forma cuadrática en un espacio vectorial E y sea B la forma bilineal asociada a Q . Si Q_1 designa la restricción de Q a un subespacio E_1 de E , entonces la restricción B_1 de B a $E_1 \times E_1$ es la forma bilineal simétrica asociada a Q_1 .

$$\vec{V}_1 = u'_1(t_0) \frac{\partial M}{\partial u} + v'_1(t_0) \frac{\partial M}{\partial v}, \quad \vec{V}_2 = u'_2(t_0) \frac{\partial M}{\partial u} + v'_2(t_0) \frac{\partial M}{\partial v}$$

sean ortogonales. Introduciendo las diferenciales

$$du_i = u'_i(t_0) dt, \quad dv_i = v'_i(t_0) dt \quad (i = 1, 2),$$

donde dt designa un real cualquiera, se ve que la condición de ortogonalidad de Γ_1 y Γ_2 se escribe

$$E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2 = 0.$$

Caso de una parametrización cartesiana

Supongamos que la hoja Σ esté definida en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E} , por la ecuación cartesiana

$$z = f(x, y),$$

donde f designa una función numérica de clase C^k en un dominio plano D . Podemos considerar que Σ está definida por la parametrización $D \rightarrow \mathcal{E}$, $(x, y) \mapsto M(x, y)$, donde $M(x, y)$ designa el punto de coordenadas $(x, y, f(x, y))$; las componentes de los vectores $\partial M / \partial x$ y $\partial M / \partial y$ son, respectivamente $(1, 0, p)$ y $(0, 1, q)$ con $p = f'_x(x, y)$, $q = f'_y(x, y)$, de donde

$$\begin{aligned} E &= \left\| \frac{\partial M}{\partial x} \right\|^2 = 1 + p^2 & G &= \left\| \frac{\partial M}{\partial y} \right\|^2 = 1 + q^2 \\ F &= \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = pq \end{aligned}$$

La primera forma fundamental de Σ es pues

$$\Phi_1^M \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial x} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} \right) = (1 + p^2) \lambda^2 + 2pq\lambda\mu + (1 + q^2) \mu^2.$$

Diremos simplemente que el ds^2 de Σ para la parametrización considerada es

$$ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2.$$

Observemos que se tiene aquí: $EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2$, de donde

$$H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

§ IX.2 NORMAL. SISTEMA DE REFERENCIA DE DARBOUX

Normal

Sea como siempre Σ una hoja simple de clase C^k ($k \geq 1$) de \mathcal{E} , definida por la parametrización $F: D \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \mapsto M(u, v)$. Para cada punto $m = (u, v)$ de D , pondremos

$$(1) \quad \vec{N}(u, v) = \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}.$$

Con las notaciones del § anterior, se tiene

$$(2) \quad \|\vec{N}(u, v)\| = H(u, v) \quad \text{con} \quad H = \sqrt{EG - F^2}.$$

y el punto $M(u, v)$ es regular si, y solamente si, se tiene $\vec{N}(u, v) \neq 0$.

Designemos por $\theta: D_1 \rightarrow D$, $(u_1, v_1) \rightarrow (u, v)$ un cambio de parámetros admisible en Σ , y por $J_\theta = \frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)}$ su jacobiano. Se tiene ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \vec{N}_1(u_1, v_1) &= \frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial v_1} \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u_1} \right) \wedge \left(\frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v_1} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v_1} \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial v}{\partial u_1} \frac{\partial u}{\partial v_1} \right) \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}, \end{aligned}$$

o sea:

$$(3) \quad \vec{N}_1(u_1, v_1) = J_\theta(u_1, v_1) \vec{N}(u, v).$$

⁽¹⁾ Para simplificar, designamos aquí por (u, v) las componentes de la aplicación θ .

Si el punto $M = F(u, v)$ es regular, la *dirección* del vector $\vec{N}(u, v)$ no depende pues de la parametrización F elegida. Esta dirección es por otra parte la de la perpendicular en M al plano tangente a Σ en M .

El vector $\vec{N}(u, v)$ definido por (1) será denominado **vector normal** a Σ en M asociado a la parametrización F ; la recta afín que pasa por M y es ortogonal al plano \mathcal{C}_M (dirigida por lo tanto por el vector \vec{N}) recibe el nombre de **normal** en M a Σ ; todo plano que contenga a esta recta se dice que es *normal* a Σ en M .

Normal orientada

Supongamos como siempre que M es regular. La relación (3) muestra que los vectores colineales \vec{N} y \vec{N}_1 tienen el mismo sentido si, y solamente si, es $J_\theta(u_1, v_1) > 0$.

Resulta de ahí que el vector unitario

$$(4) \quad \vec{h}(u, v) = \frac{\vec{N}(u, v)}{H(u, v)}$$

permanece invariante en todo cambio de parámetro θ de jacobiano positivo. En otros términos: *el vector $\vec{h}(u, v)$ depende solamente de la orientación de Σ definida por la parametrización elegida; se cambia en su opuesto cuando se cambia la orientación de Σ por su opuesta.*

A cada punto M de una hoja Σ simple, regular y orientada, se puede asociar pues un vector unitario normal \vec{h}_M que, en toda parametrización admisible de Σ , está definido por:

$$\vec{h}_M = \frac{1}{H} \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}.$$

Este vector \vec{h}_M será llamado *vector unitario normal en M a la hoja orientada Σ .*

Se observará que *el vector \vec{h}_M queda cambiado por su opuesto al cambiar la orientación de \mathcal{C} , o si se intercambian las variables u, v .*

Desde un punto de vista práctico, resulta útil destacar que *la elección de una orientación de una hoja simple y regular Σ equivale a elegir una orientación sobre una de las normales a Σ (deduciéndose la orientación de las restantes normales a Σ por continuidad).*

Sea S el soporte de Σ ; del estudio anterior se deduce que existen exactamente *dos aplicaciones continuas $\vec{v} = S \rightarrow E$ tales que, para todo $M \in S$, $\vec{v}(M)$ sea un vector unitario normal en M a Σ .* Con las notaciones anteriores, estas aplicaciones con $M \rightarrow \vec{h}_M$ y $M \rightarrow -\vec{h}_M$

● En lo sucesivo, designaremos por Σ una hoja **simple, regular y orientada** de clase C^k , con $k \geq 2$.

Sistema de referencia de Darboux

a) A cada par $(M, \vec{\tau})$ constituido por un punto M de Σ y un vector unitario $\vec{\tau} \in T_M$ (tangente en M a Σ) asociaremos el sistema de referencia ortonormal directo $\mathcal{D} = (M; \vec{\tau}, \vec{g}, \vec{h})$ de origen M definido por las condiciones siguientes:

- i) $\vec{h} = \vec{h}_M$ es el vector unitario normal en M a Σ ;
- ii) $\vec{g} = \vec{h} \wedge \vec{\tau}$.

El sistema de referencia \mathcal{D} será llamado **sistema de referencia de Darboux** asociado al par $(M, \vec{\tau})$.

b) Sea γ un arco regular y orientado de clase C^p ($1 \leq p \leq k$) trazado sobre Σ . A cada parametrización normal $s \mapsto P(s)$ de γ asociaremos el sistema de referencia *móvil*

$$s \mapsto \mathcal{D}(s) = (P(s); \vec{\tau}(s), \vec{g}(s), \vec{h}(s))$$

donde $\vec{\tau}(s) = dP/ds$ es el vector unitario tangente a γ y $\mathcal{D}(s)$ es el sistema de referencia de Darboux asociado al par $(P(s), \vec{\tau}(s))$.

El *sistema de referencia móvil* $(^1) s \mapsto \mathcal{D}(s)$ será llamado **sistema de referencia de Darboux** de γ (asociado a la parametrización $s \mapsto P(s)$). El vector $\vec{g}(s)$ será llamado **vector normal geodésico** a γ en el punto $M = P(s)$; la recta que pasa por M , dirigida por el vector $\vec{g}(s)$, será llamada *normal geodésica* en M a γ (se trata de la normal a γ contenida en el plano tangente a Σ en M).

Curvatura normal, curvatura geodésica y torsión geodésica

Mantengamos las notaciones anteriores, suponiendo a γ de clase C^p con $p \geq 2$. Las funciones $\vec{\tau}, \vec{g}, \vec{h}$ son entonces de clase C^{p-1} , por lo tanto derivables.

Derivando las seis relaciones:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^2(s) &= \vec{g}^2(s) = \vec{h}^2(s) = 1, \\ \vec{g}(s) \cdot \vec{h}(s) &= \vec{h}(s) \cdot \vec{\tau}(s) = \vec{\tau}(s) \cdot \vec{g}(s) = 0, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds} = \vec{h} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} = 0.$$

(¹) Para una teoría general del sistema de referencia móvil, véase el capítulo X.

$$\vec{h} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds} + \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} = \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} + \vec{h} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds} = 0.$$

Estas relaciones expresan que la matriz $A(s)$ de los vectores $d\vec{\tau}/ds$, $d\vec{g}/ds$, $d\vec{h}/ds$ en la base $(\vec{\tau}(s), \vec{g}(s), \vec{h}(s))$ es *antisimétrica* ⁽¹⁾. Por definición:

- La función

$$\rho_n : s \mapsto \rho_n(s) = \vec{h} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = - \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds}$$

recibe el nombre de **curvatura normal** de γ .

- La función

$$\rho_g : s \mapsto \rho_g(s) = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = - \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds}$$

recibe el nombre de **curvatura geodésica** de γ .

- La función

$$\theta_g : s \mapsto \theta_g(s) = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} = - \vec{h} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds}$$

recibe el nombre de **torsión geodésica** de γ .

Con estas notaciones, la matriz $A(s)$ es:

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_g(s) & -\rho_n(s) \\ \rho_g(s) & 0 & \theta_g(s) \\ \rho_n(s) & -\theta_g(s) & 0 \end{bmatrix}$$

y se tienen las *fórmulas de Darboux*.

(5)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \rho_g \vec{g} + \rho_n \vec{h} \\ \frac{d\vec{g}}{ds} &= -\rho_g \vec{\tau} - \theta_g \vec{h} \\ \frac{d\vec{h}}{ds} &= -\rho_n \vec{\tau} + \theta_g \vec{g} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ De hecho, esto es una propiedad general de los sistema de referencia móviles ortonormales (véase § X.4).

Las funciones ρ_n , ρ_g , θ_g son de clase C^{p-2} (por lo tanto continuas).

Si el punto $M = P(s)$ es *simple*, los números $\rho_n(s)$, $\rho_g(s)$ y $\theta_g(s)$ dependen solamente del punto M en el soporte de γ y no de la parametrización elegida de γ . Estos números se denominan entonces respectivamente: *curvatura normal*, *curvatura geodésica* y *torsión geodésica* de γ en el punto M .

Efecto de un cambio de orientación

a) Si se cambia la *orientación* de γ por su opuesta, el sistema de referencia de Darboux $(\vec{\tau}, \vec{g}, \vec{h})$ de γ queda cambiado por $(-\vec{\tau}, -\vec{g}, \vec{h})$, por lo tanto las funciones ρ_n y θ_g permanecen inalteradas, mientras que ρ_g queda cambiada por $-\rho_g$.

b) Si se cambia la *orientación de la hoja* Σ por su opuesta sin cambiar la orientación de γ , el sistema de referencia $(\vec{\tau}, \vec{g}, \vec{h})$ queda cambiado por $(\vec{\tau}, -\vec{g}, -\vec{h})$, y por lo tanto la función ρ_g queda inalterada, mientras que ρ_n queda cambiada por $-\rho_n$ y θ_g por $-\theta_g$.

c) Finalmente, si se cambia la *orientación de \mathcal{E}* por su opuesta, el sistema de referencia $(\vec{\tau}, \vec{g}, \vec{h})$ queda cambiado por $(\vec{\tau}, \vec{g}, -\vec{h})$ (véase lo dicho anteriormente), y por lo tanto la función ρ_g permanece inalterada, mientras que ρ_n queda cambiada por $-\rho_n$ y θ_g por $-\theta_g$.

Se ve pues que la función θ_g (*torsión geodésica*) depende solamente de la orientación de \mathcal{E} y no de las orientaciones elegidas en γ y en Σ .

Por otra parte, si suponemos $\rho_n(s) \neq 0$ y ponemos $R_n(s) = 1/\rho_n(s)$, el punto

$$\Omega_n(s) = P(s) + R_n(s) \vec{h}(s)$$

es independiente de las orientaciones elegidas en γ , Σ y \mathcal{E} . Si $M = P(s)$ es un punto simple de γ , el número $R_n(s)$ es denominado **radio de curvatura normal** de γ en M y el punto $\Omega_n(s)$ recibe el nombre de **centro de curvatura normal** de γ en M .

Del mismo modo, si $\rho_g(s) \neq 0$, el número $R_g(s) = 1/\rho_g(s)$ recibe el nombre de **radio de curvatura geodésica** de γ en M ; si $\theta_g(s) \neq 0$, el número $T_g = 1/\theta_g(s)$ es denominado **radio de torsión geodésica** de γ en M .

Caso de un punto de inflexión

Si el punto $M = P(s)$ es un punto de inflexión de γ , se tiene $d\vec{\tau}/ds = 0$, de donde $\rho_g(s) = \rho_n(s) = 0$: en un punto de inflexión de γ , la curvatura normal y la curvatura geodésica de γ son nulas.

Propiedad fundamental de ρ_n y θ_g

Supongamos al arco γ definido mediante las funciones $s \mapsto u(s)$, $s \mapsto v(s)$, de manera que se tiene $P(s) = M(u(s), v(s))$. Con las notaciones simplificadas ⁽¹⁾, es

$$(6) \quad \vec{\tau} = \frac{dP}{ds} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{ds},$$

y

$$(7) \quad \frac{d\vec{h}}{ds} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \vec{h}}{\partial v} \frac{dv}{ds}.$$

Cuando se da el vector tangente $\vec{\tau}$ quedan determinados los números du/ds y dv/ds por la relación (6); la relación (7) determina seguidamente $d\vec{h}/ds$ (ya que los vectores $\partial M/\partial u$, $\partial M/\partial v$, $\partial \vec{h}/\partial u$, $\partial \vec{h}/\partial v$ dependen solamente del punto $P(s) = M(u, v)$.) Las relaciones

$$\rho_n = -\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} \quad \text{y} \quad \theta_g = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds}$$

muestran entonces que los números $\rho_n(s)$ y $\theta_g(s)$ quedan determinados cuando se dan el punto $P(s)$ y el vector $\vec{\tau}(s)$. Pero hemos visto anteriormente que el cambio de $\vec{\tau}$ por $-\vec{\tau}$ (que corresponde al cambio de orientación de γ) deja inalteradas las funciones ρ_n y θ_g . De donde

Teorema IX.2.1

La curvatura normal ρ_n y la torsión geodésica θ_g en un punto M de un arco regular γ trazado sobre Σ dependen solamente del punto M y de la tangente a γ en M .

Observemos que el centro de curvatura normal Ω_n de γ en M depende, también él, solamente de la tangente a γ en M .

Podemos establecer por lo tanto

⁽¹⁾ Para aligerar la escritura designaremos con la misma letra \vec{h} la función $(u, v) \rightarrow \vec{h}_{M(u,v)}$ (que al punto (u, v) de D asocia el vector normal unitario en el punto $M(u, v)$), y la función compuesta $s \rightarrow \vec{h}_{P(s)}$ (que asocia al número s , el vector normal unitario en el punto $P(s)$). Los símbolos $\partial \vec{h}/\partial u$, $\partial \vec{h}/\partial v$ designan las derivadas parciales de la primera de estas funciones y el símbolo $d\vec{h}/ds$ designa la derivada de la segunda. En la práctica, no existe pues confusión posible.

Definición IX.2.1

Sea L una recta afín tangente a la hoja regular Σ en un punto M . La curvatura normal, la torsión geodésica y el centro de curvatura normal de un arco regular trazado sobre Σ y tangente en M a la recta L reciben respectivamente los nombres de **curvatura normal**, **torsión geodésica** y **centro de curvatura normal de Σ respecto a la recta L , o en la dirección de L .**

Recordemos a este efecto que existe siempre por lo menos un arco regular γ trazado sobre Σ y tangente en M a la recta L (véase p. 518).

Por el contrario, se puede demostrar que la *curvatura geodésica* de un arco γ que pasa por M depende efectivamente de las derivadas segundas de las funciones u, v que definen a este arco.

Cálculo de ρ_n , ρ_g y θ_g con ayuda del sistema de referencia de Frenet

Siendo la hoja Σ de clase C^k ($k \geq 3$) supongamos que el arco γ sea p veces derivable, con $3 \leq p \leq k$, regular y sin puntos de inflexión. Designemos por $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ el sistema de referencia de Frenet de γ asociado a la parametrización $s \mapsto P(s)$ y por ρ, θ las funciones curvatura y torsión correspondientes.

La función $s \mapsto \vec{h}(s)$ es $p - 1$ veces derivable y, para cada valor de s , el vector $\vec{h}(s)$ pertenece al plano vectorial normal a γ engendrado por los vectores $\vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)$ (véase la figura 1). Las componentes $h_1(s), h_2(s)$ de $\vec{h}(s)$ en esta base son pues funciones $p - 1$ veces derivables, que (al ser \vec{h} unitario) verifican $h_1^2(s) + h_2^2(s) = 1$.

Según el teorema del levantamiento VI.6.1 existe pues una función numérica $p - 1$ veces derivable $s \mapsto \alpha(s)$ que verifica, para todo valor de s

$$\cos \alpha(s) = h_1(s) \quad \text{y} \quad \sin \alpha(s) = h_2(s)$$

o sea,

(8)

$$\vec{h} = \vec{\nu} \cos \alpha + \vec{\beta} \sin \alpha$$

Una tal función α es única módulo 2π y será simplemente designada por $\alpha = (\vec{\nu}, \vec{h})$ (es una determinación del ángulo del vector \vec{h} con el vector $\vec{\nu}$ en el plano orientado $(\vec{\nu}, \vec{\beta})$).

De (8) se deduce

$$(9) \quad \begin{aligned} \vec{g} &= \vec{h} \wedge \vec{\tau} = \vec{v} \operatorname{sen} \alpha - \vec{\beta} \cos \alpha; \text{ de donde} \\ \vec{v} &= \vec{g} \operatorname{sen} \alpha + \vec{h} \cos \alpha, \quad \vec{\beta} = -\vec{g} \cos \alpha + \vec{h} \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

Por derivación, teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet (véase § VI.8) se obtiene

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \rho \operatorname{sen} \alpha \vec{g} + \rho \cos \alpha \vec{h} \\ \frac{d\vec{g}}{ds} &= -\rho \operatorname{sen} \alpha \vec{\tau} - \left(\theta - \frac{d\alpha}{ds} \right) \vec{h} \\ \frac{d\vec{h}}{ds} &= -\rho \cos \alpha \vec{\tau} + \left(\theta - \frac{d\alpha}{ds} \right) \vec{g}. \end{aligned} \right.$$

Por comparación con las relaciones (5) se deduce las expresiones siguientes de ρ_n , ρ_g y θ_g :

$$(11) \quad \boxed{\rho_n = \rho \cos \alpha \quad \rho_g = \rho \operatorname{sen} \alpha \quad \theta_g = \theta - \frac{d\alpha}{ds}}.$$

● Se observará que las relaciones $\rho_n = \rho \cos \alpha$ y $\rho_g = \rho \operatorname{sen} \alpha$ siguen siendo válidas incluso cuando el punto $M = P(s)$ es un *punto de inflexión* de γ , ya que, en un tal punto, se tiene $\rho = \rho_n = \rho_g = 0$ (véase p. 557).

Interpretación geométrica de la curvatura normal

Designemos por L una recta tangente a Σ en el punto M y por \mathcal{P} el plano normal a Σ en M que contiene a L .

Según la proposición VIII.4.2, sabemos que existe una subhoja de Σ que contiene a M , cuya intersección con \mathcal{P} se reduce a un arco simple y regular γ_0 .

Designemos por $s \mapsto P(s)$ una parametrización normal de γ_0 y sea s_0 tal que $P(s_0) = M$. Se tiene entonces, con las notaciones anteriores, $\alpha(s_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$ de donde $\rho_n(s_0) = \pm \rho(s_0)$. Enunciamos:

El valor absoluto de la curvatura normal relativa a una tangente dada L en un punto M de Σ es igual a la curvatura, en M , de la sección de Σ por el plano normal en M a Σ que contiene a L .

Circunferencia de Meusnier

Supongamos que la curvatura normal ρ_n relativa a la tangente L sea no nula y designemos por $\Omega_n = M + R_n \vec{h}$ (con $R_n = 1/\rho_n$) el centro de curvatura normal **correspondiente**.

Si γ es un arco simple y regular trazado sobre Σ y tangente a L en el punto M y si M no es punto de inflexión de γ , el centro de curvatura Ω de γ en M queda definido, con las notaciones anteriores, por

$$\Omega = M + R\vec{v}, \quad \text{con} \quad R = \frac{1}{\rho} = \frac{\cos \alpha}{\rho_n} = R_n \cos \alpha.$$

De esto resulta (ver la figura 1) que el punto Ω es la proyección de Ω_n sobre la normal principal a γ en M .

Este resultado constituye el *teorema de Meusnier*.

La circunferencia de diámetro $M\Omega_n$, contenida en el plano ortogonal a L en M recibe el nombre de **circunferencia de Meusnier** de Σ , relativa a la tangente L .

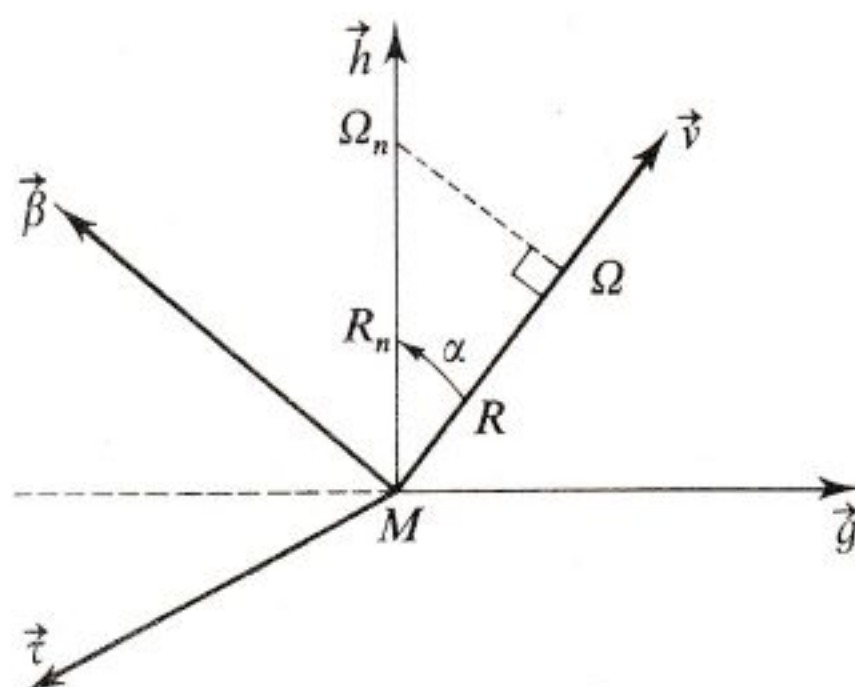


Figura 1.

Según el resultado último, el centro de curvatura en el punto M de un arco γ simple, regular y sin puntos de inflexión trazado sobre Σ , pertenece a la circunferencia de Meusnier relativa a su tangente en M .

Recíprocamente, se puede demostrar que cada punto Ω , distinto de M , de la circunferencia de Meusnier relativa a una tangente dada L , es el centro de curvatura en M de un arco trazado sobre γ y tangente a L en M .

La circunferencia de Meusnier relativa a una tangente dada L en M es pues «el lugar» de los centros de curvatura, de los arcos tangentes a L en M y trazados sobre Σ .

Como resumen enunciaremos:

IX.2.2 El centro de curvatura en un punto M de un arco regular γ trazado sobre Σ depende solamente de la tangente L a γ y del plano osculador a γ en M , y es la proyección, sobre este plano osculador, del centro de curvatura normal de Σ en M en la dirección de L .

De este resultado se hace uso en Geometría descriptiva.

§ IX.3 SEGUNDA FORMA CUADRÁTICA FUNDAMENTAL

Cálculo de la curvatura normal

Sea como siempre Σ una hoja simple regular y orientada de clase C^k ($k \geq 2$) definida por una parametrización $D \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \mapsto M(u, v)$ y sea γ un arco regular de clase C^p ($2 \leq p \leq k$) trazado sobre Σ . Vamos a calcular la curvatura normal de γ y a comprobar, mediante cálculo, que esta curvatura depende solamente, en cada punto, de la tangente a γ (véase teorema IX.2.1).

Podemos suponer que γ está definido mediante dos funciones numéricas $s \mapsto u(s)$, $s \mapsto v(s)$ tales que la aplicación

$$s \mapsto P(s) = M(u(s), v(s))$$

sea una parametrización normal de γ .

Con las notaciones del § anterior, se tiene

$$\rho_n = \vec{h} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = - \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds}$$

con

$$\vec{h}(s) = \frac{\vec{N}(u(s), v(s))}{H(u(s), v(s))};$$

y la relación $\vec{\tau} \cdot \vec{h} = 0$ implica ⁽¹⁾

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{\tau} \cdot \frac{d}{ds} (H\vec{h}) = H\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} = - H\rho_n,$$

o sea

$$(1) \quad \rho_n = - \frac{1}{H} \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds}.$$

Ahora bien, se tiene

$$(2) \quad \vec{\tau} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{ds} \quad \text{y} \quad \vec{N} = \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v},$$

⁽¹⁾ Cuando escribimos símbolos de la forma $d\vec{N}/ds$ o dH/ds , se sobreentiende que consideramos entonces las funciones compuestas $N[u(s), v(s)]$ y $H[u(s), v(s)]$.

de donde

$$(3) \quad \frac{d}{ds} \vec{N}(u(s), v(s)) = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \frac{dv}{ds} \right) \wedge \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \frac{dv}{ds} \right).$$

Se obtiene fácilmente, por aplicación de (1), (2) y (3)

$$(4) \quad \boxed{\rho_n = L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2},$$

con

$$(5) \quad \boxed{\begin{aligned} L &= \frac{1}{H} \left[\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \right], & M &= \frac{1}{H} \left[\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \right], \\ N &= \frac{1}{H} \left[\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \right] \end{aligned}}$$

Las funciones L , M , N son de clase C^{k-2} en D .

La fórmula (4) muestra entonces que la curvatura normal de γ en un punto M depende solamente de la dirección del vector tangente unitario

$$\vec{\tau} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{ds}.$$

A la inversa, supongamos dado, en un punto $M_0 = M(u, v_0)$ de Σ , un vector tangente

$$\vec{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v}.$$

Resulta entonces fácil construir un arco orientado y regular γ , de clase C^2 , trazado sobre Σ y que pase por M_0 , cuyo vector unitario tangente en M_0 sea el vector $\vec{\tau} = \vec{V} / \|\vec{V}\|$; basta para ello construir dos funciones numéricas u, v de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} , que definan un arco plano regular contenido en D y que verifiquen, en un punto t_0 interior a I ,

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0; \quad u'(t_0) = \lambda, \quad v'(t_0) = \mu.$$

La curvatura normal ρ_n de Σ en el punto M_0 , relativa a la tangente (M_0, \vec{V}) , es entonces igual a la curvatura normal de γ en el punto M_0 ; viene pues dada por la fórmula (1), designando por

$$\frac{du}{ds} = \frac{\lambda}{\|\vec{V}\|} \quad \text{y} \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\mu}{\|\vec{V}\|}$$

las componentes de $\vec{\tau}$ en la base $(\partial M/\partial u, \partial M/\partial v)$ (tomados los valores de las funciones L, M, N en el punto (u_0, v_0)). Se tiene pues

$$\rho_n = \frac{1}{\|\vec{V}\|^2} (L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2),$$

o sea, con las notaciones de la página 548:

$$(6) \quad \boxed{\rho_n = \frac{L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2}{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}}.$$

Utilizando notaciones diferenciales, enunciaremos:

IX.3.1 Si $\vec{V} = \partial M/\partial u du + \partial M/\partial v dv$ es un vector tangente en un punto M a la hoja Σ , la curvatura normal de Σ en el punto M , relativa a la tangente (M, \vec{V}) es el número

$$(6') \quad \rho_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Segunda forma cuadrática fundamental

Siendo fijo el punto M de Σ , sea Φ_1^M la primera forma cuadrática fundamental de Σ en M , definida por

$$\Phi_1^M \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v} \right) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$$

(véase p. 548) y para cada vector

$$\vec{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v}$$

tangente a Σ en L , designemos por $\rho_n(\vec{V})$ la curvatura normal de Σ en M relativa a la tangente (M, \vec{V}) . La fórmula (6) muestra que la función

$$\vec{V} \mapsto \rho_n(\vec{V}) \Phi_1^M(\vec{V}) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2$$

es una forma cuadrática del vector \vec{V} ; esta forma cuadrática es evidentemente independiente de la parametrización elegida de Σ (ya que las funciones $\vec{V} \mapsto \rho_n(\vec{V})$ y Φ_1^M lo son). Daremos la siguiente

Definición IX.3.1

Sea T_M el plano vectorial tangente a la hoja Σ en un punto M ; la **segunda forma cuadrática fundamental** de Σ en el punto M es la forma cuadrática Φ_2^M que, para toda parametrización admisible de Σ , está definida por

$$(7) \quad \Phi_2^M \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v} \right) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2,$$

con los números L, M, N dados por las fórmulas (5).

Daremos más adelante (§ 4) una definición «intrínseca» de la forma Φ_2^M . Mientras no haya confusión posible, se designará esta forma por Φ_2 .

Lo mismo que para la primera forma fundamental, se suele escribir la fórmula (7) en forma «diferencial»:

$$\Phi_2^M(dM) = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

donde

$$dM = \frac{\partial M}{\partial u} du + \frac{\partial M}{\partial v} dv$$

designa un vector cualquiera tangente a Σ en M .

Observación importante

Si se cambia la orientación de Σ por su opuesta, la forma cuadrática Φ_2 queda cambiada por su opuesta.

Lo mismo ocurre si se cambia la orientación de \mathcal{E} por su opuesta. En los cálculos prácticos, se empieza por determinar las funciones

$$D = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right], \quad D' = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right],$$

$$D'' = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right],$$

y se tiene entonces

$$L = \frac{D}{H}, \quad M = \frac{D'}{H}, \quad N = \frac{D''}{H},$$

o sea

$$\Phi_2(dM) = \frac{1}{H} (D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2).$$

Observación. Introduzcamos en el espacio afín \mathcal{E} otra estructura euclídea orientada; entonces todos los productos mixtos vienen multiplicados por una misma constante k (véase ejercicio II.18). Resulta de aquí inmediatamente que la segunda forma fundamental Φ_2^M es sustituida por una forma cuadrática *proporcional*, o sea

$$\lambda(M) \Phi_2^M,$$

donde λ designa una función numérica en Σ (téngase en cuenta que en este cambio de estructura, la función H no queda invariante).

Si bien la segunda forma fundamental depende de la estructura euclídea de \mathcal{E} , sus rectas isotropas sólo dependen, pues, de la estructura afín de \mathcal{E} .

Se deduce también que la nulidad de la forma bilineal simétrica asociada a Φ_2 es también una propiedad afín. Esta propiedad será utilizada más adelante.

Caso de una parametrización cartesiana

Supongamos que la hoja Σ se halle definida, en un sistema de referencia ortogonal directo de \mathcal{E} , por la ecuación cartesiana

$$z = f(x, y),$$

donde f designa una función numérica de clase C^2 en un dominio plano.

Designemos por $M(x, y)$ el punto de coordenadas $(x, y, f(x, y))$ y pongamos $p = f'_x$, $q = f'_y$, $r = f''_{xx}$, $s = f''_{xy}$, $t = f''_{yy}$. Los vectores

$$\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} \text{ y } \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}$$

están definidos por sus componentes

$$\frac{\partial M}{\partial x} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{vmatrix}, \frac{\partial M}{\partial y} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{vmatrix}, \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{vmatrix}, \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{vmatrix}, \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{vmatrix},$$

de donde

$$D = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right] = r, \quad D' = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}, \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right] = s,$$

$$D'' = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}, \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right] = t.$$

La segunda forma fundamental de Σ viene dada por

(8)

$$\Phi_2(dM) = \frac{1}{H}(r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2)$$

con

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial y} dy \quad \text{y} \quad H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

(véase § 2).

Aplicación

Sabemos que toda hoja Σ puede, en el entorno de un punto simple y regular M , ser definida por una ecuación cartesiana de la forma (1) (véase teorema VIII.3.3).

Por comparación de la fórmula (8) con el estudio hecho en el § VIII.5, se obtiene inmediatamente los resultados siguientes:

Teorema IX.3.2

Para que un punto M de una hoja simple y regular Σ sea **elíptico**, es necesario y suficiente que la segunda forma fundamental Φ_2^M sea **definida** (positiva o negativa).
 Para que el punto M sea **hiperbólico**, es necesario y suficiente que la segunda forma fundamental Φ_2^M sea **no degenerada** y **no definida**.
 Finalmente, para que M sea **parabólico**, es necesario y suficiente que la forma Φ_2^M sea **degenerada**.

Teorema IX.3.3

En todo punto hiperbólico M de Σ , las **direcciones asintóticas** son las de los vectores \vec{V} tangentes a Σ en M que verifican $\Phi_2^M(\vec{V}) = 0$; en otros términos, las **direcciones asintóticas** son las de los **vectores isótropos** de la segunda forma fundamental de Σ en M .

Lo mismo ocurriría en un punto *parabólico* donde la forma Φ_2^M no es nula (caso de una dirección asintótica doble).

Nos encontramos de nuevo con el hecho de que la nulidad de la segunda forma fundamental es una propiedad *afín* de Σ .

Observación. Si existe un arco regular γ , trazado sobre Σ y que admite al punto M como *punto de inflexión*, entonces la tangente a γ en M es, necesariamente, una tangente asintótica a Σ en M (ya que la curvatura normal, en la dirección de esta recta, es nula (véase página 557). De ahí resulta que M es un punto hiperbólico o parabólico de Σ .

En consecuencia, los arcos regulares trazados sobre una hoja cuyos puntos son todos *elípticos*, carecen de puntos de inflexión.

Ejemplos

El teorema IX.3.2 permite reconocer la naturaleza de un punto sobre una superficie Σ . Para ello basta con determinar (en una parametrización cualquiera) la forma cuadrática

$$H\Phi_2 = D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2 .$$

No hace falta calcular H .

1. Provisto el espacio \mathcal{E} de un sistema de referencia ortonormal directo, consideremos el *elipsoide* de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \neq 0).$$

Utilicemos la parametrización

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = b \cos u \sin v, \quad z = c \operatorname{sen} u.$$

Esta parametrización es regular en el entorno de todo punto (u, v) tal que $\cos u \neq 0$. Las componentes de los vectores

$$\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial u^2}$$

son aquí:

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial M}{\partial u} \left| \begin{array}{c} -a \operatorname{sen} u \cos v \\ -b \operatorname{sen} u \sin v \\ c \cos u \end{array} \right. & \frac{\partial M}{\partial v} \left| \begin{array}{c} -a \cos u \sin v \\ b \cos u \cos v \\ 0 \end{array} \right. \\ \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \left| \begin{array}{c} -a \cos u \cos v \\ -b \cos u \sin v \\ -c \operatorname{sen} u \end{array} \right. & \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \left| \begin{array}{c} a \operatorname{sen} u \sin v \\ -b \operatorname{sen} u \cos v \\ 0 \end{array} \right. & \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \left| \begin{array}{c} -a \cos u \cos v \\ -b \cos u \sin v \\ 0 \end{array} \right. \end{array}$$

de donde $D = abc \cos u$, $D' = v$, $D'' = abc \cos^3 u$; la segunda forma fundamental es

$$\Phi_2 = \frac{abc}{H} (\cos u \, du^2 + \cos^3 u \, dv^2).$$

Al ser esta forma definida positiva para $\cos u \neq 0$, se deduce que los puntos correspondientes del elipsoide son elípticos. Para estudiar los puntos del elipsoide obtenidos para $\cos u = 0$ (es decir los puntos $(0, 0, c)$ y $(0, 0, -c)$), se ha de tomar una parametrización que sea regular en estos puntos; se obtiene una de ellas intercambiando los papeles de x y z por ejemplo, y se ve de este modo que estos puntos son también elípticos.

Se demostraría igualmente que todos los puntos de un *hiperboloide de dos hojas* son *elípticos*.

2. Consideremos el *hiperboloide de una hoja*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1 \quad (a, b, c \neq 0)$$

y utilicemos la parametrización:

$$x = a \cos u - v \operatorname{sen} u, \quad y = b \operatorname{sen} u + \frac{b}{a} v \cos u, \quad z = \frac{c}{a} v.$$

Se comprueba que esta parametrización es regular y, mediante un cálculo análogo al anterior, se obtiene

$$\Phi_2 = \frac{-bc}{a^2 H} ((a^2 + v^2) du^2 + 2a du dv).$$

Esta forma es no degenerada en todas partes y no definida; todos los puntos del hiperboloide son pues hiperbólicos, según ya sabíamos.

Las direcciones asintóticas están definidas por $du = 0$ y

$$(a^2 + v^2) du + 2a dv = 0$$

se puede comprobar que son las de las generatrices del hiperboloide que pasan por el punto considerado. En efecto, los arcos trazados sobre este hiperboloide y definidos respectivamente por $u = \text{Cte}$, $u + 2 \operatorname{arctg} v/a = \text{Cte}$ son rectas respectivamente dirigidas por las direcciones asintóticas determinadas anteriormente.

Caso de una esfera

El cálculo hecho en el ejemplo 1 se aplica en particular cuando $b = c = a$ (caso de una esfera de radio a).

En este caso, se tiene $E = a^2$, $F = 0$, $G = a^2 \cos^2 u$, de donde $H = a^2 \cos u$ y

$$\Phi_1 = a^2(du^2 + \cos^2 u dv^2), \quad \Phi_2 = a(du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

Se ve de este modo que la *curvatura normal* de un arco cualquiera trazado sobre una esfera Σ de radio a es igual a $\pm 1/a$. Podemos obtener este resultado sin cálculo utilizando la interpretación geométrica de la curvatura normal dada en la página 560; en efecto, la sección de Σ por un plano normal cualquiera es un *círculo*, de curvatura $1/a$.

Caso de una hoja reglada

3. Sea Σ la *hoja reglada* definida por la parametrización

$$(u, v) \mapsto M(u, v) = P(u) + v\vec{K}(u);$$

siendo las funciones $u \mapsto P(u)$ y $u \mapsto \vec{K}(u)$ de clase C^k ($k \geq 2$) en un intervalo de \mathbf{R} y sea S una subhoja simple y regular de Σ , que constituye un «elemento de superficie reglada» (véase § VIII.5). Se tiene aquí

$$\frac{\partial M}{\partial u} = P'(u) + v\vec{K}'(u), \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \vec{K}(u),$$

$$D = [P'(u) + v\vec{K}(u), \vec{K}(u), P''(u) + v\vec{K}''(u)]$$

$$D' = [P'(u) + v\vec{K}(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u)] = [P'(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u)]$$

$$D'' = 0.$$

La segunda forma fundamental es entonces

$$\Phi_2 = \frac{1}{H} (D du^2 + 2 D' du dv).$$

En general (si $D' \neq 0$) el punto $M(u, v)$ es *hiperbólico*. Si $D' = 0$, el punto $M(u, v)$ es *parabólico* y la segunda forma fundamental se reduce a

$$\Phi_2 = \frac{1}{H} D du^2.$$

En todos los casos la generatriz del punto $M(u, v)$ (cuya dirección está definida por $du = 0$) es una tangente asintótica, y volvemos a encontrar los resultados del § VIII.6.

Si Σ es **desarrollable** se tiene:

$$[P'(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u)] = 0$$

para todo valor de u , por lo tanto $D' = 0$ en todo punto M de S : *todos los puntos regulares de una hoja desarrollable son por lo tanto parabólicos*.

Este es el caso, en particular, de las hojas *cónicas* y *cilíndricas*.

Recíprocamente, se puede demostrar que toda hoja simple y regular de clase C^k ($k \geq 2$) que tenga todos sus puntos parabólicos, es una reunión de elementos de superficies desarrollables.

§ IX.4 ENDOMORFISMO ASOCIADO A LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Sea como siempre Σ una hoja *simple regular y orientada* de \mathcal{E} , definida por una parametrización $F: D \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \mapsto M = F(u, v)$, de clase C^k ($k \geq 2$).

Para cada punto $m = (u, v)$ de D , designaremos por \vec{h} el vector unitario normal a Σ en el punto $M = F(u, v)$ y por DF_m , $D\vec{h}_m$ las diferenciales en el punto m de las aplicaciones F , \vec{h} .

Sabemos ya que la aplicación

$$DF_m: \mathbf{R}^2 \rightarrow E, \quad (\lambda, \mu) \mapsto \lambda F'_u(u, v) + \mu F'_v(u, v)$$

determina un isomorfismo del espacio vectorial \mathbf{R}^2 en el plano vectorial T_M tangente a Σ en el punto $M = F(u, v)$. Este isomorfismo se designará por \overline{DF}_m ⁽¹⁾ y designaremos por $(\overline{DF}_m)^{-1}: T_M \rightarrow \mathbf{R}^2$ al isomorfismo recíproco.

Por definición, la diferencial

$$D\vec{h}_m: (\lambda, \mu) \mapsto \lambda \vec{h}'_u(m) + \mu \vec{h}'_v(m)$$

es una aplicación lineal de \mathbf{R}^2 en E . Vamos a ver que su imagen está contenida en T_M .

Derivando la relación $\|\vec{h}^2(m)\| = 1$, la cual se cumple para todo $m \in D$, se tiene en efecto

$$\vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial u} = 0, \quad \vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial v} = 0,$$

lo cual demuestra que los vectores derivadas parciales $\vec{h}'_u(m)$, $\vec{h}'_v(m)$ pertenecen a T_M (ya que T_M es el plano ortogonal a $h(m)$); de donde resulta la propiedad anunciada.

Comparando las propiedades de DF_m y $D\vec{h}_m$, se ve que la aplicación lineal $D\vec{h}_m \circ (\overline{DF}_m)^{-1}$ es un *endomorfismo* del plano vectorial T_M .

Demostremos que este endomorfismo no depende de la parametrización elegida F de Σ .

Sea en efecto $\theta: \Delta \rightarrow D$, $\mu \rightarrow m$ un cambio de parámetro admisible en Σ y sea $\Phi = F \circ \theta$ la parametrización que se deduce de él. Se tiene (si $m = \theta(\mu)$)

$$D\Phi_\mu = DF_m \circ D\theta_\mu,$$

de donde (considerando los isomorfismos de \mathbf{R}^2 en T_M definidos por DF_m y $D\Phi_\mu$:

$$\overline{D\Phi}_\mu = \overline{DF}_m \circ D\theta_\mu,$$

⁽¹⁾ En el lenguaje de la Geometría diferencial, el isomorfismo \overline{DF}_m es la diferencial, en el punto m , de la aplicación $\bar{F}: D \rightarrow F(D)$, $m \mapsto F(m)$.

y

$$(1) \quad (\bar{D}\Phi_\mu)^{-1} = (D\theta_\mu)^{-1} \circ (\bar{D}F_m)^{-1}.$$

Si se designa por $\vec{\eta}(\mu)$ el vector unitario normal a Σ en el punto $\Phi(\mu)$, se tiene igualmente $\vec{\eta}(\mu) = \vec{h}(\theta(\mu))$, de donde

$$(2) \quad D\vec{\eta}_m = D\vec{h}_m \circ D\theta_\mu.$$

Por aplicación de (1) y (2) se tiene

$$D\vec{\eta}_\mu \circ (\bar{D}\Phi_\mu)^{-1} = D\vec{h}_m \circ D\theta_\mu \circ (D\theta_\mu)^{-1} \circ (\bar{D}F_m)^{-1},$$

o sea

$$D\vec{\eta}_\mu \circ (\bar{D}\Phi_\mu)^{-1} = D\vec{h}_m \circ (\bar{D}F_m)^{-1}.$$

El endomorfismo $D\vec{h}_m \circ (\bar{D}F_m)^{-1} : T_M \rightarrow T_M$ no depende, pues, de la parametrización F elegida. Designaremos por ψ_M a su opuesto.

Siendo fija la parametrización F , sea $\vec{V} = \lambda F'_u + \mu F'_v$ un vector cualquiera de T_M (estando tomadas las derivadas parciales en el punto $m = (u, v)$). Se tiene, por definición

$$(\bar{D}F_m)^{-1}(\vec{V}) = (\lambda, \mu),$$

de donde

$$\psi_M(\vec{V}) = -\lambda \vec{h}'_u - \mu \vec{h}'_v.$$

El endomorfismo ψ_M está pues definido por

$$(3) \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}) \quad \psi_M(\lambda F'_u + \mu F'_v) = -\lambda \vec{h}'_u - \mu \vec{h}'_v$$

y es el único endomorfismo de T_M que verifica

$$\boxed{\psi_M(F'_u) = -\vec{h}'_u \quad \psi_M(F'_v) = -\vec{h}'_v}.$$

Utilizando notaciones diferenciales, se puede decir también que es el endomorfismo de T_M que, al vector tangente (variable)

$$dM = \frac{\partial M}{\partial u} du + \frac{\partial M}{\partial v} dv$$

asocia el vector

$$- d\vec{h} = - h'_u du - h'_v dv.$$

Teorema IV.4.1

|| Si el plano vectorial T_M , tangente en M a Σ , se halla dotado de la estructura euclídea inducida por la de E , entonces el endomorfismo ψ_M , definido por (3), es **simétrico**.

Demostración. Sean $\vec{V}_1 = \lambda_1 F'_u + \mu_1 F'_v$ y $\vec{V}_2 = \lambda_2 F'_u + \mu_2 F'_v$ dos vectores de T_M . Se tiene

$$\psi_M(\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = - \vec{h}'_u \cdot F'_u \lambda_1 \lambda_2 - \vec{h}'_v \cdot F'_v \mu_1 \mu_2 - \vec{h}'_u \cdot F'_v \lambda_1 \mu_2 - \vec{h}'_v \cdot F'_u \lambda_2 \mu_1.$$

El resultado anunciado equivale a establecer la relación

$$(4) \quad \vec{h}'_u \cdot F'_v = \vec{h}'_v \cdot F'_u;$$

(en efecto, la relación (4) es la condición necesaria y suficiente para que la forma bilineal

$$(V_1, V_2) \mapsto \psi_M(\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$$

sea simétrica).

Ahora bien, se tiene: $\vec{h} \cdot F'_u = 0$, $\vec{h} \cdot F'_v = 0$, de donde, por derivación

$$\vec{h}'_u \cdot F'_v = \frac{\partial}{\partial u} (\vec{h} \cdot F'_v) - \vec{h} \cdot F''_{vu} = - \vec{h} \cdot F''_{vu}$$

$$\vec{h}'_v \cdot F'_u = \frac{\partial}{\partial v} (\vec{h} \cdot F'_u) - \vec{h} \cdot F''_{uv} = - \vec{h} \cdot F''_{uv}$$

y la relación (4) se desprende de la relación de Schwarz $F''_{uv} = F''_{vu}$.]

Relación con la segunda forma fundamental

Manteniendo las notaciones anteriores se tiene

$$\vec{h} = \frac{1}{H} F'_u \wedge F'_v,$$

de donde

$$\vec{h}'_u \cdot F'_v = \vec{h}'_v \cdot F'_u = -\vec{h} \cdot F''_{uv},$$

$$\vec{h}'_u \cdot F'_v = -\frac{1}{H} [F''_{uv}, F'_u, F'_v] = -\frac{D'}{H} = -M.$$

Se tiene igualmente

$$\vec{h}'_u \cdot F'_u = \frac{\partial}{\partial u} (\vec{h} \cdot F'_u) - \vec{h} \cdot F''_{u^2} = -\vec{h} \cdot F''_{u^2} =$$

$$= -\frac{1}{H} [F''_{u^2}, F'_u, F'_v] = -\frac{D}{H} = -L$$

$$\vec{h}'_v \cdot F'_v = \frac{\partial}{\partial v} (\vec{h} \cdot F'_v) - \vec{h} \cdot F''_{v^2} = -\vec{h} \cdot F''_{v^2} =$$

$$= -\frac{1}{H} [F''_{v^2}, F'_u, F'_v] = -\frac{D''}{H} = -N,$$

de donde, para todos los vectores $\vec{V}_1 = \lambda_1 F'_u + \mu_1 F'_v$ y $\vec{V}_2 = \lambda_2 F'_u + \mu_2 F'_v$:

$$(5) \quad \begin{aligned} \psi_M(\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 &= \psi_M(\vec{V}_2) \cdot \vec{V}_1 = \\ &= L\lambda_1 \lambda_2 + M(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + N\mu_1 \mu_2. \end{aligned}$$

La aplicación $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \mapsto \psi_M(\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$ no es sino la **forma polar** de la segunda forma cuadrática fundamental Φ_2^M . Nos encontramos aquí de nuevo con el hecho de que la forma Φ_2^M es independiente de la parametrización F elegida y podemos establecer

IX.4.2 El endomorfismo ψ_M es el **endomorfismo simétrico** de T_M asociado a la segunda forma fundamental Φ_2^M , es decir el endomorfismo simétrico de T_M definido por

$$(6) \quad (\forall \vec{V} \in T_M) \quad \Phi_2^M(\vec{V}) = \psi_M(\vec{V}) \cdot \vec{V}.$$

Para completar este estudio, daremos la siguiente

Definición IX.4.1

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se dice que dos tangentes a } \Sigma \text{ en el punto } M \text{ son } \mathbf{conjugadas} \text{ si sus vectores directores} \\ \text{respectivos } \vec{V}_1, \vec{V}_2 \text{ verifican:} \end{array} \right.$

$$\psi_M(\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = 0;$$

~ y las direcciones de estas rectas, se dice entonces que son **conjugadas**.

Según lo que antecede, la relación de ser conjugadas es una *relación simétrica* en el conjunto de las tangentes en M a Σ [resp. en el conjunto de las rectas vectoriales tangentes en M a Σ], y las únicas tangentes que coinciden con su correspondiente conjugada son las **tangentes asintóticas**.

Consecuencias prácticas

El teorema IX. 4.2 se puede resumir en la fórmula condensada

$$\phi_2^M(dM) = -dM \cdot d\vec{h}$$

(donde $d\vec{h} = \vec{h}'_u du + \vec{h}'_v dv$), que constituye una manera práctica de obtener ϕ_2 .

En términos generales, sea $\vec{\mathcal{N}}$ una «función vector normal» diferenciable cualquiera en Σ , es decir, una función de la forma

$$\vec{\mathcal{N}} : \text{sop} \cdot (\Sigma) \rightarrow E, \quad M \mapsto \lambda(M)\vec{h}_M$$

donde λ designa una función numérica diferenciable en la hoja Σ (véase p. 512), que no se anula. En tal caso,

$$d\vec{\mathcal{N}} = d\lambda\vec{h}_M + \lambda d\vec{h}_M,$$

de donde, puesto que $\vec{h}_M \cdot dM = 0$,

$$dM \cdot d\vec{\mathcal{N}} = \lambda dM \cdot d\vec{h}_M$$

y, finalmente

$$(6) \quad \boxed{dM \cdot d\vec{\mathcal{N}} = -\lambda \phi_2^M(dM)}.$$

En la práctica, el cálculo de la función $\vec{\mathcal{N}}$ equivale al de una función vectorial $\vec{N} : D \mapsto E$, $(u, v) \mapsto \vec{N}(u, v)$, diferenciable y no nula, que verifique

$$\vec{N} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = 0, \quad \vec{N} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = 0.$$

Eligiendo con cuidado esta función, la relación (6) permite a menudo el cálculo rápido de ϕ_2 .

§ IX.5 TORSIÓN GEODÉSICA. DIRECCIONES PRINCIPALES

Torsión geodésica

Sea como siempre Σ una hoja simple, regular y orientada de \mathcal{E} , definida por una parametrización $F: D \rightarrow \mathcal{E}$, de clase C^k ($k \geq 2$).

Vamos a ver que cuando se conoce la segunda forma fundamental Φ_2^M , en un punto $M = F(m)$ de Σ , se puede calcular la torsión geodésica en M de un arco γ trazado sobre Σ y que pasa por M .

Supongamos al arco γ definido por una parametrización normal.

$$s \mapsto P(s) = M(u(s), v(s)),$$

y mantengamos las notaciones del § 3.

Ponemos, pues

$$\vec{\tau} = \frac{dP}{ds} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{ds}, \quad \vec{h} = \frac{1}{H} \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$$

$$\vec{g} = \vec{h} \wedge \vec{\tau}, \quad \frac{d\vec{h}}{ds} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \vec{h}}{\partial v} \frac{dv}{ds};$$

la torsión geodésica de γ es entonces

$$(1) \quad \theta_g = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} = \left[\vec{h}, \vec{\tau}, \frac{d\vec{h}}{ds} \right],$$

o sea

$$\theta_g = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right) \cdot \left(\vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{h}}{ds} \right).$$

Ahora bien, si $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4$ son cuatro vectores cualesquiera de E , se tiene, aplicando la fórmula del doble producto vectorial

$$\begin{aligned} (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_4) &= [\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_4] = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_4)) \\ &= \vec{V}_1 \cdot (-(\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3) \vec{V}_4 + (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_4) \vec{V}_3) \\ &= (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_4) - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_4) (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3), \end{aligned}$$

o sea

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_4) = \begin{vmatrix} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 & \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_4 \\ \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 & \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_4 \end{vmatrix}.$$

Tenemos aquí

$$\vec{\tau} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds}, \quad \vec{\tau} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = F \frac{du}{ds} + G \frac{dv}{ds}$$

y, por un cálculo hecho ya en el § anterior,

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = - \vec{h} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = - \frac{1}{H} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right] = - L$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = - \vec{h} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} = - \frac{1}{H} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right] = - M$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = - \vec{h} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} = - \frac{1}{H} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right] = - M$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = - \vec{h} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} = - \frac{1}{H} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right] = - N$$

de donde

$$(3) \quad \frac{d\vec{h}}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \right) \frac{du}{ds} + \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \right) \frac{dv}{ds} = -L \frac{du}{ds} - M \frac{dv}{ds}$$

$$(4) \quad \frac{d\vec{h}}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \right) \frac{du}{ds} + \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \right) \frac{dv}{ds} = -M \frac{du}{ds} - N \frac{dv}{ds}.$$

Por aplicación de la fórmula (2) se tiene pues

$$(5) \quad \theta_g = - \frac{1}{H} \begin{vmatrix} E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds} & F \frac{du}{ds} + G \frac{dv}{ds} \\ L \frac{du}{ds} + M \frac{dv}{ds} & M \frac{du}{ds} + N \frac{dv}{ds} \end{vmatrix}$$

o sea

$$\theta_g = - \frac{1}{H} \left[(EM - FL) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + (EN - GL) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (FN - GM) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right]$$

Se verifica que la torsión geodésica de γ en M depende solamente de la tangente a γ en M .

Si $\vec{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v}$ es un vector tangente cualquiera a Σ en M , la torsión geodésica relativa a la tangente (M, \vec{V}) viene dada por

$$\theta_g = - \frac{1}{H} \frac{(EM - FL) \lambda^2 + (EN - GL) \lambda \mu + (FN - GM) \mu^2}{E \lambda^2 + 2 F \lambda \mu + G \mu^2}.$$

Observaciones

1. Se podría abreviar el cálculo anterior observando que el vector $d\vec{h}/ds$ es la imagen, por el endomorfismo $-\psi_M$, del vector

$$\vec{\tau} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{ds};$$

(véase § 4).

Se obtienen de este modo directamente las fórmulas (3) y (4); se ve que la torsión geodésica en la dirección de un vector unitario tangente $\vec{\tau}$, viene dada por $\theta_g = \Theta_M(\vec{\tau})$, con

$$(6) \quad \Theta_M(\vec{\tau}) = - [\vec{h}, \vec{\tau}, \psi_M(\vec{\tau})].$$

2. Si se orienta el plano vectorial T_M de manera que la base $(\partial M/\partial u, \partial M/\partial v)$ sea directa, se tiene también

$$\theta_g = \left[\vec{\tau}, \frac{d\vec{h}}{ds} \right],$$

donde $[\vec{\tau}, d\vec{h}/ds]$ designa el producto mixto de dos vectores $\vec{\tau}, d\vec{h}/ds$ en T_M . La fórmula

$$\theta_g = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} \vec{\tau} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} & \vec{\tau} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \\ \frac{d\vec{h}}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} & \frac{d\vec{h}}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \end{vmatrix}$$

resulta entonces directamente de los resultados del ejercicio II.19.

Utilización de un sistema de referencia ortonormal

Designemos por (\vec{i}, \vec{j}) una base ortonormal cualquiera del plano vectorial euclídeo T_M , tal que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{h})$ de E sea *directa*. Para todo vector unitario $\vec{\tau} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$ tangente a Σ en M , se tiene entonces

$$(7) \quad \Phi_2^M(\vec{\tau}) = a \cos^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi$$

con $a = \Phi_2^M(\vec{i})$, $c = \Phi_2^M(\vec{j})$ y $b = \vec{i} \cdot \Phi_M(\vec{j}) = \vec{j} \cdot \Phi_M(\vec{i})$ (ya que ψ_M es el endomorfismo simétrico asociado a la forma cuadrática Φ_2^M). La matriz de ψ_M en la base es (\vec{i}, \vec{j}) entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

y, por aplicación de (6) se ve que la torsión geodésica en la dirección de $\vec{\tau}$ es

$$\theta_g = \Theta(\vec{\tau}) = - \begin{vmatrix} \cos \varphi & a \cos \varphi + b \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & b \cos \varphi + c \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

o sea

$$(8) \quad \theta_g = (a - c) \sin \varphi \cos \varphi - b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

mientras que la curvatura normal en la misma dirección viene dada por

$$(9) \quad \rho_n = a \cos^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi.$$

De la fórmula (8) se deduce:

IX.5.1 \parallel Las torsiones geodésicas de Σ en dos direcciones ortogonales de plano tangente T_M son opuestas.

Demostración. Si se cambia φ por $\varphi + \pi/2$, los dos números $\sin \varphi \cos \varphi$ y $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ resultan cambiados por sus opuestos; de donde el resultado. \parallel

Direcciones principales

Según el teorema fundamental de la teoría espectral (véase tomo 1, teorema XIII.7.1), se sabe que existe *por lo menos* una base ortonormal (\vec{i}, \vec{j}) de T_M formada por vectores propios del endomorfismo ψ_M ; intercambiando, si es preciso, los vectores \vec{i}, \vec{j} , se puede suponer que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{h})$ de E es *directa*.

Con las notaciones anteriores, se tiene entonces $b = 0$, de donde

$$\Phi_2^M(\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}) = a\lambda^2 + c\mu^2,$$

con

$$a = \Phi_2^M(\vec{i}), \quad c = \Phi_2^M(\vec{j});$$

la torsión geodésica en la dirección del vector $\vec{\tau} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$ es

$$(1) \quad \boxed{\theta_g = (a - c) \sin \varphi \cos \varphi}.$$

Para interpretar estos resultados, establecemos la definición que sigue (habida cuenta del teorema II.1.1).

Definición IX.5.1

En cada punto M de la hoja Σ , se da el nombre de **dirección principal** a toda dirección principal de la segunda forma cuadrática fundamental en este punto, es decir a toda recta vectorial, tangente a Σ en M , dirigida por un **vector propio** del endomorfismo ψ_M asociado a la forma Φ_2^M .

Una recta afín, tangente a Σ en M , se dirá que es una **tangente principal** si su dirección es una dirección principal; los vectores propios del endomorfismo ψ_M se dirá que son *principales*.

Se tiene inmediatamente,

IX.5.2 Para que un vector \vec{V} , tangente en M a Σ , sea **principal**, es necesario y suficiente que exista un número ρ que verifique

(1) $\psi_M(\vec{V}) = \rho \vec{V}$;

este número ρ es entonces igual a la **curvatura normal** de Σ en la dirección de \vec{V} .

Se dice que ρ es la **curvatura principal** asociada a la dirección del vector \vec{V} .

Discusión

Primer caso: el endomorfismo ψ_M admite dos valores propios distintos ρ_1, ρ_2

Se puede considerar este caso como el «caso general». Existen entonces solamente dos direcciones principales en M , que son ortogonales.

Designemos por \vec{i}, \vec{j} dos vectores unitarios de T_M que verifican

$$\psi_M(\vec{i}) = \rho_1 \vec{i}, \quad \psi_M(\vec{j}) = \rho_2 \vec{j}.$$

Cambiando si es preciso \vec{i} por $-\vec{i}$, se puede suponer que la base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{h})$ es *directa*. La segunda forma fundamental es entonces

$$\Phi_2^M(\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}) = \rho_1 \lambda^2 + \rho_2 \mu^2;$$

los números ρ_1, ρ_2 se dice que son las **curvaturas principales** de Σ en M .

La curvatura normal ρ_n y la torsión geodésica θ_g en la dirección del vector $\vec{\tau} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$ son

(12)

$$\rho_n = \rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2 \sin^2 \varphi$$

(13)

$$\theta_g = (\rho_2 - \rho_1) \sin \varphi \cos \varphi$$

La relación (12) muestra que la curvatura normal está comprendida entre los números ρ_1 y ρ_2 ; de un modo más preciso: *las curvaturas principales son los extremos de ρ_n al variar φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).*

La relación (13) muestra que la torsión geodésica en una dirección dada es nula si, y solamente si, esta dirección es principal.

Segundo caso: *el endomorfismo ψ_M tiene un solo valor propio ρ .*

En este caso, toda dirección de Δ_M es principal; el endomorfismo ψ_M se reduce a una homotecia de razón ρ y la segunda forma fundamental viene dada por

$$\Phi_2^M(\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}) = \rho(\lambda^2 + \mu^2).$$

Las relaciones (12) y (13) siguen siendo válidas con $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. De donde resulta que la curvatura normal en una dirección cualquiera es igual a ρ ; la torsión geodésica es siempre nula.

Para enunciar estos resultados, daremos la

Definición IX.5.2

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Un punto } M \text{ de una hoja } \Sigma \text{ se dice que es un } \mathbf{punto umbilico} \text{ si toda} \\ \text{dirección tangente en este punto es principal.} \end{array} \right.$

En resumen

Teorema IX.5.3

Sea M un punto de una hoja simple y regular Σ .

- a) Para que una dirección tangente en M sea **principal**, es necesario y suficiente que la torsión geodésica en esa dirección sea nula.
- b) Si M **no es umbilico**, existen solamente dos direcciones principales; los extremos de la curvatura normal relativa a una dirección variable, son las **curvaturas principales** ρ_1, ρ_2 .
- c) Si M **es umbilico**, la curvatura normal es la misma en todas direcciones.

Observación

a) Si M no es umbilico, la fórmula (12) muestra inmediatamente que M es *elíptico* si $\rho_1 \rho_2 > 0$, *hiperbólico* si $\rho_1 \rho_2 < 0$ y *parabólico* si $\rho_1 \rho_2 = 0$ (es decir, si

una de las curvaturas principales es nula).

Si M es *hiperbólico*, las direcciones asintóticas se hallan definidas por

$$\rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2 \sin^2 \varphi = 0$$

y se ve inmediatamente que las direcciones principales son las bisectrices de las direcciones asintóticas.

b) Si M es umbilico y si ρ designa la curvatura normal en este punto, se ve inmediatamente que M es *elíptico* si $\rho \neq 0$ y *parabólico* si $\rho = 0$.

Centros de curvatura principales

Si las curvaturas principales ρ_1, ρ_2 son *no nulas*, los números $R_1 = 1/\rho_1$ y $R_2 = 1/\rho_2$ reciben el nombre de *radios de curvatura principales* en el punto M . Los centros de curvatura normal correspondientes, definidos respectivamente por

$$\Omega_1 = M + R_1 \vec{h}, \quad \Omega_2 = M + R_2 \vec{h},$$

se denominan *centros de curvatura principales* de Σ en M . Estos puntos desempeñan un papel importante en Hidrostática, para el estudio del equilibrio de los cuerpos flotantes. No dependen ni de la orientación de Σ , ni de la de \mathcal{E}_3 .

Una caracterización de las direcciones principales

Si el punto M de Σ no es umbilico, se tiene inmediatamente (véase definición IX.4.1):

IX.5.4. Para que dos direcciones del plano tangente en M a Σ sean direcciones principales en este punto, es necesario y suficiente que sean a la vez **ortogonales** y **conjugadas**.

Demostración. Designemos por \vec{i}, \vec{j} dos vectores unitarios principales, por lo que las dos formas fundamentales en M son

$$\Phi_1(\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}) = \lambda^2 + \mu^2$$

$$\Phi_2(\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}) = \rho_1 \lambda^2 + \rho_2 \mu^2.$$

Para que dos vectores tangentes no nulos $\vec{V} = \lambda_\alpha \vec{i} + \mu_\alpha \vec{j} (\alpha = 1, 2)$ sean *ortogonales*, es necesario y suficiente que se tenga

$$(14) \quad \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 0;$$

y para que sus direcciones sean *conjugadas* es necesario y suficiente que se tenga

$$(15) \quad \rho_1 \lambda_1 \lambda_2 + \rho_2 \mu_1 \mu_2 = 0.$$

Puesto que es $\rho_1 \neq \rho_2$, las relaciones (14) y (15) equivalen a $\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 \mu_2 = 0$, o sea $\lambda_1 = \mu_2 = 0$, o $\lambda_2 = \mu_1 = 0$: Las direcciones de los vectores \vec{i}, \vec{j} son pues las únicas que son a la vez ortogonales y conjugadas.]]

De hecho, la determinación de las direcciones principales no es sino una interpretación geométrica del problema de la reducción simultánea de dos formas cuadráticas fundamentales (véase tomo 1, capítulo XIII).

507 Cálculo práctico de θg

Según (1) se tiene $\theta g = \left[\vec{h}, \frac{dM}{ds}, \frac{d\vec{h}}{ds} \right]$,

o sea

$$(16) \quad ds^2 \theta g = \phi_1^M \theta g = [\vec{h}, dM, d\vec{h}].$$

De modo más general, sea $\vec{\mathcal{N}} = \vec{h}$ una «función vector normal» en Σ (véase página 576). Según la ecuación (16) la torsión geodésica θg en la dirección de dM viene dada por la fórmula

$$(17) \quad \|\vec{\mathcal{N}}\|^2 ds^2 \theta g = \vec{\mathcal{N}}, [dM, d\vec{\mathcal{N}}].$$

Eligiendo con cuidado la función $\vec{\mathcal{N}}$, la ecuación (17) permite a menudo el cálculo rápido de θg .

§ IX.6 DETERMINACIÓN EFECTIVA DE LAS DIRECCIONES Y CURVATURAS PRINCIPALES

Para completar el estudio teórico que antecede, vamos a ver de qué modo se puede determinar las direcciones y curvaturas principales partiendo de una parametrización dada $F : D \rightarrow \mathcal{E}$ de la hoja Σ .

Direcciones principales

Por definición, un vector no nulo $\vec{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v}$, tangente a Σ en M es llamado *principal* si existe un real ρ que verifique

$$(1) \quad \psi_M(\vec{V}) = \rho \vec{V};$$

y este número ρ es la *curvatura principal* relativa a la dirección del vector \vec{V} .

Ahora bien, la relación (1) equivale al sistema.

$$(2) \quad \psi_M(\vec{V}) \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = \rho \vec{V} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \quad \psi_M(\vec{V}) \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = \rho \vec{V} \cdot \frac{\partial M}{\partial v}$$

(ya que los vectores $\partial M/\partial u$ y $\partial M/\partial v$ constituyen una base del plano vectorial T_M).

Con las notaciones ya utilizadas, se tiene

$$\vec{V} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = E\lambda + F\mu$$

$$\vec{V} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = F\lambda + G\mu$$

y aplicando las relaciones (5) del § 4

$$\psi_M(\vec{V}) \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = L\lambda + M\mu; \quad \psi_M(\vec{V}) \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = M\lambda + N\mu.$$

El sistema (2) se escribe

$$(3) \quad \boxed{\begin{array}{l} L\lambda + M\mu = \rho(E\lambda + F\mu) \\ M\lambda + N\mu = \rho(F\lambda + G\mu) \end{array}}.$$

Ahora bien, puesto que $EG - F^2 > 0$ y $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, se tiene

$$(E\lambda + F\mu, F\lambda + G\mu) \neq (0, 0);$$

por lo tanto:

Para que exista un número ρ que verifique (3), es necesario y suficiente que el par (λ, μ) verifique

$$(4) \quad \begin{vmatrix} L\lambda + M\mu & E\lambda + F\mu \\ M\lambda + N\mu & F\lambda + G\mu \end{vmatrix} = 0,$$

o sea

$$(4') \quad (FL - EM)\lambda^2 + (GL - EN)\lambda\mu + (GM - FN)\mu^2 = 0.$$

Para cada par (λ, μ) distinto de $(0, 0)$ que verifique (4), la dirección del vector

$$\vec{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v}$$

es una dirección principal de Σ en M . Comparando este resultado con la expresión de la torsión geodésica obtenida en el § 5, nos encontramos de nuevo con el hecho

de que las direcciones principales son las direcciones para las cuales la torsión geodésica es nula.

Caracterización de los puntos umbilicos

Para que el punto M sea umbilico, es necesario y suficiente que la ecuación (4) o (4') se reduzca a una *identidad*. Dicho de otro modo (al no ser todos nulos los números E, F, G), es necesario y suficiente que exista un número ρ que verifique

$$(5) \quad L = \rho E, \quad M = \rho F, \quad N = \rho G.$$

Esto equivale a decir que la segunda forma fundamental Φ_2^M es *proporcional* a la primera forma fundamental Φ_1^M , ya que (5) equivale a

$$(5') \quad \Phi_2^M = \rho \Phi_1^M;$$

este número ρ es entonces igual a la curvatura normal de Σ en una dirección cualquiera de T_M .

Cálculo de las curvaturas principales

Si M no es umbilical, las curvaturas principales vienen determinadas por las relaciones (3), donde (λ, μ) designa una solución no nula de (4).

La ecuación en curvaturas principales se obtiene eliminando λ, μ entre las ecuaciones (4); escribiendo que el determinante del sistema (4), con las incógnitas λ, μ , es nulo, se obtiene

$$(6) \quad \begin{vmatrix} L - \rho E & M - \rho F \\ M - \rho F & N - \rho G \end{vmatrix} = 0,$$

o sea

$$(6') \quad (EG - F^2) \rho^2 - \rho(LG + EN - 2FM) + LN - M^2 = 0.$$

Las curvaturas principales ρ_1, ρ_2 son las raíces de la ecuación (6'); se comprueba por otra parte fácilmente que el discriminante de (6') es positivo y que solamente es nulo si el punto M es umbilico.

Los puntos umbilicos son por lo tanto los puntos para los cuales la ecuación (6') admite una raíz doble.

Curvatura total y curvatura media

Sigamos designando por ρ_1, ρ_2 las curvaturas principales de Σ en M , conviniendo en que $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ si M es un punto umbilico (siendo entonces ρ el número que verifica (5)).

Por definición el número $K = \rho_1 \rho_2$ recibe el nombre de **curvatura total** de Σ en M ; el número $\gamma = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ recibe el nombre de **curvatura media** de Σ en M .

Al ser los números ρ_1, ρ_2 raíces de (6'), se tiene inmediatamente

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{LG + EN - 2FM}{H^2}.$$

Se podrá observar que la curvatura total K es el *determinante* del endomorfismo ψ_M y que el número 2γ es su *traza* (para verlo, basta utilizar una base (\vec{i}, \vec{j}) formada por vectores principales).

Observemos que la curvatura total es > 0 si M es elíptico, < 0 si M es hiperbólico y nula si M es parabólico.

Interpretación de la curvatura media

Volvamos a la fórmula que proporciona la curvatura normal en la dirección del vector $\vec{\tau} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$, donde (\vec{i}, \vec{j}) es una base formada por vectores principales, o sea $\rho_n = g(\varphi)$, con

$$g(\varphi) = \rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2 \sin^2 \varphi.$$

Se tiene inmediatamente, para todo $\varphi \in \mathbf{R}$,

$$g\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + g(\varphi) = \rho_1 + \rho_2;$$

de donde:

IX.6.1 *La curvatura media en un punto M de la hoja E es igual a la semisuma de las curvaturas normales relativas a dos direcciones ortogonales cualesquiera tangentes a Σ en M .*

Este resultado se utiliza en Física, principalmente en la teoría de la capilaridad.

Mediante un cálculo sencillo se ve, por otra parte, que la curvatura media es nula si, y solamente si, las direcciones asintóticas son reales y ortogonales. En este caso, las direcciones asintóticas son las bisectrices de las direcciones principales, y se deducen de esta por rotación de ángulo $\pm \pi/4$.

Las hojas cuya curvatura media es nula en todo punto desempeñan un papel importante en Física matemática: se las denomina **superficies mínimas**. Entre todas las superficies que contienen una curva cerrada dada C , las superficies mínimas son, en efecto, aquéllas que realizan el *mínimo* del área limitada por esta curva. Se puede obtener una realización material de ellas introduciendo un alambre (tomando la figura de la curva dada C) en agua de jabón: la «burbuja de jabón» así obtenida es (supuestas ciertas condiciones de regularidad), la superficie mínima buscada.

Las superficies mínimas han sido el origen de numerosas investigaciones, a la vez teóricas y experimentales. Más adelante daremos algunos ejemplos de las mismas.

Caso de una parametrización cartesiana

Supongamos la hoja Σ definida por una ecuación cartesiana de la forma $z = f(x, y)$, siendo la función numérica f de clase C^2 en un dominio plano D . Con las notaciones usuales (véase pp. 552 y 566) se tiene aquí

$$E = 1 + p^2 \quad F = pq \quad G = 1 + q^2 \quad H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$L = \frac{r}{H} \quad M = \frac{1}{H} \quad N = \frac{t}{H}.$$

La torsión geodésica en la dirección del vector tangente

$$\vec{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial x} + \mu \frac{\partial M}{\partial y},$$

es pues

$$\theta_g = -\frac{1}{H^2} \begin{vmatrix} (1 + p^2)\lambda + pq\mu & pq\lambda + (1 + q^2)\mu \\ r\lambda + s\mu & s\lambda + t\mu \end{vmatrix},$$

o sea

$$\theta_g = \frac{1}{1 + p^2 + q^2} \left([pqr - s(1 + p^2)] \lambda^2 + [r(1 + q^2) - t(1 + p^2)] \lambda\mu + [s(1 + q^2) - pqt] \mu^2 \right).$$

El haz de las direcciones principales en el punto $[x, y, f(x, y)]$ viene definido por

$$[pqr - s(1 + p^2)] dx^2 + [r(1 + q^2) - t(1 + p^2)] dx dy + [s(1 + q^2) - pqt] dy^2 = 0.$$

La ecuación en las curvaturas principales es pues

$$\begin{vmatrix} \frac{r}{H} - (1 + p^2) \rho & \frac{s}{H} - pq\rho \\ \frac{1}{H} - pq\rho & \frac{t}{H} - (1 + q^2) \rho \end{vmatrix} = 0,$$

o sea

$$(1 + p^2 + q^2) \rho^2 - [t(1 + p^2) + r(1 + q^2) - 2 pqs] \rho + \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2} = 0$$

La curvatura total de Σ es por lo tanto

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2};$$

su curvatura media es

$$\gamma = \frac{t(1 + p^2) + r(1 + q^2) - 2 pqs}{2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}.$$

§ IX.7 EJEMPLOS

En lo sucesivo, vamos a considerar hojas Σ de \mathcal{E} , definidas por parametrizaciones de clase C^2 de la forma $F: D \rightarrow \mathcal{E}$, $M \mapsto M(u, v)$. Utilizaremos preferentemente notaciones diferenciales, lo que equivale a designar por

$$dM = \frac{\partial M}{\partial u} du + \frac{\partial M}{\partial v} dv$$

un vector cualquiera tangente a Σ . Las dos *formas fundamentales* serán pues designadas simplemente por

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \\ \Phi_2 &= L du^2 + 2 M du dv + N dv^2. \end{aligned}$$

Las *direcciones asintóticas* vienen entonces definidas por

$$L du^2 + 2 M du dv + N dv^2 = 0$$

y las *direcciones principales* son definidas por:

$$\begin{vmatrix} L du + M dv & E du + F dv \\ M du + N dv & F du + G dv \end{vmatrix} = 0.$$

Finalmente, la *curvatura normal* ρ relativa a una dirección principal (du, dv) viene dada por

$$L du + M dv = \rho(E du + F dv) \quad M du + N dv = \rho(F du + G dv).$$

Observaciones importantes

1. Para que las direcciones principales en el punto $M(u, v)$ sean las de las tangentes a las líneas coordenadas, es necesario y suficiente (si M no es un punto umbilico) que se tenga $F = 0$ y $M = 0$.

En este caso, la curvatura principal en la dirección del vector $\partial M / \partial u$ (definida por $dv = 0$) es $\rho_1 = L/E$; la curvatura principal en la dirección del vector $\partial M / \partial v$ (definida por $du = 0$) es $\rho_2 = N/G$.

2. Si se tiene $E = G$ y $F = 0$, la condición de ortogonalidad de dos vectores tangentes

$$\vec{V}_i = \lambda_i \frac{\partial M}{\partial u} + \mu_i \frac{\partial M}{\partial v} \quad (i = 1, 2)$$

se reduce a $\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 0$.

Para que las direcciones asintóticas sean ortogonales es entonces necesario y suficiente que se tenga $L + N = 0$ (véase § II.7).

3. Para que un punto $M(u, v)$ de Σ sea *regular*, es necesario y suficiente que la primera forma fundamental en este punto sea *no degenerada* (es decir que se tenga $EG - F^2 \neq 0$): esta observación dispensa de discutir *a priori* la regularidad de Σ .

En la práctica, no intentaremos comprobar si las hojas consideradas son simples; nos basta saber que en el entorno de todo punto regular, nos podemos limitar al caso de una subhoja simple.

Hojas de revolución

Provisto el espacio \mathcal{E} de un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sea Σ la *hoja de revolución* de eje Oz definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$(1) \quad x = f(u) \cos v \quad y = f(u) \operatorname{sen} v \quad z = g(u) \quad (u \in I, v \in \mathbf{R}),$$

donde f, g designan dos funciones numéricas de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} .

Los vectores $\partial M / \partial u$, $\partial M / \partial v$, $\partial^2 M / \partial u^2$, $\partial^2 M / \partial u \partial v$, $\partial^2 M / \partial v^2$ admiten respectivamente las siguientes componentes

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial M}{\partial u} \begin{vmatrix} f'(u) \cos v \\ f'(u) \operatorname{sen} v \\ g'(u) \end{vmatrix} & \frac{\partial M}{\partial v} \begin{vmatrix} -f(u) \operatorname{sen} v \\ f(u) \cos v \\ 0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \begin{vmatrix} f''(u) \cos v \\ f''(u) \operatorname{sen} v \\ g''(u) \end{vmatrix} & \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \begin{vmatrix} -f'(u) \operatorname{sen} v \\ f'(u) \cos v \\ 0 \end{vmatrix} & \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \begin{vmatrix} -f(u) \cos v \\ -f(u) \operatorname{sen} v \\ 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

De ahí se deduce

$$E = f'^2 + g'^2, \quad F = 0, \quad G = f^2, \quad H = |f| \sqrt{f'^2 + g'^2}$$

$$L = \frac{1}{H} f(f' g'' - f'' g'), \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{H} f^2 g';$$

de donde se obtienen las formas fundamentales:

$$\Phi_1 = (f'^2 + g'^2) du^2 + f^2 dv^2$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{H} [f(f' g'' - f'' g') du^2 + f^2 g' dv^2].$$

Para que un punto $M(u, v)$ sea *regular*, es necesario y suficiente que se tenga $f \neq 0$ y $f'^2 + g'^2 \neq 0$; para que tal punto sea *umbilico*, es necesario y suficiente que las formas Φ_1 y Φ_2 sean proporcionales, es decir que se tenga

$$f^2 g'(f'^2 + g'^2) - f^3(f' g'' - f'' g') = 0,$$

o sea

$$g' f'^2 + g'^3 - f f' g'' + f f'' g' = 0.$$

En un punto regular que no sea umbilico, las tangentes principales son, la tangente al meridiano (definido por $v = \text{Cte}$), y la tangente al paralelo (definido por $u = \text{Cte}$) (véase la observación 1 anterior).

La parametrización anterior no permite estudiar la hoja en los puntos situados sobre su eje de revolución (ya que estos puntos, dados por $f(u) = 0$, son singulares para la parametrización considerada).

Situémonos ahora en el punto de vista de las subvariedades de \mathcal{E} (véase § VIII.8). Diremos que una subvariedad S de \mathcal{E} es de revolución alrededor de una recta Δ si el conjunto S permanece invariante en toda rotación de eje Δ . Hemos visto ya que en todo punto de S situado sobre Δ , el plano tangente a S es ortogonal a Δ . Por otra parte, la curvatura normal de un arco trazado sobre S permanece invariante si se somete este arco a una rotación cualquiera de eje Δ . De ahí se deduce que la curvatura normal de S , en un punto P situado sobre Δ , es la misma en todas las direcciones; por lo tanto *todos los puntos de una superficie de revolución situados sobre su eje son puntos umbilicos*.

En particular, nos encontramos de nuevo con el hecho de que todos los puntos de una esfera son umbilicos.

Ejemplos de hojas de revolución

1. Sea Σ la hoja de revolución definida por

$$x = \cosh u \cos v \quad y = \cosh u \operatorname{sen} v \quad z = u.$$

Se verifica que esta parametrización es regular. Se tiene

$$\Phi_1 = \cosh^2 u (du^2 + dv^2) \quad \Phi_2 = dv^2 - du^2$$

Las direcciones principales están definidas por $du = 0$, $dv = 0$.

Las direcciones asintóticas (definidas por $dv \pm du = 0$) son las bisectrices de las direcciones principales, de donde resulta que la curvatura media de Σ es nula; en otros términos: Σ es una *superficie mínima*.

Se puede demostrar que el soporte de Σ es una subvariedad de \mathcal{E} denominada *catenoide*; se puede demostrar también que esta superficie es (salvo por una semejanza) *la única superficie de revolución que es a la vez una superficie mínima* (véase ejercicio IX.38).

2. Sea Σ la hoja de revolución definida por

$$(2) \quad x = \frac{1}{\cosh u} \cos v, \quad y = \frac{1}{\cosh u} \operatorname{sen} v, \quad z = u - \operatorname{tgh} u \quad (u, v \in \mathbf{R}).$$

Si se designa por γ la *catenaria* de ecuaciones $x = \cosh u$, $y = 0$, $z = u$, se puede comprobar que Σ es engendrada por la rotación, alrededor de Oz , de la *evolvente* δ de γ que pasa por el punto $A = (1, 0, 0)$ (véase ejercicio VII.19 y véase la figura 2); la curva δ se dice que es una *tractriz*.

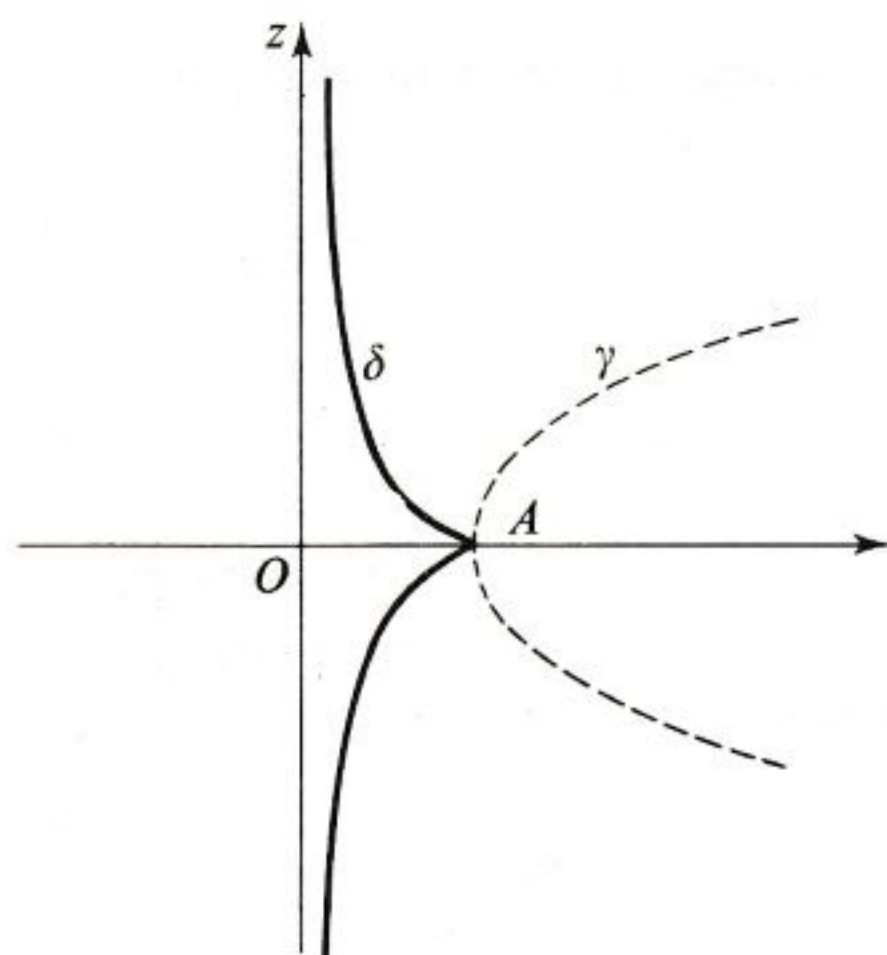


Figura 2.

Esta parametrización es de la forma (1) con $f(u) = 1/\cosh u$, $g(u) = u - \operatorname{tgh} u$. Se tiene aquí

$$f'(u) = -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u} g'(u) = \frac{\sinh^2 u}{\cosh^2 u}, \text{ de donde } H = \frac{|\sinh u|}{\cosh^2 u}$$

$$f' g'' - f'' g' = f'^2 \frac{d}{du} \frac{g'}{f'} = -f'^2 \cosh u = -\frac{\sinh^2 u}{\cosh^3 u},$$

y las dos formas fundamentales, son

$$\Phi_1 = \operatorname{tgh}^2 u \, du^2 + \frac{1}{\cosh^2 u} \, dv^2$$

$$\Phi_2 = \frac{|\sinh u|}{\cosh^2 u} (dv^2 - du^2).$$

La primera forma fundamental es no degenerada si (y solamente si) se tiene $u \neq 0$; luego todo punto $M(u, v)$ tal que $u \neq 0$ es regular (el punto de parámetro $u = 0$ es un punto estacionario de la semimeridiana δ).

Las curvaturas principales correspondientes respectivamente a las direcciones principales $dv = 0$, $du = 0$, son

$$\rho_1 = \frac{1}{|\sinh u|} \quad \rho_2 = -|\sinh u|.$$

La curvatura total de Σ es pues constante e igual a -1 . La hoja definida por (2) recibe el nombre de **pseudoesfera**.

Un ejemplo de superficie reglada: El helicoides recto

Referido el espacio \mathcal{E} a un sistema ortonormal directo, sea Σ la hoja definida por las ecuaciones paramétricas:

$$(3) \quad x = av \cos u, \quad y = av \operatorname{sen} u, \quad z = bu \quad (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}, a \neq 0, b \neq 0).$$

Es la *hoja conoide* engendrada por las normales principales a la hélice circular de ecuaciones paramétricas $x = a \cos u$, $y = a \operatorname{sen} u$, $z = bu$. Su soporte recibe el nombre de **helicoides recto** (queda realizado aproximadamente por las escaleras de caracol).

Mediante cálculos sencillos se tiene aquí

$$\Phi_1 = (a^2 v^2 + b^2) du^2 + a^2 dv^2, \quad \Phi_2 = \frac{a^2 b}{H} du dv,$$

con $H = \sqrt{a^2 v^2 + b^2}$.

Esta hoja es regular (ya que en todas partes se tiene $H(u, v) \neq 0$).

Las líneas coordenadas son las generatrices G_u (definidas por $u = \text{Cte}$) y las hélices circulares Γ_v , obtenidas para $v = \text{Cte}$, que son mutuamente ortogonales (véase la figura 3).

Las direcciones asintóticas vienen dadas por $du = 0$, $dv = 0$, y por lo tanto las tangentes asintóticas son las tangentes a las líneas coordenadas; al ser ortogonales, resulta que la curvatura media de Σ es nula en todo punto. Por lo tanto Σ es una superficie mínima; se puede demostrar que las únicas superficies mínimas *regladas* son (salvo semejanzas) subhojas de Σ (ejercicio IX.15).

Las direcciones y curvaturas principales vienen definidas por el sistema

$$\frac{a^2 b}{H} dv = \rho(a^2 v^2 + b^2) du, \quad \frac{a^2 b}{H} du = \rho a^2 dv.$$

Eliminando ρ se ve que las direcciones principales están definidas por

$$a^2 dv^2 = (a^2 v^2 + b^2) du^2;$$

al eliminar du , dv se obtiene la ecuación en curvaturas principales

$$(a^2 v^2 + b^2) \rho^2 - \frac{a^2 b^2}{H^2} = 0,$$

o sea,

$$(a^2 v^2 + b^2)^2 \rho^2 - b^2 = 0.$$

Se comprueba que su suma es nula

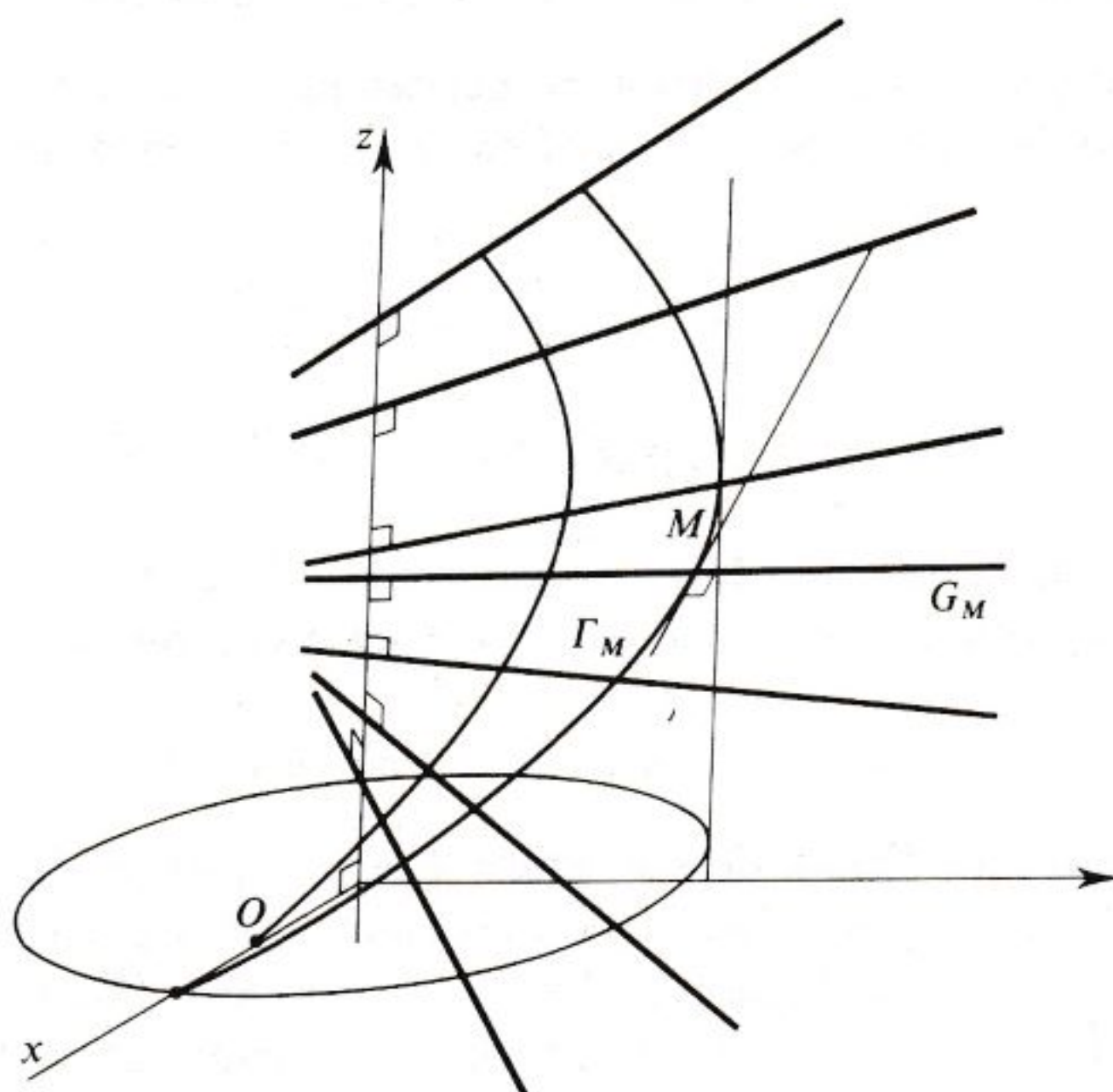


Figura 3.

§ IX.8 CURVAS NOTABLES TRAZADAS SOBRE UNA HOJA

En la teoría de superficies, los arcos para los cuales una de las funciones ρ_n , ρ_g , θ_g (definidas en el § 2) es nula desempeñan un papel importante.

Definición IX.8.1

- Un arco regular, trazado sobre una hoja regular Σ se dice que es
- una **línea de curvatura** si su torsión geométrica θ_g es la función nula;
 - una **línea asintótica** si su curvatura normal ρ_n es la función nula;
 - una **geodésica** si su curvatura geodésica ρ_g es la función nula.

El estudio que antecede muestra inmediatamente que las líneas de curvatura [resp. las líneas asintóticas] son los arcos regulares cuya tangente en cada punto M es una **tangente principal** [resp. una **tangente asintótica**] a Σ en M .

Con las notaciones de los §§ anteriores, resulta

IX.8.1 Sea Σ una hoja simple y regular definida por la parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$; y sea γ el arco, trazado sobre Σ , definido por la parametrización

$$I \rightarrow \mathcal{E}, \quad t \mapsto F(u(t), v(t)),$$

donde u, v designan dos funciones numéricas de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} , cuyas derivadas no se anulan simultáneamente.

a) Para que γ sea una **línea de curvatura** de Σ , es necesario y suficiente que las funciones u, v verifiquen la ecuación diferencial

$$(1) \quad \begin{vmatrix} Lu' + Mv' & Eu' + Fv' \\ Mu' + Nv' & Fu' + Gv' \end{vmatrix} = 0,$$

o sea:

$$(FL - EM) u'^2 + (GL - EN) u' v' + (GM - FN) v'^2 = 0.$$

b) Para que γ sea una **línea asintótica** de Σ , es necesario y suficiente que las funciones u, v verifiquen la ecuación diferencial

$$(2) \quad Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 = 0.$$

En otros términos, las líneas de curvatura [resp. las líneas asintóticas] de Σ son las imágenes por F de los arcos planos regulares, de soporte contenido en D que verifican la ecuación diferencial (1) [resp. la ecuación diferencial (2)].

Puesto que las condiciones (1) y (2) permanecen invariantes en todo cambio de parámetro admisible sobre γ , las pondremos en la forma diferencial simbólica

$$(1') \quad \begin{vmatrix} L du + M dv & E du + F dv \\ M du + N dv & F du + G dv \end{vmatrix} = 0$$

$$(2') \quad L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0.$$

Si $\vec{\mathcal{N}}$ es una «función vector normal» cualquiera en Σ (véase pág. 576), las ecuaciones (1') y (2') son respectivamente equivalentes a las siguientes (véanse páginas 576 y 583).

$$(1'') \quad [\vec{\mathcal{N}}, dM, d\vec{\mathcal{N}}] = 0, \quad (2'') \quad dM \cdot d\vec{\mathcal{N}} = 0.$$

Eligiendo con cuidado la función $\vec{\mathcal{N}}$, las fórmulas (1'') y (2'') permiten a menudo determinar rápidamente las ecuaciones de líneas de curvatura y asintóticas.

La existencia de soluciones de estas ecuaciones diferenciales será discutida más adelante (§ 9). Veremos entonces que si Σ es de clase C^k con $k \geq 3$:

- por cada punto M de Σ no umbilico, pasan dos arcos regulares de clase C^{k-1} , que son *líneas de curvatura* de Σ y que son tangentes respectivamente a las dos direcciones principales de Σ en M ;

- por cada punto *hiperbólico* M de Σ , pasan dos arcos regulares de clase C^{k-1} , que son *líneas asintóticas* de Σ , y que son tangentes respectivamente a las dos direcciones asintóticas de Σ en M .

De momento, nos limitaremos a las observaciones siguientes, que en la práctica resultan muy útiles:

IX.8.2 a) Para que las líneas coordenadas de Σ , relativas a la parametrización $F: D \rightarrow \mathcal{E}$, sean líneas asintóticas de Σ , es necesario y suficiente que se tenga en todo punto de Σ : $L = 0$ y $N = 0$.

b) Para que las líneas coordenadas sean líneas de curvatura, es necesario y suficiente que en todo punto de Σ , que no sea umbilico, se tenga:

$$F = 0 \quad \text{y} \quad M = 0.$$

Demostración

a) Para que las líneas coordenadas sean líneas asintóticas, es necesario y suficiente que la ecuación (2) se cumpla cuando se tiene $u' = 0$ o $v' = 0$, de donde el resultado.

b) Para que las líneas coordenadas sean líneas de curvatura, es necesario y suficiente que en todo punto de Σ que no sea umbilico, las direcciones principales sean las de los vectores $\partial M / \partial u$, $\partial M / \partial v$, y hemos visto ya que ello se cumple si (y solamente si) se tiene $F = 0$ y $M = 0$. Se vuelve a encontrar este resultado poniendo que la ecuación (1) se cumple si $u' = 0$ o $v' = 0$, y así se obtienen las relaciones $FL - EM = 0$, $GM - FN = 0$, de donde (si $GL - EN \neq 0$, es decir si M no es umbilico) $F = M = 0$.]

Caso de una parametrización cartesiana

Supongamos que Σ esté definida por una ecuación cartesiana de la forma $z = f(x, y)$. Con las notaciones introducidas en la página 566, se ve que la ecuación diferencial de las asintóticas, es

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0,$$

mientras que la de las líneas de curvatura, es

$$\begin{vmatrix} r dx + s dy & (1 + p^2) dx + pq dy \\ s dx + t dy & pq dx + (1 + q^2) dy \end{vmatrix} = 0.$$

Las ecuaciones diferenciales que determinan las geodésicas se establecerán en el § 10.

Propiedades geométricas

Sea γ un arco regular de clase C^p con $p \geq 2$, trazado sobre Σ . En todo punto M de γ que no sea de inflexión, se tiene (véase § 2)

$$\rho_n = \rho \cos \alpha, \quad \rho_g = \rho \sin \alpha,$$

donde ρ designa la curvatura de γ y α una de las determinaciones del ángulo (\vec{v}, \vec{h}) .

Puesto que se tiene $\rho \neq 0$ en el punto M considerado, la relación $\rho \cos \alpha = 0$ equivale a $\cos \alpha = 0$, o sea $\vec{v} = \pm \vec{g}$ (véase fig. 1, p. 561). Para que la curvatura normal de γ en el punto M sea nula es necesario y suficiente que el plano osculador en M a γ sea el plano tangente a Σ en M .

Del mismo modo, la relación $\rho \sin \alpha = 0$ equivale a $\sin \alpha = 0$, o sea $\vec{v} = \pm \vec{h}$ (véase la figura 1). Para que la curvatura geodésica de γ en el punto M sea nula, es necesario y suficiente que el plano osculador a γ en M sea *normal* a Σ en M .

Por otra parte, si M es un punto de inflexión de γ , se tiene $\rho_n = \rho_g = 0$ (véase página 557). De ahí se deduce

IX.8.3 Para que un arco regular γ de clase C^p ($p \geq 2$), trazado sobre Σ , sea una **línea asintótica** [resp. una **línea geodésica**] de Σ es necesario y suficiente que en todo punto de γ que no sea de inflexión, el plano osculador a γ sea **tangente** [resp. **normal**] a Σ en ese punto.

En particular, observemos que todo *intervalo de recta* contenido en el soporte de Σ , es a la vez una línea asintótica y una línea geodésica de Σ .

Dos caracterizaciones de las líneas de curvatura

Sea γ un arco regular trazado sobre Σ , definido por la parametrización normal $s \mapsto P(s) = M(u(s), v(s))$ y sea como siempre \vec{h} el vector unitario normal a Σ en el punto $P(s)$.

a) Para que la torsión geodésica de γ sea nula, es necesario y suficiente, según las fórmulas de Darboux (fórmulas (5), p. 556), que exista una función numérica $\rho : s \mapsto \rho(s)$ que verifique

$$(3) \quad \frac{d\vec{h}}{ds} = -\rho \vec{\tau}, \quad \text{o sea} \quad \frac{d\vec{h}}{ds} + \rho \frac{dP}{ds} = 0,$$

y esta función ρ es entonces igual a la curvatura normal ρ_n de γ .

Pondremos la relación (3) en forma diferencial

$$(4) \quad \boxed{d\vec{h} + \rho dP = 0}.$$

Se ve entonces que la relación (4) caracteriza a las líneas de curvatura, cualquiera que sea el parámetro que se elija. Esta fórmula es la *fórmula de Olinde Rodrigues*.

Se vuelve a encontrar observando que $d\vec{h}/ds$ es la imagen, por el endomorfismo ψ_M , de dP/ds (véase § 4). La relación (3) expresa simplemente que dP/ds es un vector propio de este endomorfismo.

b) Según las fórmulas de Darboux (p. 556) la torsión geodésica de γ es

$$\theta_g = - \left[\vec{\tau}, \vec{h}, \frac{d\vec{h}}{ds} \right] = - \left[\frac{dP}{ds}, \vec{h}, \frac{d\vec{h}}{ds} \right].$$

Designemos por δ la hoja reglada definida por la parametrización

$$(s, v) \mapsto P(s) + v \vec{h}(s),$$

que es la *hoja reglada engendrada por las normales a Σ a lo largo de γ* . Según la definición VIII.7.1, la relación $[dP/ds, \vec{h}, d\vec{h}/ds] = 0$ es la condición necesaria y suficiente para que la hoja δ sea *desarrollable*. Enunciaremos,

IX.8.4 Para que un arco regular γ trazado sobre la hoja Σ sea una **línea de curvatura**, es necesario y suficiente que la hoja reglada engendrada por las normales a Σ a lo largo de γ sea **desarrollable**.

Para precisar este resultado, consideremos a la desarrollable engendrada por las normales a Σ a lo largo de una línea de curvatura γ y busquemos el *punto característico* Q de la normal a Σ en un punto $M = P(s)$ de γ (véase el final del § VIII.7). Se ve fácilmente que este punto existe si la curvatura normal ρ de γ en el punto M es no nula; es entonces el único punto $Q = M + v\vec{h}$ tal que el vector $dP/ds + v d\vec{h}/ds$ sea colineal con \vec{h} . Según la relación (3) es el *centro de curvatura normal* Ω de γ en M (definido por $\Omega = M + 1/\rho \vec{h}$); en otros términos, es el *centro de curvatura principal* de Σ que corresponde a la tangente a γ en M .

Las desarrollables engendradas por las normales a una hoja Σ a lo largo de sus líneas de curvatura reciben el nombre de *evolutas* de Σ ; estas superficies desempeñan un papel importante en Óptica geométrica (teoría de las cáusticas y del estigmatismo).

Ejemplos

Sea Σ el *helicoide* definido, en un sistema de referencia ortonormal directo, por las ecuaciones paramétricas

$$x = av \cos u, \quad y = av \sin u, \quad z = bu \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

Su segunda forma fundamental ha sido determinada en la página 593, o sea

$$\Phi_2 = \frac{a^2 b}{H} du dv.$$

Las líneas coordenadas, definidas por $u = \text{Cte}$ y $v = \text{Cte}$, son pues asintóticas de Σ . Se comprueba fácilmente que no existen otras.

2. Sea Σ la *hoja de revolución* definida por la parametrización

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = g(u).$$

En todo punto regular de Σ que no sea umbilico, las direcciones principales son las de las tangentes a las líneas coordenadas (véase p. 591). De ello resulta que las líneas coordenadas de Σ son líneas de curvatura; si Σ no tiene puntos umbilicos, son las únicas.

Se comprueba aquí que las normales a Σ a lo largo de las líneas coordenadas engendran desarrollables. En efecto, en primer lugar, las normales a Σ a lo largo del *meridiano* definido por $u = \text{Cte}$ engendran un cono o un cilindro de revolución según que corten al eje de revolución o le sean paralelas.

Por otra parte, se ve inmediatamente que los meridianos de una hoja de revolución Σ son *geodésicas*, ya que son curvas planas cuyo plano es *normal* a Σ en cada uno de sus puntos. Pero no son las únicas geodésicas de Σ (véase § 10).

3. De un modo más general, sea Σ una hoja cuyo soporte S admite un *plano de simetría ortogonal*, llamémosle P . Salvo excepciones, este plano P es entonces normal a Σ en cada punto de la intersección de los conjuntos S , P . Si es así, y si la intersección $S \cap P$ es el soporte de un arco regular γ , entonces γ es a la vez una *línea de curvatura* y una *geodésica* de Σ . En efecto, las normales a Σ a lo largo de γ están contenidas en el plano P , por lo tanto engendran una desarrollable; el plano osculador a γ , que no es otro que P , es normal a Σ en cada punto de γ .

En particular, los círculos máximos de una esfera son geodésicas de esta esfera.

4. Vamos a demostrar mediante un razonamiento riguroso que *las únicas geodésicas de una esfera son los arcos de círculo máximo de esta esfera*.

Sea en efecto γ una línea geodésica de una esfera S de \mathcal{E} . Al ser todo punto de S elíptico, el arco γ no puede admitir puntos de inflexión (véase p. 570). Admite por lo tanto en todo punto un plano osculador normal a S , es decir que pasa por el centro O de S . Como la tangente a γ no pasa nunca por O , la proposición V.8.4 demuestra que el soporte de γ está contenido en un plano que pasa por O , de donde el resultado.

5. Según una observación ya hecha, las generatrices de un *hiperboloide de una hoja* o de un *paraboloide hiperbólico* son, a la vez, asintóticas y geodésicas de estas superficies. La proposición IX.9.4 permitirá demostrar que son las únicas asintóticas de esta superficie. Por el contrario, admiten otras geodésicas (véase § 10): por ejemplo, las secciones de un hiperboloide de una hoja por sus planos de simetría son también líneas geodésicas.

6. Sea Σ una subhoja regular de una **hoja desarrollable**. Se ve inmediatamente que las únicas *asintóticas* de Σ son sus generatrices.

Estas generatrices constituyen igualmente una familia de *líneas de curvatura*; la otra familia está constituida por las trayectorias ortogonales de las generatrices. Estos resultados son válidos, en particular, para las *hojas cónicas y cilíndricas*.

7. Sea Σ una **hoja cilíndrica** regular de generatrices paralelas a la dirección δ . Las *geodésicas* de Σ son los arcos trazados sobre E cuya normal principal es ortogonal a δ (ya que la normal principal a una geodésica es normal a la hoja). Resulta de ello que las geodésicas de Σ son **hélices** de eje δ (véase § VI.12).

8. El plano osculador a un arco plano (si existe) no puede ser normal al plano que contiene el soporte del arco. Se deduce de ello que las geodésicas de una hoja plana son arcos cuyos puntos son todos de inflexión: en consecuencia, *las geodésicas de un plano son las rectas de este plano* (véase prop. V.8.1).

§ IX.9 ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA FORMA $A du^2 + 2 B du dv + C dv^2 = 0$. DETERMINACIÓN DE LAS ASINTÓTICAS Y DE LAS LÍNEAS DE CURVATURA

La investigación de las asintóticas y de las líneas de curvatura de una hoja geométrica se reduce, según hemos visto ya, a la determinación de los pares (u, v) de funciones numéricas que verifican una *ecuación diferencial* de la forma

$$(1) \quad A(u, v) u'^2 + 2 B(u, v) u' v' + C(u, v) v'^2 = 0,$$

donde A, B, C designan funciones numéricas *continuas* dadas en un dominio D de \mathbf{R}^2 ; la naturaleza geométrica del problema nos obliga a buscar solamente las soluciones (u, v) de (1) cuyas derivadas no se anulen simultáneamente.

En otros términos, buscamos los *arcos parametrizados regulares*, de soporte contenido en D , cuyo vector tangente $(u'(t), v'(t))$ verifique (1) en cada punto.

La teoría de ecuaciones diferenciales (véase tomo 4, cap. III) no se aplica aquí directamente, ya que tenemos una sola ecuación diferencial con dos incógnitas u, v . Pero si (u, v) es una parametrización que verifica (1), entonces toda parametrización $(u \circ \theta, v \circ \theta)$ deducida de ella mediante un cambio de parámetro derivable, sigue siendo solución de (1).

La integración de (1) equivale pues al problema geométrico siguiente: encontrar los arcos geométricos regulares, de soporte contenido en D , cuya tangente, en cada punto (u, v) de su soporte, admite como dirección a una de las rectas vectoriales del haz definido por la ecuación

$$(2) \quad A(u, v) X^2 + 2 B(u, v) XY + C(u, v) Y^2 = 0.$$

Las soluciones de (1) son entonces las parametrizaciones admisibles de estos arcos.

Para abreviar, los arcos geométricos de clase C^1 cuyas parametrizaciones admisibles verifican (1) recibirán el nombre de **curvas integrales** de la ecuación diferencial

$$(3) \quad A(u, v) du^2 + 2 B(u, v) du dv + C(u, v) dv^2 = 0.$$

Una curva integral de (3) se dirá que es *maximal* si no existe ninguna curva integral Γ de la cual γ sea un subarco estricto.

Para que exista por lo menos una curva integral de (3) que pase por un punto (u, v) de D , es *necesario* que la ecuación (2) tenga una solución (X, Y) distinta de la solución nula. Para discutir la existencia de curvas integrales estableceremos las definiciones siguientes.

Definición IX.9.1

Un punto (u, v) de D se dice que es **hiperbólico** para la ecuación (3) si se tiene: $B^2(u, v) - A(u, v) C(u, v) > 0$; se dice que es **elíptico** [resp. **parabólico**] si $B^2(u, v) - A(u, v) C(u, v) < 0$ [resp. si $B^2(u, v) - A(u, v) C(u, v) = 0$].

Integración local de (3)

La idea más natural para el estudio de la ecuación (3) consiste en factorizar su primer miembro (si ello es posible) escribiéndola en la forma

$$(4) \quad (P_1 du + Q_1 dv) (P_2 du + Q_2 dv) = 0;$$

veremos más adelante que esta operación es posible, *localmente*, en el entorno de cada punto hiperbólico de (3).

Se tiene en primer lugar:

IX.9.1 Sean P_i, Q_i ($i = 1, 2$) funciones numéricas continuas en un abierto U de \mathbf{R}^2 , tales que el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix}$$

sea **no nulo** en todo punto de U .

Para que un arco regular γ de clase C^k ($k \geq 1$) sea una curva integral de la ecua-

(5) $\left\| \begin{array}{l} \text{ción (4), es necesario y suficiente que sea una curva integral de una de las ecuaciones diferenciales} \\ P_1 du + Q_1 dv = 0 \quad P_2 du + Q_2 dv = 0. \end{array} \right.$

Demostración. Es evidente que toda curva integral de una de las ecuaciones (5) es curva integral de (4).

Inversamente, sea γ una curva integral de (4) definida por la parametrización

$$I \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (u(t), v(t));$$

y sea E_i ($i = 1, 2$) el conjunto de los $t \in I$ que verifican

(6) $P_i u'(t) + Q_i v'(t) = 0.$

Es evidente que se tiene $E_1 \cup E_2 = I$; por otra parte, puesto que γ es regular y se tiene $P_1(t) Q_2(t) - P_2(t) Q_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, no existe ningún valor de t que verifique (6) a la vez para $i = 1$ y para $i = 2$. Se tiene pues $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Finalmente, si γ es de clase C^1 , las funciones $P_i u' + Q_i v'$ ($i = 1, 2$) son continuas, y de ahí resulta que E_1, E_2 son cerrados relativos de I (véase tomo 2, p. 102).

Ahora bien, al ser I conexo, no puede existir ninguna *partición* de I en dos cerrados relativos E_1, E_2 . Se tiene pues $I = E_1$ o $I = E_2$, de donde el resultado.]

Este resultado reduce la determinación de las curvas integrales de (4) a la de las curvas integrales de las dos ecuaciones diferenciales (5).

Ahora bien, puesto que hemos supuesto que P_i y Q_i verifican en todas partes $P_i, Q_i \neq (0, 0)$, las curvas integrales de la ecuación diferencial

(7) $P_i(u, v) du + Q_i(u, v) dv = 0$

son las trayectorias del campo de vectores de componentes $(Q_i - P_i)$.

Si las funciones P_i, Q_i , son de clase C^r con $r \geq 1$, la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales asegura la existencia de una curva integral maximal única de (7) que pasa por un punto dado (u_0, v_0) de U (véase tomo 4, p. 176); se puede demostrar entonces que esta trayectoria es un arco regular de clase C^{r+1} (véase tomo 4, prop. I.2.1). De ahí se deduce

IX.9.2 Sean P_i, Q_i ($i = 1, 2$) dos funciones numéricas de clase C^r en un abierto U de \mathbf{R}^2 , tales que la función $\Delta = P_1 Q_2 - P_2 Q_1$ no se anula en U . Por cada punto $m_0 = (u_0, v_0)$ de U pasan entonces exactamente dos arcos regulares de clase C^{r+1} que son las únicas curvas integrales maximales de la ecuación diferencial

(4) $(P_1 du + Q_1 dv)(P_2 du + Q_2 dv) = 0$

que pasan por este punto.

Nos queda por demostrar que, con hipótesis adecuadas, la ecuación diferencial (3) se reduce localmente a una ecuación de la forma (4) en el entorno de cada punto hiperbólico.

Sean en efecto A, B, C , tres funciones numéricas de clase C^1 en un dominio D de \mathbf{R}^2 y sea $m_0 = (u_0, v_0)$ un punto de D que verifica $\delta(m_0) > 0$, con

$$\delta(m) = B^2(m) - A(m) C(m).$$

a) Si los números $A(m_0)$ y $C(m_0)$ no son ambos nulos, supongamos para fijar ideas $A(m_0) \neq 0$. Por continuidad, existe entonces un entorno abierto U de m_0 en el cual se tiene $A(m) \neq 0$ y $\delta(m) > 0$.

En este entorno U se tiene

$$A du^2 + 2 B du dv + C dv^2 = (P_1 du + Q_1 dv) (P_2 du + Q_2 dv),$$

con

$$P_1 = A, \quad P_2 = 1, \quad Q_1 = B - \sqrt{\delta}, \quad Q_2 = \frac{B + \sqrt{\delta}}{A}.$$

b) Si $A(m_0) = C(m_0) = 0$ se tiene necesariamente $B(m_0) \neq 0$, y nos podemos limitar al caso en que $B(m_0) > 0$. Por continuidad existe entonces un entorno abierto U de m_0 en el cual se tiene $B > 0$, $\delta > 0$ y $A + C + 2B > 0$.

En ese entorno U , es

$$A du^2 + 2 B du dv + C dv^2 = (P_1 du + Q_1 dv) (P_2 du + Q_2 dv),$$

con

$$P_1 = \frac{A + B - \sqrt{\delta}}{L}, \quad P_2 = \frac{A + B + \sqrt{\delta}}{L}, \quad Q_1 = \frac{B + C + \sqrt{\delta}}{L}$$

$$Q_2 = \frac{B + C - \sqrt{\delta}}{L} \quad \text{y} \quad L = \sqrt{A + C + 2B}$$

(esta construcción equivale a aplicar la primera fórmula, sustituyendo du, dv por $du - dv$ y $du + dv$).

En cada uno de los casos las funciones obtenidas P_1, P_2, Q_1, Q_2 son de clase C^1 lo mismo que A, B, C , y verifican $P_1 Q_2 - P_2 Q_1 \neq 0$ (siendo esta última relación consecuencia inmediata de $\delta > 0$).

Agrupando los resultados obtenidos, tenemos

Teorema IX.9.3

Sean A, B, C tres funciones numéricas de clase C^r en un dominio D de \mathbf{R}^2 y sea m_0 un punto de D .

Si el punto m_0 es un punto **elíptico** de la ecuación diferencial

$$(3) \quad A du^2 + 2 B du dv + C dv^2 = 0,$$

por m_0 no pasa ninguna curva integral de esta ecuación.

Si el punto m_0 es **hiperbólico** de la ecuación (3), existe un abierto U que contiene a m_0 tal que, por cada punto m de U , pasan exactamente dos arcos regulares de clase C^{r+1} , que son las únicas curvas integrales maximales de (3) contenidas en U y que pasan por este punto.

El estudio que antecede demuestra efectivamente la existencia de un entorno abierto U de m_0 en el cual la ecuación (3) se pone en la forma (4); podemos entonces aplicar la proposición IX.9.2 a cada punto de U .

Traduciremos el teorema IX.9.3 diciendo que *en el entorno de cada punto hiperbólico de (3), pasan, por cada punto, dos líneas integrales de (3)*.

El estudio de la ecuación (3) en el entorno de un punto parabólico presenta grandes dificultades, salvo que todo punto de D sea parabólico. Se da este caso si se tiene $AC - B^2 = 0$ en todo D , y la ecuación (3) equivale entonces a $A du + B dv = 0$ si $A \neq 0$, y a $B du + C dv = 0$ si $C \neq 0$.

Se observará que los resultados obtenidos son esencialmente *locales*; el estudio global de la ecuación (3) excedería con mucho los fines de esta obra. Indiquemos sin embargo la dificultad que se presentaría. Suponiendo incluso que todos los puntos de D sean hiperbólicos, no siempre es posible encontrar funciones P_i, Q_i definidas y continuas en todo U , que verifiquen

$$A du^2 + 2 B du dv + C dv^2 = (P_1 du + Q_1 dv) (P_2 du + Q_2 dv)$$

Aplicación a la determinación de las líneas de curvatura de una superficie

Sea Σ una hoja de clase C^k de \mathcal{E} , definida por una parametrización $F : D \rightarrow \mathcal{E}$. Hemos visto que las líneas de curvatura de Σ son las imágenes por F de las curvas integrales de la ecuación diferencial

$$(8) \quad \begin{vmatrix} E du + F dv & L du + M dv \\ F du + G dv & M du + N dv \end{vmatrix} = 0,$$

que es una ecuación diferencial de la forma (3) con

$$A = EM - EL, \quad B = EN - GL, \quad C = FN - GM.$$

Se puede comprobar por cálculo que todos los puntos (u, v) de D tales que $M(u, v)$ no es punto umbilico de Σ , son *hiperbólicos* para (8); se puede ver también lo mismo sin cálculo observando que las direcciones (du, dv) que verifican (8) son las que definen las direcciones principales de Σ en el punto $M(u, v)$.

Por otra parte, si Σ es de clase C^k , con $k \geq 3$, las funciones E, F, G son de clase C^{k-1} y L, M, N son de clase C^{k-2} .

Por aplicación del teorema IX.9.3 podemos enunciar

IX.9.4 *Sea Σ una hoja simple y regular de clase C^k con $k \geq 3$. Por cada punto de Σ que no sea umbilico pasan dos líneas de curvatura ortogonales en este punto, que son arcos de clase C^{k-1} .*

Ejemplo

Busquemos las líneas de curvatura del paraboloide hiperbólico (llamado equilátero) de ecuación cartesiana $z = axy$ ($a \neq 0$) en un sistema de referencia ortogonal de \mathcal{E} .

Aplicando las fórmulas de la página 587 se ve que están definidas por la ecuación diferencial:

$$(1 + a^2 y^2) dx^2 - (1 + a^2 x^2) dy^2 = 0.$$

$$(9) \quad \frac{dx}{\sqrt{1 + a^2 x^2}} = \varepsilon \frac{dy}{\sqrt{1 + a^2 y^2}} \quad (\varepsilon = +1 \text{ ó } -1).$$

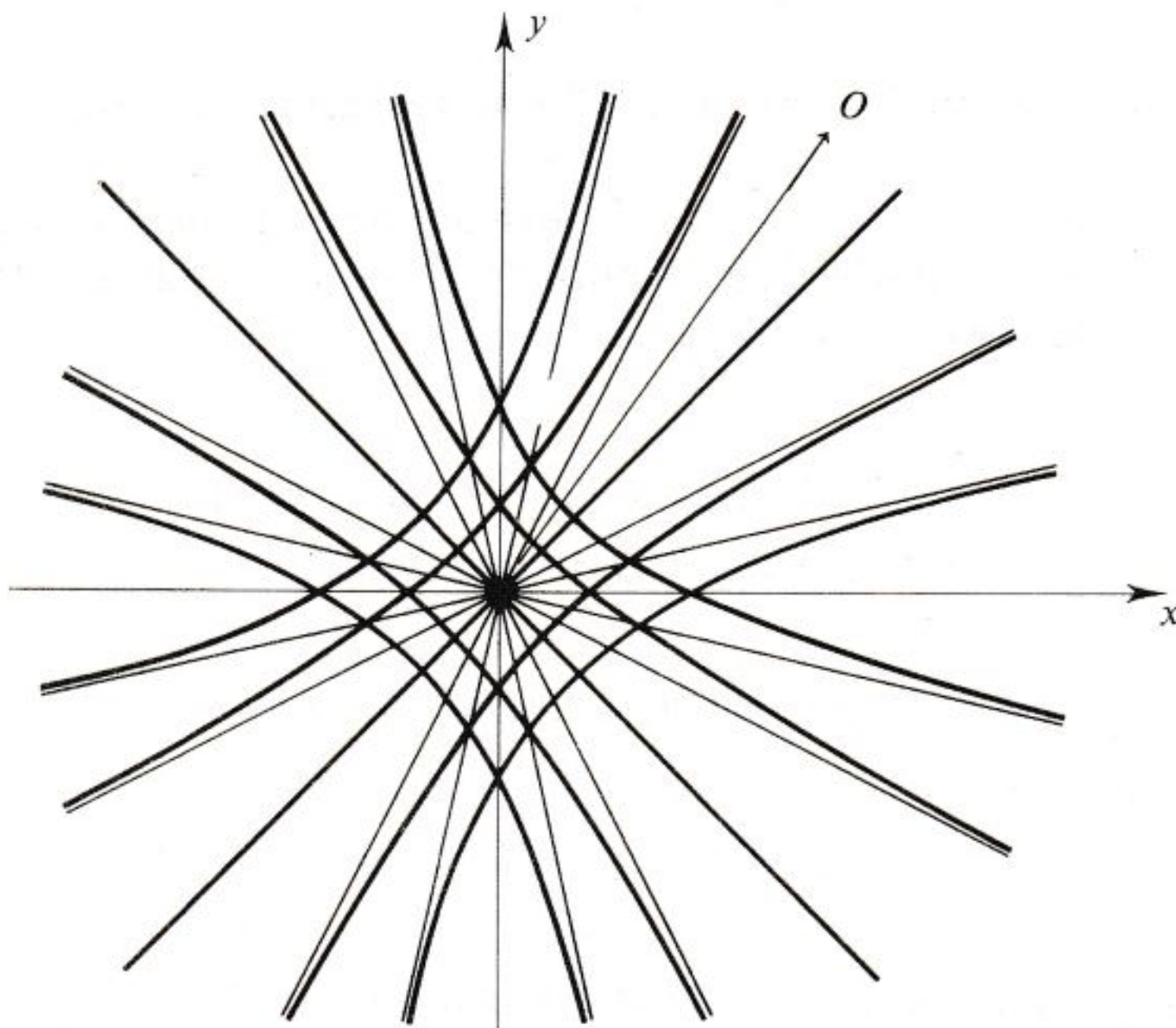


Figura 4.

Las soluciones se hallan definidas implícitamente por

$$\text{Arg senh } \frac{y}{a} \pm \text{Arg senh } \frac{x}{a} = \text{Cte},$$

o sea

$$(10) \quad a^2(x^2 + y^2 - 2kxy) = k^2 - 1$$

donde k es una constante real arbitraria tal que $|k| \geq 1$.

Las curvas definidas por la ecuación (10) son las proyecciones, sobre el plano Oxy , de las líneas de curvatura del paraboloides Σ ; son hipérbolas de centro O , que tienen como ejes principales a las bisectrices $x = y$, $x = -y$. Para $k < -1$, el eje mayor es $x = y$, para $k > 1$, el eje mayor es $x = -y$. Para $k = \pm 1$, se obtienen las bisectrices.

Algunas de estas cónicas se hallan representadas en la figura 4.

Aplicación a la determinación de las asíntotas

Manteniendo las mismas notaciones, sabemos que las asíntotas de Σ son las imágenes, por la aplicación F , de las curvas integrales de la ecuación diferencial

$$(11) \quad L du^2 + 2 M du dv + N dv^2 = 0.$$

Para que un punto (u, v) de D sea hiperbólico [resp. elíptico] para (11), es necesario y suficiente que el punto $M(u, v)$ sea hiperbólico [resp. elíptico] en Σ .

Por aplicación del teorema IX.9.3 se tiene inmediatamente

IX.9.5 Sea Σ una hoja simple y regular de clase C^k , con $k \geq 3$.

|| Por un punto elíptico de Σ no pasa ninguna línea asíntotica.
|| Por todo punto hiperbólico de Σ pasan dos líneas asíntóticas que son arcos regulares de clase C^{k-1} .

Ejemplos

1. Las generatrices que pasan por un punto de una cuádrica reglada (hiperboloide de una hoja o paraboloides hiperbólico) son las asíntotas maximales que pasan por este punto.

2. Busquemos las asíntotas del *toro de garganta cerrada*, definido en ejes ortonormados por la parametrización

$$(12) \quad x = R(1 + \cos u) \cos v, \quad y = R(1 + \cos u) \sin v, \quad z = R \sin u$$

$$(R > 0).$$

Se obtiene una hoja regular (pero no simple) haciendo variar (u, v) en $] -\pi, \pi[\times \mathbf{R}$. Un cálculo sencillo nos permite obtener los coeficientes L, M, N relativos a la parametrización (12)

$$L = R^3(1 + \cos u), \quad M = 0, \quad N = R^3 \cos u(1 + \cos u)^2.$$

Teniendo en cuenta el hecho de que, para $(u, v) \in]-\pi, \pi[\times \mathbf{R}$, se tiene: $1 + \cos u \neq 0$, se obtiene la ecuación de las líneas asintóticas

$$(13) \quad du^2 + \cos u(1 + \cos u) dv^2 = 0.$$

Los puntos *hiperbólicos* del toro se obtienen para

$$(u, v) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\times \mathbf{R} \quad \text{y} \quad (u, v) \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\times \mathbf{R},$$

y los puntos *elípticos* para $(u, v) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times \mathbf{R}$. Los puntos *parabólicos* son los de las dos circunferencias paralelas $u = \pm \pi/2$, $v \in \mathbf{R}$.

La integración de (13) proporciona, poniendo $t = \operatorname{tg} u/2$:

$$v - v_0 = \varepsilon \sqrt{2} \operatorname{Log} |t + \sqrt{t^2 - 1}|, \quad \text{con } \varepsilon = \pm 1.$$

Estudiemos una línea asintótica situada en la zona en que se tiene $z > 0$ (por lo tanto $t > +1$ si el punto es hiperbólico). La ecuación

$$v - v_0 = \pm \sqrt{2} \operatorname{Arg} \cosh t, \quad t > 1$$

equivale a

$$t = \cosh \frac{\sqrt{2}}{2} (v - v_0) \quad \text{y} \quad v \neq v_0.$$

La ecuación polar, en el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de las proyecciones de las líneas correspondientes es

$$r = R(1 + \cos u),$$

o sea

$$r = \frac{2R}{1 + t^2} = \frac{2R}{1 + \cosh^2(v - v_0)} \quad (v < v_0 \text{ ó } v > v_0).$$

Se obtienen dos líneas simétricas respecto a la recta $v = v_0$ que tienen al origen como *punto asíntota*. Estas dos líneas forman parte del arco único de ecuación

$$r = \frac{2R}{1 + \cosh^2(v - v_0)}.$$

Para $v = v_0$, el punto obtenido sobre esta línea es *parabólico* en el toro (véase la figura 5).

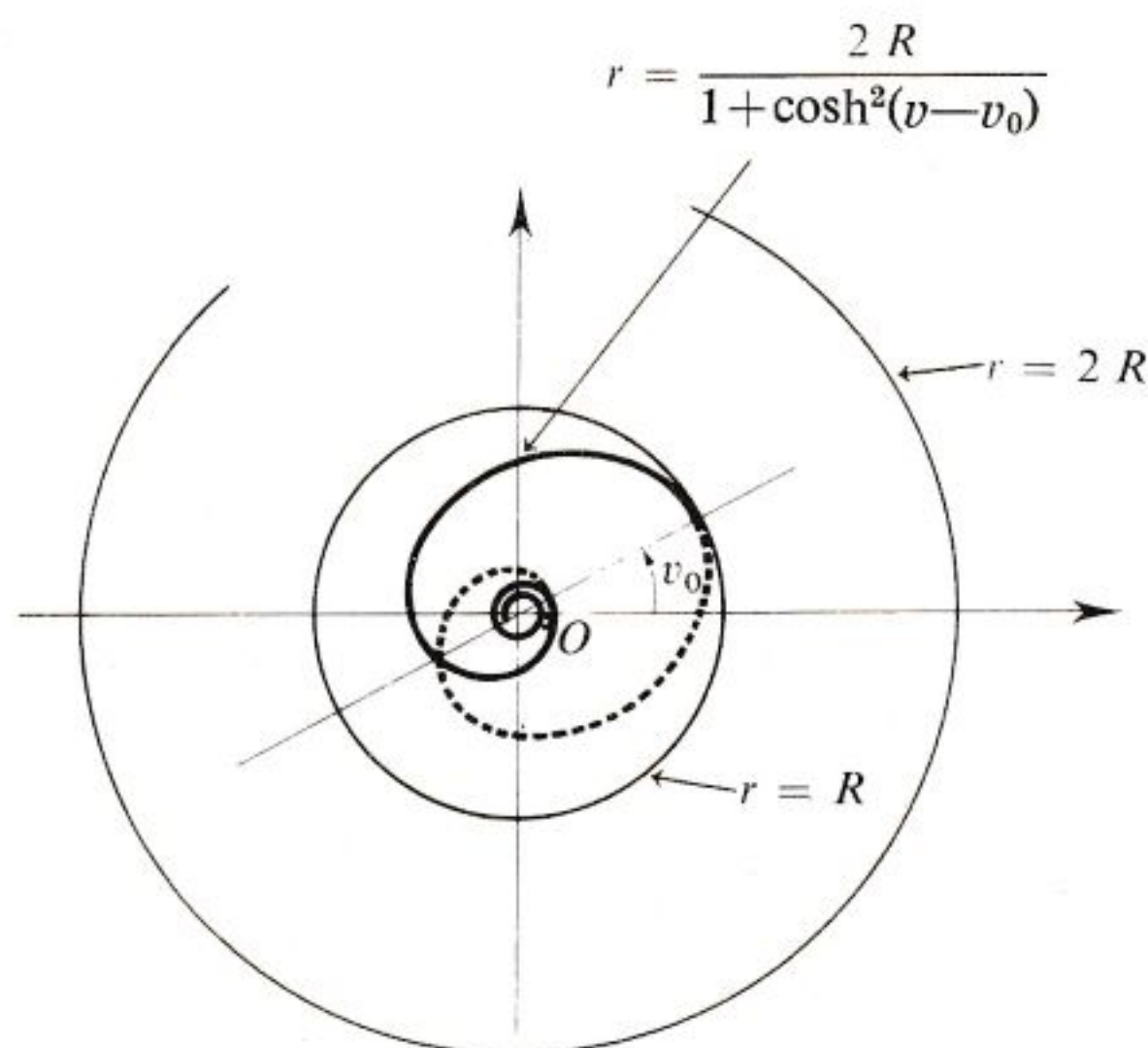


Figura 5.

§ IX.10 DETERMINACIÓN DE LAS GEODÉSICAS

Curvatura geodésica

Sea como siempre Σ una hoja simple y regular de clase C^k ($k \geq 2$) definida por la parametrización $F: (u, v) \mapsto M(u, v)$, y sea γ un arco regular de clase C^p ($2 \leq p \leq k$) trazado sobre Σ , definido por la parametrización *normal*

$$(1) \quad s \mapsto P(s) = M(u(s), v(s)).$$

Poniendo siempre

$$\vec{\tau} = \frac{dP}{ds} \quad \text{y} \quad \vec{h} = \frac{1}{H} \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v},$$

se tiene, con las notaciones del § 2 (fórmulas (8) y (11), p. 559 y 560)

$$\rho_g = \rho \sin \alpha = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \left[\vec{h}, \vec{\tau}, \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right] = \left[\vec{h}, \frac{dP}{ds}, \frac{d^2P}{ds^2} \right].$$

Si $t \mapsto P(t)$ es una parametrización admisible *cualquiera* de γ , se tiene, con un abuso cómodo de escritura (véase p. 558, nota 1),

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2P}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dP}{ds} \frac{d^2s}{dt^2},$$

de donde

$$\frac{dP}{dt} \wedge \frac{d^2P}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2P}{ds^2},$$

y

$$(2) \quad \boxed{\rho_g = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3} \left[\vec{h}, \frac{dP}{dt}, \frac{d^2P}{dt^2} \right]}.$$

La relación (2) permite, si se quiere, obtener una expresión de la curvatura geodésica de γ por medio de las derivadas primeras y segundas de las funciones $u(t)$ y $v(t)$; se ve de este modo que las geodésicas de Σ son los arcos cuyas parametrizaciones admisibles verifican la ecuación diferencial

$$\boxed{\left[\vec{h}, \frac{dP}{dt}, \frac{d^2P}{dt^2} \right] = 0}.$$

No terminaremos el cálculo, ya que vamos a dar un procedimiento más cómodo para la determinación de las geodésicas.

Otra caracterización de las geodésicas

Para que el arco γ definido por la parametrización *normal* (1) sea una geodésica de Σ , es necesario y suficiente, según las fórmulas de Darboux (p. 556) que el «vector aceleración» $d\vec{\tau}/ds = d^2P/ds^2$ sea, para todo valor de s , nulo o normal a Σ en el punto $P(s)$.

Al ser la hoja Σ regular, esta condición equivale al conjunto de relaciones

$$(3) \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{d^2P}{ds^2} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{d^2P}{ds^2} = 0}.$$

Recíprocamente, sea $s \mapsto P(s) = M(u(s), v(s))$ una parametrización (no necesariamente normal) de un arco γ trazado sobre Σ que verifica las relaciones (3). Se tiene inmediatamente

$$\frac{dP}{ds} \cdot \frac{d^2P}{ds^2} = \left[\frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \right] \cdot \frac{d^2P}{ds^2} = 0,$$

o sea

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dP}{ds} \right)^2 = 0.$$

Para que la parametrización $s \mapsto P(s)$ sea normal, basta que para un valor de s se tenga $\| dP/ds \| = 1$; de lo contrario se tiene solamente $\| dP/ds \| = a$, con $a = \text{Cte}$, y $u = as$ es un parámetro normal en γ . En todos los casos γ es una geodésica de Σ .

Inmediatamente se deduce

IX.10.1 *El sistema diferencial (3) caracteriza las parametrizaciones de las geodésicas de Σ que satisfacen a $\| dP/ds \| = \text{Cte}$.*

Interpretación cinemática

Si a la variable s se la llama *tiempo*, el sistema diferencial (3) es el que se obtiene al investigar el movimiento de un punto móvil sobre Σ , cuya aceleración en cada instante es normal a Σ . Podemos enunciar (véase p. 653):

IX.10.2 *Si en cada instante la aceleración de un punto móvil sobre una superficie Σ es normal a esta superficie, la trayectoria de este punto es una geodésica de Σ y el movimiento es uniforme.*

En consecuencia, una partícula que se mueve sin rozamiento sobre una superficie y que no está sometida a ninguna fuerza exterior, describe una geodésica de esta superficie con una velocidad constante.

En efecto, la partícula considerada no se halla sometida más que a la reacción de la superficie, la cual es (al no haber rozamiento) normal a esta superficie (consultese un curso de Dinámica).

Ecuaciones de Lagrange

Poniendo en forma explícita las relaciones (3) vamos a obtener un sistema diferencial que determina las geodésicas.

Según el teorema de la derivación de las funciones compuestas, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d^2 P}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(u' \frac{\partial M}{\partial u} + v' \frac{\partial M}{\partial v} \right) \\ &= u'' \frac{\partial M}{\partial u} + v'' \frac{\partial M}{\partial v} + u'^2 \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} + 2 u' v' \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} + v'^2 \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

Ahora bien, hemos puesto (véase § 1)

$$\left(\frac{\partial M}{\partial u} \right)^2 = E, \quad \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial M}{\partial v} = F, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial v} \right)^2 = G.$$

De aquí se deduce, por derivación,

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{2} E'_u; & \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial M}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{2} G'_v \\ \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{2} E'_v; & \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial M}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{2} G'_u;\end{aligned}$$

y finalmente

$$\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \right) - \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} = F'_v - \frac{1}{2} G'_u$$

$$\frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \right) - \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} = F'_u - \frac{1}{2} E'_v;$$

de donde

$$\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{d^2 P}{ds^2} = Eu'' + Fv'' + \frac{1}{2} E'_u u'^2 + E'_v u' v' + \left(F'_v - \frac{1}{2} G'_u \right) v'^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{d^2 P}{ds^2} = Fu'' + Gv'' + \left(F'_u - \frac{1}{2} E'_v \right) u'^2 + G'_u u' v' + \frac{1}{2} G'_v v'^2.$$

Las relaciones (3) se traducen por lo tanto en las ecuaciones diferenciales

$$(4) \quad \begin{aligned}Eu'' + Fv'' + \frac{1}{2} E'_u u'^2 + E'_v u' v' + (F'_v - \frac{1}{2} G'_u) v'^2 &= 0. \\ Fu'' + Gv'' + (F'_u - \frac{1}{2} E'_v) u'^2 + G'_u u' v' + \frac{1}{2} G'_v v'^2 &= 0.\end{aligned}$$

Se observará que los coeficientes de este sistema diferencial se expresan únicamente por medio de los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental y de sus derivadas.

Para recordar estas ecuaciones, resulta cómodo ponerlas en la forma

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds}(Eu' + Fv') - \frac{1}{2}(E'_u u'^2 + 2F'_u u'v' + G'_u v'^2) = 0 \\ \frac{d}{ds}(Fu' + Gv') - \frac{1}{2}(E'_v u'^2 + 2F'_v u'v' + G'_v v'^2) = 0 \end{cases}$$

conviniendo en que el símbolo d/ds designa una derivada de función compuesta, o sea desarrollando

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds}(Eu' + Fv') &= Eu'' + Fv'' + E'_u u'^2 + (E'_v + F'_u)u'v' + F'_v v'^2 \\ \frac{d}{ds}(Fu' + Gv') &= Fu'' + Gv'' + F'_u u'^2 + (F'_v + G'_u)u'v' + G'_v v'^2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (6), se ve inmediatamente que el sistema (4) es equivalente a (5).

Las ecuaciones (5) son un caso particular de las **ecuaciones de Lagrange** establecidas en Mecánica (véase [5]).

Al ser invertible la matriz $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ (ya que la hoja Σ se supone regular), resulta fácil poner el sistema (5) en *forma normal* (véase tomo 4, p. 5). Por otra parte, si Σ es de clase C^k ($k \geq 3$), los coeficientes del sistema (5) son (por lo menos) de clase C^1 . Por aplicación del teorema de Cauchy-Lipschitz, se tiene entonces:

IX.10.3 \parallel Sea Σ una hoja simple y regular de clase C^k , con $k \geq 3$. Por cada punto M_0 de Σ pasa una geodésica maximal única, tangente en M_0 a una dirección arbitrariamente dada del plano tangente a Σ en M_0 ; esta geodésica es un arco de clase C^k .

Observación. Cuando se vaya a integrar el sistema (4) o (5), no hay que olvidar que implica la relación:

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = \text{Cte}$$

la cual traduce la relación (anteriormente establecida): $\left\| \frac{dP}{ds} \right\|^2 = \text{Cte}$. En otros términos, la función $Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$ es una *integral primera* de las ecuaciones de Lagrange y se obtienen las parametrizaciones *normales* de las geodésicas al imponer la ecuación suplementaria $Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1$.

Ejemplos

1. Si Σ es un *plano*, se puede suponer que u, v son las coordenadas del punto

$M(u, v)$ en un sistema de referencia ortonormal de este plano. Se tiene entonces $ds^2 = du^2 + dv^2$, o sea $E = G = 1$ y $F = 0$; el sistema (5) se reduce a $u'' = v'' = 0$; nos encontramos de nuevo con el hecho de que las geodésicas de un plano son las rectas de este plano.

2. Tomemos como Σ la **hoja de revolución** definida, en un sistema de referencia ortonormal $(O; x, y, z)$ de \mathcal{E} , por las ecuaciones paramétricas

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = f(r) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, r \in I)$$

siendo la función f de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} . Su primera forma fundamental es

$$ds^2 = dr^2(1 + f'^2) + r^2 d\theta^2;$$

poniendo $u = r$ y $v = \theta$, se tiene aquí $E = 1 + f'^2(r)$, $F = 0$, $G = r^2$. Las ecuaciones de Lagrange que determinan las geodésicas son

$$(7) \quad \frac{d}{ds} [r'(1 + f'^2)] - f' f'' = 0 \quad \frac{d}{ds} (r^2 \theta') = 0$$

e implican la relación $r^2 \theta' = \text{Cte}$. Desde el punto de vista mecánico esta relación (llamada *Ley de las áreas*) proviene del hecho de que la aceleración del movimiento correspondiente es paralela al plano MOz (ya que la normal a Σ en el punto M es coplanaria con Oz).

Las relaciones

$$r^2 \theta' = C \quad \text{y} \quad (1 + f'^2) r'^2 + r^2 \theta'^2 = 1$$

constituyen un sistema diferencial de primer orden verificado por las parametrizaciones *normales* de las geodésicas de Σ . Se puede demostrar que toda solución (r, θ) de este nuevo sistema es una solución de (7) si la derivada r' no se anula.

Para $C = 0$, se obtienen los *meridianos* de Σ , de los cuales sabemos ya que son *geodésicas* (véase § 8).

Vamos a concluir los cálculos en el caso en que Σ es el *cono de revolución* de eje Oz y de semiángulo en el vértice α , definido por las ecuaciones paramétricas

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = r \cotg \alpha \quad (0 < \alpha < \pi/2).$$

Las parametrizaciones normales de sus geodésicas verifican el sistema diferencial

$$(8) \quad r^2 \frac{d\theta}{ds} = C, \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 1;$$

si $C \neq 0$, la función θ es un parámetro admisible en todo arco de geodésica que no pase por O . Tomando θ como parámetro, se ve que la función $r(\theta)$ tiene que verificar la ecuación diferencial (obtenida formalmente al eliminar ds entre las dos ecuaciones (8)):

$$\frac{C^2}{r^4 \operatorname{sen}^2 \alpha} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = 1.$$

El cambio de variable $\rho = \frac{1}{r}$ lleva a la ecuación

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 + \rho^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Sus soluciones son todas las funciones de la forma

$$\rho = \frac{1}{C} \cos [(\theta - \theta_0) \operatorname{sen} \alpha] \quad \text{con} \quad \theta_0 = \text{Cte}.$$

Las proyecciones de las geodésicas de Σ sobre el plano xOy son pues las curvas de ecuación polar

$$r \cos [(\theta - \theta_0) \operatorname{sen} \alpha] = C \quad \text{con} \quad C = \text{Cte}, \quad \theta_0 = \text{Cte}.$$

Téngase en cuenta que no son hélices. Si se desarrolla el cono Σ sobre un plano las geodésicas se desarrollan según rectas.

Observación. Supongamos de un modo general que entre dos hojas Σ , Σ' exista una correspondencia biyectiva que conserve la longitud de los arcos trazados sobre las mismas; entonces las geodésicas de Σ y de Σ' se corresponden en esta biyección: esto proviene del hecho de que las ecuaciones diferenciales de las geodésicas dependen solamente de la primera forma fundamental.

Propiedades extremales de las geodésicas

Un estudio más detallado permite establecer la proposición siguiente:

IX.10.4 Si M_0 es un punto regular de una hoja Σ de clase C^k ($k \geq 3$), existe una subhoja Σ_0 de Σ , que contiene a M_0 , y que verifica las propiedades siguientes: para todo punto M_1 de Σ_0 existe un arco de geodésica **único** γ

|| *de extremos M_0, M_1 ; entre los arcos rectificables de extremos M_0, M_1 trazados sobre Σ_0 , el arco γ es el de menor longitud.*

Abreviadamente se dice que las geodésicas son los arcos «de longitud mínima». Pero, entiéndase bien, esta propiedad extremal se cumple sólo *localmente*; para ver los fenómenos que se pueden producir, basta estudiar el caso de una esfera.

Se puede materializar el arco de geodésica de longitud mínima que une dos puntos M_0, M_1 de una superficie por medio de un hilo tenso sobre la superficie que une los dos puntos.

Capítulo X

Sistema de referencia móvil

Aunque no figure explícitamente en los programas, la teoría del sistema de referencia móvil constituye un instrumento casi imprescindible para la Cinemática del sólido (véase cap. XII); desempeña un papel importante en el estudio de curvas y superficies (sistemas de referencia de Frenet y de Darboux). A un nivel más elevado, es la primera técnica utilizada en Geometría diferencial.

En este breve capítulo nos limitaremos a proporcionar algunas indicaciones sobre esta teoría; los resultados principales se utilizarán en el capítulo XII.

● En este capítulo, designaremos por \mathcal{E}_n un espacio afín euclídeo orientado de dimensión $n \geq 2$, ligado al espacio vectorial euclídeo E_n . El grupo de las biyecciones afines de \mathcal{E}_n se designará por $GA(\mathcal{E}_n)$ y el conjunto de las bases (con índices de \mathbf{N}_n^*) de E_n se designará por $\mathcal{B}(E_n)$ ⁽¹⁾.

Por otra parte, adoptaremos el convenio que sigue:

(C) Si el espacio \mathcal{E}_3 (de dimensión 3) está *orientado* y si $\vec{\Delta}$ designa un *eje* (recta orientada) de \mathcal{E}_3 , llamaremos simplemente *rotación de ángulo θ ($\theta \in \mathbf{R}$) alrededor del eje $\vec{\Delta}$* al desplazamiento de \mathcal{E}_3 definido por

$$(x, y, z) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

en todo sistema de referencia ortonormal directo de \mathcal{E}_3 del cual $\vec{\Delta}$ sea el tercer eje.

Este convenio equivale a orientar cada plano vectorial P perpendicular a $\vec{\Delta}$ de tal modo que si (\vec{i}, \vec{j}) es una base directa de P y \vec{k} un vector director de $\vec{\Delta}$, la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 sea directa (véase p. 141).

⁽¹⁾ $\mathcal{B}(E_n)$ es pues el conjunto de las *bases ordenadas* de E_n . Para abreviar diremos aquí que es el *conjunto de las bases* de E_n .

Este convenio, que con excesiva frecuencia se olvida, simplifica mucho el lenguaje; corresponde a la idea intuitiva de rotación «vista por un «observador»» esquematizado por el eje \vec{A} .

§ X.1 PRELIMINARES

a) Una base de E_n es un sistema (e_1, \dots, e_n) de n vectores linealmente independientes de E_n y puede por lo tanto identificarse con un punto del espacio producto $(E_n)^n$. El conjunto de las bases de E_n es una parte de $(E_n)^n$ que designaremos por $\mathcal{B}(E_n)$; por otra parte resulta fácil demostrar que $\mathcal{B}(E_n)$ es una parte abierta de $(E_n)^n$, pero esta observación no es esencial para lo que va a seguir.

Un sistema de referencia afín de \mathcal{E}_n es una n -upla $(A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ constituida por un punto A de \mathcal{E}_n y una base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E_n ; en otros términos, es un punto del conjunto producto $\mathcal{E}_n \times \mathcal{B}(E_n)$.

b) Sea φ una biyección afín de \mathcal{E}_n y sea f su parte lineal. Si

$$\mathcal{R} = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

es un sistema de referencia de \mathcal{E}_n , designaremos simplemente por $\varphi(\mathcal{R})$ el sistema de referencia

$$\mathcal{R}' = (\varphi(A); f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n));$$

diremos que el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \varphi(\mathcal{R})$ es la imagen de \mathcal{R} por φ .

A la inversa, si $\mathcal{R} = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ y $\mathcal{R}' = (A'; \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ son dos sistemas de referencia de \mathcal{E}_n , existe una biyección afín única φ de \mathcal{E}_n tal que se tiene $\mathcal{R}' = \varphi(\mathcal{R})$. Diremos que esta biyección φ es la que hace pasar de \mathcal{R} a \mathcal{R}' o que lleva a \mathcal{R} sobre \mathcal{R}' .

Esta biyección φ se halla definida por la condición

$$(1) \quad \varphi \left(A + \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = A' + \sum_{i=1}^n x_i e'_i,$$

donde x_1, \dots, x_n designan reales arbitrarios (si M es el punto de coordenadas (x_i) en \mathcal{R} , el punto $M' = \varphi(M)$ es el que tiene los mismos números x_i por coordenadas en \mathcal{R}').

Se tiene fácilmente

X.1.1 Para que la biyección afín φ que lleva el sistema de referencia $\mathcal{R} = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ al sistema de referencia $\mathcal{R}' = (A'; \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ sea una **isometría**, es necesario y suficiente que, para todos los $i, j, 1, 2, \dots, n$, se tenga $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j$.

Demostración. Designemos por M, P dos puntos cualesquiera de \mathcal{E}_n , de coordenadas respectivas (x_i) e (y_i) en el sistema de referencia \mathcal{R} y sean M', P' , sus imágenes por φ . Según (1) se tiene

$$\overrightarrow{M'P'} = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \vec{e}'_i,$$

de donde

$$\|\overrightarrow{M'P'}\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i - x_i)(y_j - x_j) \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j,$$

mientras que se tiene

$$\|\overrightarrow{MP}\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i - x_i)(y_j - x_j) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j.$$

Para que φ sea una isometría, es necesario y suficiente que las formas cuadráticas

$$q(u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j u_i u_j, \quad q'(u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j u_i u_j$$

(definidas en \mathbf{R}^n) sean iguales; de donde el resultado.]

Finalmente, utilizaremos el lema siguiente

X.1.2 *Para que un endomorfismo f de E_n sea antisimétrico, basta que exista una base $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E_n tal que se tenga, para todos los índices $i, j = 1, 2, \dots, n$,*

$$f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j + f(\vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i = 0.$$

A la inversa, si f es un endomorfismo antisimétrico de E_n , esta propiedad se cumple para toda base de E_n .

Demostración. Sea (\vec{e}_i) una base de E_n y f un endomorfismo. Para todo vector $\vec{V} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$ de E_n , se tiene

$$f(\vec{V}) \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \lambda_i \lambda_j;$$

el operador f es antisimétrico si, y solamente si, se tiene: $f(\vec{V}) \cdot \vec{V} = 0$ para todo $\vec{V} \in E_n$. Por lo tanto, f es antisimétrico si, y solamente si, la forma cuadrática

$$q(\lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \lambda_i \lambda_j$$

(definida en \mathbf{R}^n) es nula; de donde el resultado.]]

§ X.2 CONCEPTO GENERAL DE SISTEMA DE REFERENCIA MÓVIL CON k PARÁMETROS

Definición X.2.1

Un sistema de referencia móvil de \mathcal{E}_n , con k parámetros, es una aplicación de la forma

$$(1) \quad \rho : \Delta \rightarrow \mathcal{E}_n \times (E_n)^n, \quad u \mapsto (A(u); \vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u)),$$

donde Δ designa un dominio de \mathbf{R}^k , tal que:

- a) Para cada $u \in \Delta$, los vectores $\vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u)$ constituyen una base de E_n ;
- b) Cada una de las funciones $A : \Delta \rightarrow \mathcal{E}_n$ y $\vec{e}_i : \Delta \rightarrow E_n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es continua.

Abreviadamente, el sistema de referencia móvil ρ es una aplicación continua de Δ en el espacio producto $\mathcal{E}_n \times \mathcal{B}(E_n)$ (hallándose dotado el conjunto $\mathcal{B}(E_n)$ de la topología inducida por la de $(E_n)^n$).

El sistema de referencia móvil P se dirá que es de clase C^p [resp. p veces diferenciable] si cada una de las funciones $A : \Delta \rightarrow \mathcal{E}_n$ y $\vec{e}_i : \Delta \rightarrow E_n$ ($1 \leq i \leq n$) es de clase C^p [resp. p veces diferenciable]. Podemos traducir esta hipótesis diciendo que ρ es una aplicación de clase C^p [resp. p veces diferenciable] de Δ en $\mathcal{E}_n \times \mathcal{B}(E_n)$.

Eventualmente hablaremos de **base móvil** de E_n , definida en Δ . Se trata de una aplicación continua de Δ en $\mathcal{B}(E_n)$; en otros términos, es una aplicación de la forma

$$\beta : \Delta \rightarrow (E_n)^n, \quad u \mapsto (\vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u))$$

donde los \vec{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) designan funciones vectoriales continuas en Δ tales que, para todo $u \in \Delta$, los vectores $\vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u)$ constituyen una base de E_n ; la base β se dice que es de clase C^p si estas funciones son de clase C^p .

Al haberse supuesto el conjunto de definición Δ conexo, se tiene el resultado fundamental que sigue:

Teorema X.2.1

|| Sea Δ un dominio de \mathbf{R}^k y $\rho : \Delta \rightarrow \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}(E_n)$ un sistema de referencia móvil definido en Δ .
 || Entonces, cualesquiera que sean los puntos u, v de Δ , los sistemas de referencia $\rho(u)$ y $\rho(v)$ tienen la misma orientación.

Demostración. Fijemos un punto cualquiera u de Δ . Las componentes de los vectores $\vec{e}_1(v), \dots, \vec{e}_n(v)$ en la base fija $(\vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u))$ son entonces funciones continuas del punto v ($v \in \Delta$); el determinante de los vectores

$$(\vec{e}_1(v), \dots, \vec{e}_n(v))$$

en la base $(\vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u))$, que llamamos $\delta_u(v)$, es una función numérica continua de v , que evidentemente verifica $\delta(u) = 1$. Por otra parte, la función δ_u no toma nunca el valor 0, ya que los vectores $\vec{e}_i(v)$ constituyen una base. De ahí resulta que la función δ_u (definida y continua en un conjunto conexo Δ) toma solamente valores > 0 , de donde el resultado.]

En lo que sigue vamos a considerar esencialmente *sistemas de referencia móviles con un parámetro*, cuyo conjunto de definición será un intervalo I de \mathbf{R} . De acuerdo con las convenciones corrientes, no será entonces necesario suponer que I sea abierto. En este caso, la demostración del teorema X.2.1 sencillamente hace uso del hecho de que una función numérica continua y no nula en todo punto de un intervalo, mantiene un signo constante.

Al ser el espacio \mathcal{E}_n orientado, el teorema X.2.1 nos permite dar la siguiente

Definición X.2.2

{ Un sistema de referencia móvil ρ de \mathcal{E}_n se dice que es **directo** [resp. **indirecto**] si, para todo valor de la variable u el sistema de referencia $\rho(u)$ es **directo** [resp. **indirecto**].

Ejemplos

1. Sea Δ un dominio de \mathbf{R}^2 y sea $f : \Delta \rightarrow \mathcal{E}_3$, $(u, v) \mapsto M(u, v)$ una aplicación de clase C^1 que define una *hoja regular* Σ de \mathcal{E}_3 (es decir tal que los vectores $\partial M/\partial u$ y $\partial M/\partial v$ son independientes en todas partes). Si

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$$

designa el *vector normal* asociado a la parametrización f , obtenemos un *sistema de referencia móvil* ρ (con dos parámetros) de \mathcal{E}_3 , definidos en Δ , poniendo

$$(\forall (u, v) \in \Delta) \quad \rho(u, v) = \left(M(u, v); \frac{\partial M}{\partial u}(u, v), \frac{\partial M}{\partial v}(u, v), \vec{N}(u, v) \right);$$

este sistema de referencia móvil desempeña un papel importante en la teoría de las superficies.

2. Sea Δ un dominio de \mathbf{R}^n y sea

$$f: \Delta \rightarrow \mathcal{E}_n, (u_1, \dots, u_n) \mapsto f(u_1, \dots, u_n)$$

una aplicación de clase C^1 . Una tal aplicación se dice que es de rango n si su diferencial es de rango n en todas partes (véase tomo 2, VI.6.1); en lenguaje geométrico equivale a decir que los n vectores derivadas parciales $\partial f / \partial u_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) son *independientes*. Si es así, obtenemos un *sistema de referencia móvil* ρ de \mathcal{E}_n , definido en Δ , poniendo:

$$(\forall u \in \Delta) \quad \rho(u) = \left(f(u); \frac{\partial f}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}(u) \right).$$

Este último ejemplo es de particular importancia. Al haberse fijado la aplicación f , se dice que la n -upla $u = (u_1, \dots, u_n)$ es un sistema de **coordenadas curvilíneas** del punto $M = f(u)$. En Cinemática, se dice también que son **parámetros** que definen la posición del punto M (estando justificadas estas definiciones por el hecho de que la aplicación f es *invertible localmente*). El estudio del sistema de referencia móvil ρ asociado a este sistema de «coordenadas curvilíneas» permite tratar problemas de Geometría o de Cinemática con ayuda de estas «coordenadas».

Las *coordenadas polares, cilíndricas y esféricas* constituyen ejemplos; más adelante tendremos ocasión de estudiar sistemas de referencia móviles asociados a estos sistemas de coordenadas.

Bijecciones afines asociadas a un sistema de referencia móvil

Sea $\rho: \Delta \rightarrow \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}(E_n)$ un sistema de referencia móvil de \mathcal{E}_n . A cada par (u, v) de puntos de Δ asociaremos la *bijección afín* ψ_{uv} de \mathcal{E}_n que lleva $\rho(u)$ a $\rho(v)$, por lo tanto tal que

$$\psi_{uv}(\rho(u)) = \rho(v)$$

(véase preliminares, § 1).

Del teorema X.2.1 resulta que las *biyecciones afines* ψ_{uv} son todas **directas**. Según su definición, se tiene inmediatamente

$$(2) \quad (\forall u, v, w \in \Delta) \quad \psi_{u,w} = \psi_{v,w} \circ \psi_{u,v},$$

de donde

$$(\forall u, v \in \Delta) \quad \psi_{vu} = (\psi_{uv})^{-1} \quad \text{y} \quad \psi_{u,u} = \text{Id}_{\mathcal{E}_n}.$$

Sistemas de referencia móviles indeformables

Definición X.2.3

Un sistema de referencia móvil ρ de \mathcal{E}_n se dice que es **indeformable** si las biyecciones afines asociadas son **isometrías**.

Resulta entonces, de lo que antecede, que tales isometrías son **desplazamientos**. Por aplicación de X.1.1, se tiene inmediatamente

X.2.2 Para que el sistema de referencia móvil

$$\rho : \Delta \rightarrow \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}(E_n), \quad u \mapsto (A(u); \vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u))$$

sea **indeformable**, es necesario y suficiente que la matriz

$$M(u) = (\vec{e}_i(u) \cdot \vec{e}_j(u))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

sea **independiente de u** ($u \in \Delta$).

Entre los sistemas de referencia móviles indeformables, los más utilizados serán los *sistemas de referencia ortonormales*.

Definición X.2.4

Un sistema de referencia móvil $\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \mathcal{E}_n , definido en un dominio Δ de \mathbf{R}^k , se dice que es **ortonormal** si para todo $u \in \Delta$, el sistema de referencia $\rho(u) = (A(u); \vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u))$ es ortonormal.

Un sistema de referencia móvil ortonormal es, evidentemente, indeformable.

Sistemas de referencia ligados

Definición X.2.5

Sean

$$\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \quad y \quad \sigma = (B; \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$$

dos sistemas de referencia móviles de \mathcal{E}_n , definidos en el mismo dominio Δ de \mathbf{R}^k . Se dice que el sistema de referencia móvil σ está **ligado** a ρ si las coordenadas del punto $B(u)$ y las componentes de los vectores $\vec{f}_i(u)$ en el sistema de referencia $\rho(u)$ son **independientes de u** ($u \in \Delta$).

Se ve inmediatamente que la relación « σ está ligado a ρ » es una relación de equivalencia en el conjunto de los sistemas de referencia móviles de \mathcal{E}_n definidos en Δ . Se puede traducir pues esta relación diciendo que *los sistemas de referencia ρ y σ están ligados*.

Se establecería fácilmente la proposición que sigue:

X.2.3 *Para que los sistemas de referencia móviles ρ, σ de \mathcal{E}_n , definidos en el mismo dominio Δ , estén **ligados**, es necesario y suficiente que admitan la misma familia asociada $(\psi_{uv})_{u,v \in \Delta}$ de biyecciones afines.*

En consecuencia, *todo sistema de referencia móvil ligado a un sistema de referencia indeformable es indeformable* (resulta fácil comprobarlo directamente).

En términos de la Cinemática, dos sistemas de referencia móviles indeformables ligados se dice que son *fijos* uno respecto a otro.

Vamos a dedicarnos ahora al estudio, más elemental, de los sistemas de referencia móviles con un parámetro (definidos en un intervalo de I de \mathbf{R}). En el § 6 volveremos al caso general.

§ X.3 SISTEMAS DE REFERENCIA MÓVILES CON UN PARÁMETRO

Según la definición general X.2.1, un sistema de referencia móvil con un parámetro de \mathcal{E}_n queda definido cuando se dan un *intervalo* I de \mathbf{R} y $n + 1$ *funciones continuas*:

$$A : I \rightarrow \mathcal{E}_n, \quad \vec{e}_i : I \rightarrow E_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

tales que para cada $t \in I$, los vectores $\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t)$ constituyen una *base* de E_n .

Se dice que el sistema de referencia es de clase C^k [resp. D^k] si estas funciones son de clase C^k [resp. D^k] en I ; es **indeformable** si, y solamente si, la matriz

$$E(t) = (\vec{e}_i(t) \cdot \vec{e}_j(t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

es constante.

Sea $\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un sistema de referencia móvil derivable en un intervalo I de \mathbb{R} . Para cada $t \in I$, existe un endomorfismo único D_t de E_n que verifica

$$(1) \quad (\forall i = 1, 2, \dots, n) \quad D_t(\vec{e}_i(t)) = \frac{d\vec{e}_i}{dt}.$$

Se tiene en primer lugar:

X.3.1 || Para que el sistema de referencia móvil ρ sea **indeformable**, es necesario y suficiente que, para cada $t \in I$, el endomorfismo D_t definido por (1) sea **antisimétrico**.

Demostración. Para que el endomorfismo D_t sea antisimétrico, es necesario y suficiente que se tenga (véase prop. X.1.2)

$$(\forall i, j = 1, 2, \dots, n) \quad \frac{d\vec{e}_i}{dt} \cdot \vec{e}_j(t) + \frac{d\vec{e}_j}{dt} \cdot \vec{e}_i(t) = 0,$$

o sea, $\frac{d}{dt}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0$; de donde el resultado.]

Si el sistema de referencia móvil ρ es *ortonormal* (por lo tanto indeformable), resulta que la matriz del operador D_t en la base ortonormal $(\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$ es *antisimétrico*. Ahora bien, esta matriz es la matriz $W(t) = (\omega_{ij}(t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ definida por las relaciones

$$(2) \quad \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \omega_{ji}(t) \vec{e}_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Esta propiedad admite una recíproca, que se desprende del teorema que sigue:

Teorema X.3.2

|| Sea I un intervalo de \mathbb{R} y

$$\beta : I \rightarrow \mathcal{B}(E_n), \quad t \mapsto (\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$$

 || una base móvil derivable en I .

Para que esta base sea **ortonormal**, es necesario y suficiente que

a) exista un valor $t_0 \in I$, tal que la base $\beta(t_0) = (\vec{e}_1(t_0), \dots, \vec{e}_n(t_0))$ sea **ortonormal**.

b) para todo $t \in I$, la matriz $W(t) = (\omega_{ij}(t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ definida por

$$(2) \quad \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \omega_{ji}(t) \vec{e}_j$$

sea **antisimétrica**.

Demostración. Según lo que antecede, la condición enunciada es necesaria. Nos bastará demostrar que es *suficiente*. Para ello, designemos por $\alpha = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ una base fija cualquiera de E_n y, para cada $t \in I$, designemos por $B(t) = (b_{ij}(t))$ la matriz de paso de la base α a la base $\beta(t)$, definida por

$$\vec{e}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ji}(t) \vec{e}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Según la definición de los ω_{ij} , se tiene

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_{ji}(t) b_{kj}(t) \vec{e}_k,$$

de donde

$$\frac{db_{ik}}{dt} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_{ji}(t) b_{kj}(t),$$

o sea, bajo forma matricial

$$(3) \quad \frac{dB}{dt} = B(t) W(t).$$

Designemos aquí (excepcionalmente, y para evitar confusiones) por tM la traspuesta de una matriz M . Se tiene, según (3)

$$\frac{d}{dt} ({}^tB) = {}^t \left(\frac{dB}{dt} \right) = {}^tW(t) {}^tB(t),$$

de donde, al ser la matriz $W(t)$ antisimétrica (o sea, al verificar ${}^tW(t) + W(t) = 0$),

$$\begin{aligned} B(t) \frac{d{}^tB}{dt} + \frac{dB}{dt} {}^tB(t) &= B(t) {}^tW(t) {}^tB(t) + B(t) W(t) {}^tB(t) \\ &= B(t) [{}^tW(t) + W(t)] {}^tB(t) = 0. \end{aligned}$$

En otros términos, se tiene:

$$\frac{d}{dt}(B(t)^T B(t)) = 0, \text{ de donde } B(t)^T B(t) = \text{Cte}.$$

Ahora bien, según la hipótesis *a*), la matriz $B(t_0)$ es ortogonal y por lo tanto verifica $B(t_0)^T B(t_0) = I_n$, donde I_n designa la matriz unidad de E_n . Se tiene por lo tanto

$$(\forall t \in I) \quad B(t)^T B(t) = I_n,$$

lo cual demuestra que la base $(\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$ es ortonormal para todo $t \in I$.

Funciones ligadas a un sistema de referencia móvil indeformable

Designemos por $\rho : I \rightarrow (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un sistema de referencia móvil indeformable cualquiera definido en el intervalo I . Daremos la definición siguiente ⁽¹⁾:

Definición X.3.1

Se dice que una función vectorial $\vec{V} : I \rightarrow E_n$ está **ligada** al sistema de referencia ρ cuando es de la forma

$$t \mapsto \vec{V}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i(t)$$

donde las λ_i designan **constantes**.

Se tiene entonces (si el sistema de referencia ρ es derivable)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i D_t(\vec{e}_i) = D_t \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i(t),$$

o sea

$$(4) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = D_t(\vec{V}(t)),$$

designando siempre por D_t el endomorfismo asociado a ρ y definido por (1).

⁽¹⁾ Esta definición puede extenderse a los sistemas de referencia móviles cualesquiera con k parámetros, no necesariamente indeformables.

Veremos que esta fórmula tiene una importancia particular en dimensión 3.

Definición intrínseca del operador D_t

Manteniendo las mismas notaciones, designemos por ψ_{tu} la biyección afín de \mathcal{E}_n que lleva $\rho(t)$ a $\rho(u)$ (véase § 1) y por $\vec{\psi}_{tu}$ su parte lineal (que es un elemento de $\mathcal{L}(E_n)$). Al ser fijo el punto $t \in I$, todo vector \vec{W} de E_n puede escribirse de manera única en la forma

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i(t),$$

siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ constantes. Se tiene, evidentemente

$$\vec{\psi}_{t,u}(\vec{W}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i(u),$$

de donde (si el sistema de referencia ρ es derivable)

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial u} \vec{\psi}_{t,u}(\vec{W}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{d\vec{e}_i}{du} = \sum_{i=1}^n \lambda_i D_u(\vec{e}_i(u));$$

y, para $u = t$,

$$(6) \quad \left[\frac{\partial}{\partial u} \vec{\psi}_{t,u}(\vec{W}) \right]_{u=t} = D_t(\vec{W}).$$

Al ser el vector $\vec{W} \in E_n$ arbitrario, la relación (5) permite demostrar que la aplicación

$$I \rightarrow \mathcal{L}(E_n), \quad u \mapsto \vec{\psi}_{tu}$$

es derivable; la relación (6) demuestra que la derivada en el punto $u = t$ está definida por

$$(7) \quad \left[\frac{\partial}{\partial u} (\vec{\psi}_{tu}) \right]_{u=t} = D_t.$$

La relación (7) muestra que el operador D_t depende solamente del punto t y de la familia $(\vec{\psi}_{t,u})$ de las biyecciones afines asociadas al sistema de referencia móvil ρ ; ésta podría servir para dar una definición intrínseca de este operador.

Determinación de un sistema de referencia móvil dando el campo de sus velocidades

Aplicando el teorema general de existencia y de unicidad de las soluciones de un sistema diferencial lineal (tomo 4 p. 12), se obtiene inmediatamente:

Teorema X.3.3

Sea $(\xi_i; \omega_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) un sistema de $n + n^2$ funciones numéricas continuas en un intervalo I de \mathbf{R} y sea \mathcal{R}_0 un sistema de referencia fijo cualquiera de \mathcal{E}_n .

Para cada $t_0 \in I$, existe entonces un sistema de referencia móvil único

$$\rho = (A; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

tal que $\rho(t_0) = \mathcal{R}_0$ y que verifica, para todo $t \in I$, las relaciones

$$(8) \quad \frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \vec{e}_i(t); \quad \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \omega_{ji}(t) \vec{e}_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Además, si las funciones dadas (ξ_i, ω_{ij}) son de clase C^p , entonces el sistema de referencia ρ es de clase C^{p+1} .

Demostración. Designemos por $x_i(t)$ las coordenadas del punto $A(t)$ en el sistema de referencia dado \mathcal{R}_0 y por $b_{ji}(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) las componentes del vector $\vec{e}_i(t)$ en este sistema de referencia ($i = 1, 2, \dots, n$). El sistema diferencial (8) equivale entonces al sistema diferencial numérico que sigue (formado por $n + n^2$ ecuaciones con $n + n^2$ incógnitas x_i, b_{ji})

$$(9) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \xi_j b_{ij}; \quad \frac{db_{ji}}{dt} = \sum_{k=1}^n \omega_{ki} b_{jk} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Es un sistema diferencial lineal con coeficientes continuos en I . Admite pues una solución única, definida, en I y tomando un sistema de valores dados en el punto t_0 , de donde el primer aserto (de acuerdo con el sistema de referencia elegido, estos valores iniciales son aquí $x_i(t_0) = 0$ y $b_{ji}(t_0) = \delta_{ij}$, donde $\delta_{i,j}$ designa el símbolo de Kronecker).

Para ver que esta solución define bien una referencia, se pone $\Delta(t) = \det([b_{ij}(t)])$ y se ve, como en el estudio hecho en el tomo 4, p. 46 que

$$\frac{d\Delta}{dt} = \left(\sum_i \omega_{ii}(t) \right) \Delta(t)$$

y como las condiciones iniciales implican $\Delta(t_0) \neq 0$, se deduce que $\Delta(t)$ no se anula nunca, puesto que

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^t \left(\sum_i \omega_{ii}(\tau) \right) d\tau.$$

Si las funciones ξ_i y ω_{ij} son de clase C^p , el segundo aserto resulta de la proposición I.2.1 del tomo 4, de donde el resultado.]

Observación importante. Si el sistema de referencia \mathcal{R}_0 es *ortonormal* y si, para todo $t \in I$, la matriz $\omega_{ij}(t)$ es *antisimétrica*, el sistema de referencia móvil obtenido ρ es *ortonormal* y de la misma orientación que \mathcal{R}_0 (véase teoremas X.2.1 y X.3.2).

Cuando el sistema de referencia móvil ρ es indeformable, la matriz $(\omega_{ij}(t))$ definida por (9) recibe el nombre de *matriz de rotación* en el instante t del sistema de referencia móvil ρ .

Vamos a estudiar ahora el caso (el más importante para las aplicaciones) en que $n = 3$. En este caso, tendremos una interpretación cinemática de la matriz $(\omega_{ij}(t))$; dar las funciones $(\xi_i; \omega_{ij})$ equivaldrá a dar el *campo de velocidades* de ρ , en cada instante t , respecto al sistema de referencia $\rho(t)$.

§ X.4 SISTEMAS DE REFERENCIA MÓVILES INDEFORMABLES EN DIMENSIÓN 2 Ó 3

Empezaremos con el estudio de los sistemas de referencia móviles de \mathcal{E}_3 ; el caso (fácil) de los sistemas de referencia móviles de \mathcal{E}_2 se estudiará al final del §.

Rotación instantánea de un sistema de referencia móvil indeformable de \mathcal{E}_3

Sea $\rho : I \rightarrow \mathcal{E}_3 \times \mathcal{B}(E_3)$, $t \mapsto (A(t); \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ un sistema de referencia móvil (con un parámetro) de \mathcal{E}_3 , definido y derivable en un intervalo I de \mathbf{R} y, para cada $t \in I$, sea D_t el endomorfismo de E_3 definido por

$$(1) \quad D_t(\vec{e}_i(t)) = \frac{d\vec{e}_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Sabemos que el sistema de referencia móvil ρ es **indeformable** si, para todo $t \in I$, el endomorfismo D_t es **antisimétrico**. Ahora bien, los endomorfismos antisimétricos de E_3 (supuesto *orientado*) son de la forma $\vec{X} \mapsto \vec{K} \wedge \vec{X}$, donde \vec{K} designa un vector fijado de E_3 .

Si el sistema de referencia móvil ρ es indeformable, existe una función vectorial

$$\vec{\Omega} : I \rightarrow E_3, \quad t \mapsto \vec{\Omega}(t)$$

que verifica, para todo $t \in I$, las relaciones

$$(2) \quad \boxed{\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{e}_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)}.$$

Al ser independientes los vectores $\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)$, se observará que el vector $\vec{\Omega}(t)$ queda totalmente definido por las relaciones (2). Daremos la siguiente

Definición X.4.1

Si $\rho = (A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ es un sistema de referencia móvil **indeformable** del espacio afín euclídeo **orientado** \mathcal{E}_3 , el vector $\vec{\Omega}(t)$ definido por (2) se denomina **rotación instantánea** de este sistema de referencia para el valor t del parámetro (o en el instante t).

Entiéndase bien que la función $\vec{\Omega}$ depende solamente de la base móvil $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ y no del origen A del sistema de referencia móvil. Por otra parte, *queda cambiada por su opuesta al cambiar la orientación de \mathcal{E}_3 .*

● En lo que sigue, supondremos fija la orientación de \mathcal{E}_3 .

Caso de un sistema de referencia ortonormal

Sea $\rho = (A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un sistema de referencia móvil **ortonormal** de \mathcal{E}_3 (y, por lo tanto, *indeformable*). Cambiando si es preciso la función \vec{e}_3 por su opuesta, podemos suponer siempre que este sistema de referencia móvil es *directo* (véase p. 621). Si se designan por $(p(t), q(t), r(t))$ las componentes del vector $\vec{\Omega}(t)$ en la base $(\vec{e}_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$, se tiene, al aplicar (2),

$$(3) \quad \boxed{\frac{d\vec{e}_1}{dt} = r\vec{e}_2 - q\vec{e}_3, \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} = p\vec{e}_3 - r\vec{e}_1, \quad \frac{d\vec{e}_3}{dt} = q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2,}$$

de donde

$$(4) \quad p = \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_3}{dt}, \quad q = \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt},$$

$$r = \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} - \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{dt}.$$

Las relaciones (4) permiten determinar las funciones p, q, r por derivación de las funciones $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Observación. Se hubiesen podido definir a priori tres funciones p, q, r mediante las relaciones (4) y comprobar seguidamente que la función

$$\vec{\Omega} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$$

satisficiera (2). Es un procedimiento elemental para demostrar la existencia de la función $\vec{\Omega}$.

Ejemplos: Sistemas de referencia de Frenet y de Darboux

La introducción del vector rotación nos permitirá dar una interpretación sencilla de las fórmulas de Frenet (p. 403) y de Darboux (p. 556).

a) Sea γ un arco orientado de clase D^3 de \mathcal{E}_3 , regular y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal

$$I \mapsto \mathcal{E}_3, \quad s \mapsto M(s)$$

y sea

$$\mathcal{F} : s \mapsto (M(s); \vec{\tau}(s), \vec{v}(s), \vec{\beta}(s)) \quad (s \in I)$$

la función **referencia de Frenet** asociada a esta parametrización (ver p. 401). Es un sistema de referencia móvil de clase C^1 en I , que verifica las *fórmulas de Frenet* $dM/ds = \vec{\tau}$ y

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = -\rho \vec{\tau} + \theta \vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \theta \vec{v},$$

donde ρ y θ designan las funciones *curvatura* y *torsión* de γ .

Por comparación con (3) se ve que la rotación instantánea de este sistema de referencia móvil es la función

$$I \rightarrow E_3, \quad s \mapsto \vec{\omega}(s) = -\theta(s) \vec{\tau}(s) + \rho(s) \vec{\beta}(s),$$

o sea

$$(5) \quad \boxed{\vec{\omega} = -\theta \vec{\tau} + \rho \vec{\beta}}.$$

b) Sea Σ una *hoja geométrica* de clase C^2 de \mathcal{E}_3 y sea λ un *arco regular* de clase C^2 trazado sobre Σ , definido por una parametrización normal

$$I \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad s \mapsto P(s).$$

A este arco va ligado un sistema de referencia móvil, denominado **sistema de Darboux** (véase p. 555), sea éste

$$s \mapsto (P(s); \vec{\tau}(s), \vec{g}(s), \vec{h}(s)) \quad (s \in I),$$

que verifica las relaciones

$$\frac{d\rho}{ds} = \tau$$

y

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho_g \vec{g} + \rho_n \vec{h}, \quad \frac{d\vec{g}}{ds} = -\rho_g \vec{\tau} - \theta_g \vec{h}, \quad \frac{d\vec{h}}{ds} = -\rho_n \vec{\tau} + \theta_g \vec{g};$$

ρ_n , ρ_g y θ_g designan respectivamente la curvatura normal, la curvatura geodésica y la torsión geodésica de γ . Por comparación con (3) se ve que la rotación instantánea de este sistema de referencia móvil viene dada por

$$(6) \quad \boxed{\vec{\Omega}(s) = -\theta_g \vec{\tau} - \rho_n \vec{g} + \rho_g \vec{h}}.$$

Designemos por $(P; \vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta})$ el sistema de referencia de Frenet de este mismo arco, y por ρ , θ las funciones curvatura y torsión asociadas a la parametrización considerada. Introduciendo una función continua α tal que $\vec{h} = \vec{v} \cos \alpha + \vec{\beta} \sin \alpha$ (igual por lo tanto a una determinación continua del ángulo orientado (\vec{v}, \vec{h}) y suponiendo a γ de clase D^3 , hemos establecido (p. 560) las relaciones:

$$\rho_n = \rho \cos \alpha, \quad \rho_g = \rho \sin \alpha, \quad \theta_g = \theta - \frac{d\alpha}{ds}.$$

Se deduce de ahí que la rotación del sistema de referencia de Darboux verifica

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{d\alpha}{ds} - \theta \right) \vec{\tau} + \rho \vec{\beta},$$

o sea,

$$(7) \quad \vec{\Omega} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{\tau} + \vec{\omega},$$

designando por $\vec{\omega}$ la rotación instantánea del sistema de referencia de Frenet de γ .

Se podría establecer directamente la fórmula (7) mediante aplicación de la teoría de composición de movimientos (§ XII.10) observando que el *movimiento relativo* del sistema de referencia de Darboux respecto al sistema de referencia de Frenet es una rotación de velocidad angular $d\alpha/ds$ alrededor del eje $(P, \vec{\tau})$ (ligado a \mathcal{F}).

Funciones ligadas a un sistema de referencia indeformable

Volvamos al caso general de un sistema de referencia móvil derivable e indeformable $\rho = (A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de \mathcal{E}_3 , definido en un intervalo I de \mathbf{R} , y sea $\vec{\Omega}$ su rotación instantánea.

Por definición, una función vectorial ligada a ρ es una función de la forma

$$\vec{V}: I \rightarrow E_3, \quad t \mapsto X_1 \vec{e}_1(t) + X_2 \vec{e}_2(t) + X_3 \vec{e}_3(t),$$

donde X_1 , X_2 , X_3 designan constantes arbitrarias (véase p. 627). Una tal función es derivable en I y verifica

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^3 X_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 X_i \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{e}_i(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{V}(t).$$

o sea, abreviadamente:

$$(8) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{V}.$$

Del mismo modo, una aplicación de I en \mathcal{E}_3 se dirá **ligada** a ρ si es de la forma

$$t \mapsto M(t) = A(t) + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i(t),$$

donde x_1, x_2, x_3 designan constantes arbitrarias. En el lenguaje de la Cinemática, una tal función se dice que es un **movimiento puntual** ligado a ρ . Una tal función es derivable en I y verifica, para todo $t \in I$:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dA}{dt} + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{A(t)M(t)}.$$

Para conocer las derivadas en el punto t de todas las funciones de esta forma, basta por lo tanto conocer los vectores dA/dt y $\vec{\Omega}(t)$. En general estos vectores se definen mediante sus componentes en la base $(\vec{e}_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$, y se pone

$$(9) \quad \frac{dA}{dt} = \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 + \zeta \vec{e}_3, \quad \vec{\Omega} = p \vec{e}_1 + q \vec{e}_2 + r \vec{e}_3.$$

Determinación de un sistema de referencia móvil ortonormal de \mathcal{E}_3 dando las funciones $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$

Particularizando el teorema X.3.3, se obtiene (teniendo en cuenta el teorema X.3.2):

Teorema X.4.1.

Sea $(\xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ un sistema de seis funciones numéricas continuas en un intervalo I de \mathbf{R} y sea \mathcal{R}_0 un sistema de referencia ortonormal directo de \mathcal{E}_3 . Para cada $t_0 \in I$, existe un sistema de referencia móvil único $\rho = (A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de \mathcal{E}_3 , de clase C^1 en I , que verifica $\rho(t_0) = \mathcal{R}_0$ y

$$\left\| \begin{aligned} (\forall t \in I) \quad \frac{dA}{dt} &= \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 + \zeta \vec{e}_3, \\ \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= r\vec{e}_2 - q\vec{e}_3 \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} = p\vec{e}_3 - r\vec{e}_1, \quad \frac{d\vec{e}_3}{dt} = q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2; \\ \text{además, este sistema de referencia es ortonormal y directo.} \end{aligned} \right.$$

Esto resulta inmediatamente del teorema X.3.3 y del hecho de que la matriz $W(t)$ viene dada aquí por

$$W(t) = \begin{bmatrix} 0 & -r(t) & q(t) \\ r(t) & 0 & -p(t) \\ -q(t) & p(t) & 0 \end{bmatrix},$$

que es pues antisimétrica.]]

La determinación de un arco de \mathcal{E}_3 por medio de sus ecuaciones intrínsecas es un caso particular de este resultado general (véase p. 420). Corresponde al caso en que se tiene $\xi = 1$, $\eta = \zeta = 0$, $p = -\theta$, $q = 0$, $r = \rho$ (designando por ρ y θ las funciones curvatura y torsión y siendo la variable un parámetro normal).

Sistemas de referencia móviles ortonormales de \mathcal{E}_2

En el plano orientado \mathcal{E}_2 , elijamos un sistema de referencia ortonormal directo (fijo) $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dar una función vectorial

$$I \rightarrow E_2, \quad t \mapsto \vec{e}(t)$$

de norma constante y de clase C^p en el intervalo I equivale a dar una función numérica θ , de clase C^p en I , que verifica

$$(\forall t \in I) \quad \vec{e}(t) = r(\vec{i} \cos \theta(t) + \vec{j} \sin \theta(t)).$$

Esta función θ es una determinación continua del ángulo orientado $(\vec{i}, \vec{e}(t))$.

Se ve entonces que dar un sistema de referencia móvil ortonormal directo $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de \mathcal{E}_2 equivale a dar una función $A: I \rightarrow \mathcal{E}_2$, $t \mapsto A(t)$ (que define el origen del sistema de referencia) y una función numérica $\theta: I \rightarrow \mathbf{R}$, que verifica

$$(10) \quad \vec{e}_1 = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta, \quad \vec{e}_2 = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta.$$

El sistema de referencia es de clase C^p si, y solamente si, las funciones A y θ son de clase C^p .

Por derivación de (10) se obtiene:

$$(11) \quad \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_2, \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_1.$$

Para interpretar las relaciones (11), identifiquemos \mathcal{E}_2 con un plano afín \mathcal{P} del espacio orientado \mathcal{E}_3 y tomemos un vector unitario \vec{k} ortogonal a \mathcal{P} , tal que el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sea *directo*. Poniendo

$$\vec{\Omega}(t) = \theta'(t) \vec{k},$$

las relaciones (11) equivalen a

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_1, \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_2;$$

El vector $\vec{\Omega}(t)$ es la *rotación instantánea* del sistema de referencia móvil ortonormal directo $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 (véase la figura 1).

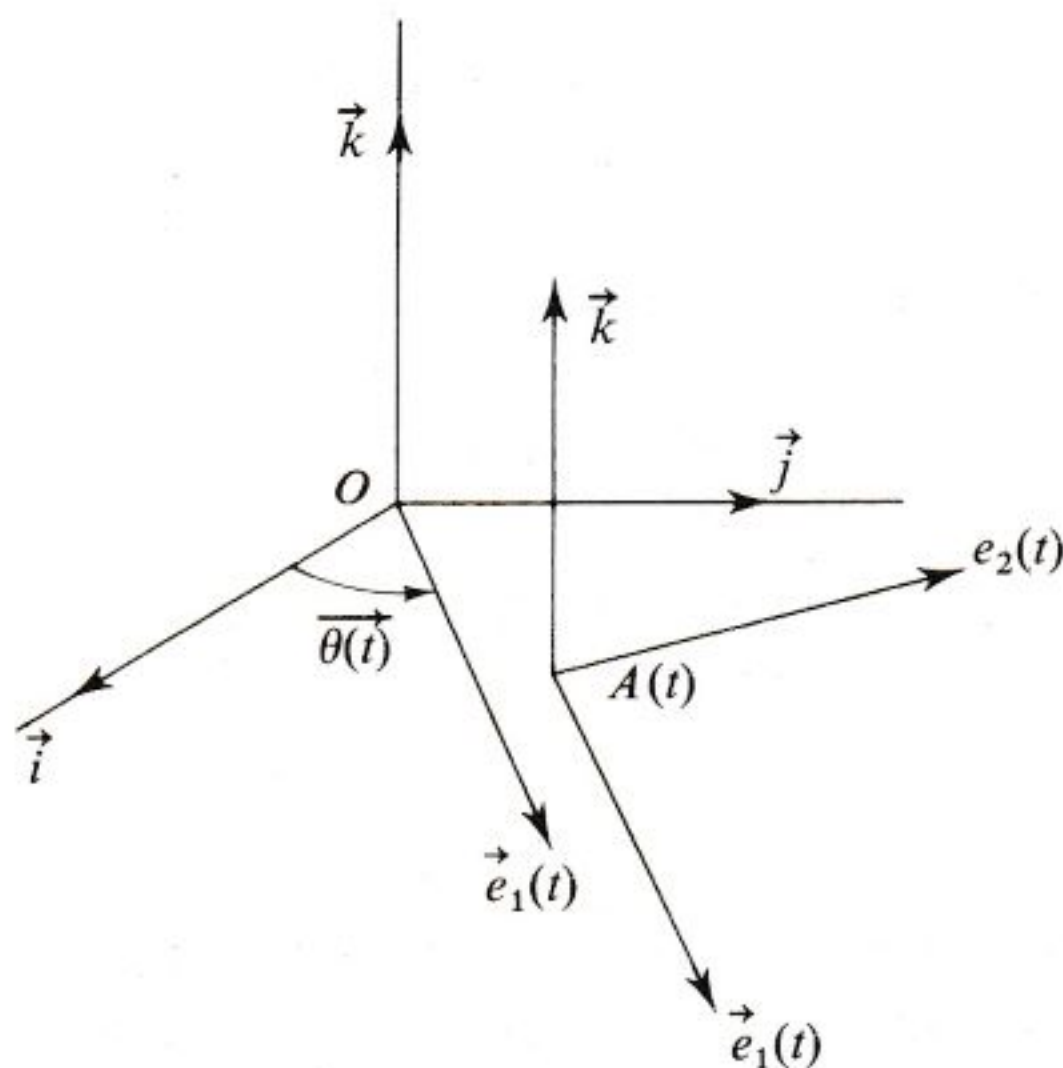


Figura 1.

El caso de un sistema de referencia móvil ortonormal de \mathcal{E}_2 se reduce pues al de un sistema de referencia ortonormal móvil de \mathcal{E}_3 , lo cual permite darle un significado cinemático.

§ X.5 SISTEMAS DE REFERENCIA MÓVILES INDEFORMABLES CON k PARÁMETROS DE \mathcal{E}_3 . EJEMPLOS

Teniendo que ocuparnos solamente de aplicaciones cinemáticas, nos limitaremos al estudio de sistemas de referencia móviles con k parámetros de \mathcal{E}_3 .

Supondremos el espacio \mathcal{E}_3 orientado.

Sea Δ un dominio de \mathbf{R}^k ($k \geq 2$) y

$$\rho: \Delta \rightarrow \mathcal{E}_3 \times \mathcal{B}(E_3), \quad u \mapsto (A(u); \vec{e}_1(u), \vec{e}_2(u), \vec{e}_3(u))$$

un sistema de referencia móvil *indeformable y diferenciable* definido en Δ .

Designemos por (u_1, \dots, u_k) las coordenadas de un punto cualquiera $u \in \Delta$ y por $\partial f / \partial u_\lambda$ la derivada parcial λ -ésima de una función cualquiera f diferenciable en Δ .

Para cada $\lambda = 1, 2, \dots, k$ y cada $u \in \Delta$ definimos un endomorfismo $D_{\lambda, u}$ de E_3 por las condiciones

$$D_{\lambda, u}(\vec{e}_i(u)) = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u_\lambda}(u) \quad (i = 1, 2, 3);$$

del hecho de ser el sistema de referencia ρ indeformable se deduce que este endomorfismo es *antisimétrico*; los cálculos son los mismos que en el § X.3. Existe pues un vector $\vec{\Omega}_\lambda(u)$ que verifica

$$(1) \quad \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u_\lambda}(u) = \vec{\Omega}_\lambda(u) \wedge \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Este vector $\vec{\Omega}_\lambda(u)$ recibe el nombre de **rotación** (instantánea) **virtual** del sistema de referencia ρ en el punto u , respecto a la variable u_λ ; diremos también que es la λ -ésima *rotación instantánea parcial*.

En lenguaje intuitivo (pero eficaz): *el vector $\vec{\Omega}_\lambda(u)$ es la rotación instantánea del sistema de referencia móvil con un parámetro obtenido al hacer variar solamente u_λ (permaneciendo fijas las restantes coordenadas de u). Esta interpretación permite muchas veces determinar sin cálculo los vectores $\vec{\Omega}_\lambda(u)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, k$) apoyándose en el principio siguiente, que se desprende del estudio hecho en el § anterior.*

*Si, para todo real α suficientemente próximo a 0, el desplazamiento que lleva el sistema de referencia $\rho(u_1, \dots, u_k)$ al sistema de referencia $\rho(u_1, \dots, u_\lambda + \alpha, \dots, u_k)$ es una **rotación de ángulo α** alrededor de un eje $\vec{\Delta}$, entonces la λ -ésima rotación instantánea parcial $\vec{\Omega}_\lambda(u)$, del sistema de referencia ρ en el punto $u = (u_1, \dots, u_k)$ es el vector director unitario del eje $\vec{\Delta}$.*

(Utilizamos aquí el convenio establecido en la página 617.)

Este caso se presenta con frecuencia en la práctica.

Entiéndase bien que antes de aplicar este principio es preciso a veces tomar un sistema de referencia móvil $\rho_0 = (O; \vec{e}_1(u), \dots, \vec{e}_n(u))$ de origen O fijo, que define la misma base móvil (\vec{e}_i) . Sabemos, en efecto, que los sistemas de referencia ρ y ρ_0 admiten las mismas rotaciones parciales instantáneas.

Observación. Sea

$$\vec{V} : \Delta \rightarrow E_n, \quad u \mapsto \sum_{i=1}^3 X_i \vec{e}_i(u)$$

(donde X_1, X_2, X_3 designan constantes) una función vectorial ligada al sistema de referencia móvil ρ . Esta función es diferenciable y sus derivadas parciales vienen dadas por

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial u_\lambda}(u) = \sum_{i=1}^3 X_i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u_\lambda}(u) = \sum_{i=1}^3 X_i \vec{\Omega}_\lambda(u) \wedge \vec{e}_i(u),$$

o sea

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial u_\lambda}(u) = \vec{\Omega}_\lambda(u) \wedge \vec{V}(u).$$

Su diferencial en el punto u viene definida por

$$d\vec{V} = \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial \vec{V}}{\partial u_\lambda}(u) du_\lambda = \sum_{\lambda=1}^k \vec{\Omega}_\lambda(u) du_\lambda \wedge \vec{V}(u)$$

El símbolo $\sum_{\lambda=1}^k \vec{\Omega}_\lambda(u) du_\lambda$ (que representa una forma diferencial con valores en E_n) recibirá el nombre de **rotación infinitesimal** del sistema de referencia móvil ρ .

El ejemplo que sigue es fundamental.

Sistema de referencia definido por ángulos de Euler

Supongamos dado un sistema de referencia ortonormal directo $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 . A cada punto (ψ, θ, φ) de \mathbf{R}^3 asociamos los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ (que dependen de este punto) definidos por (véase la figura 2):

$$\vec{u} = \vec{i} \cos \psi + \vec{j} \sin \psi, \quad \vec{v} = -\vec{i} \sin \psi + \vec{j} \cos \psi,$$

$$\vec{K} = \vec{k} \cos \theta - \vec{v} \sin \theta, \quad \vec{w} = \vec{K} \wedge \vec{u},$$

$$\vec{I} = \vec{u} \cos \psi + \vec{w} \sin \psi, \quad \vec{J} = -\vec{u} \sin \psi + \vec{v} \cos \psi.$$

Entonces el sistema de referencia $\rho_1(\psi) = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ es el que se deduce de φ por la rotación de ángulo ψ alrededor del eje (O, \vec{k}) ; el sistema de referencia

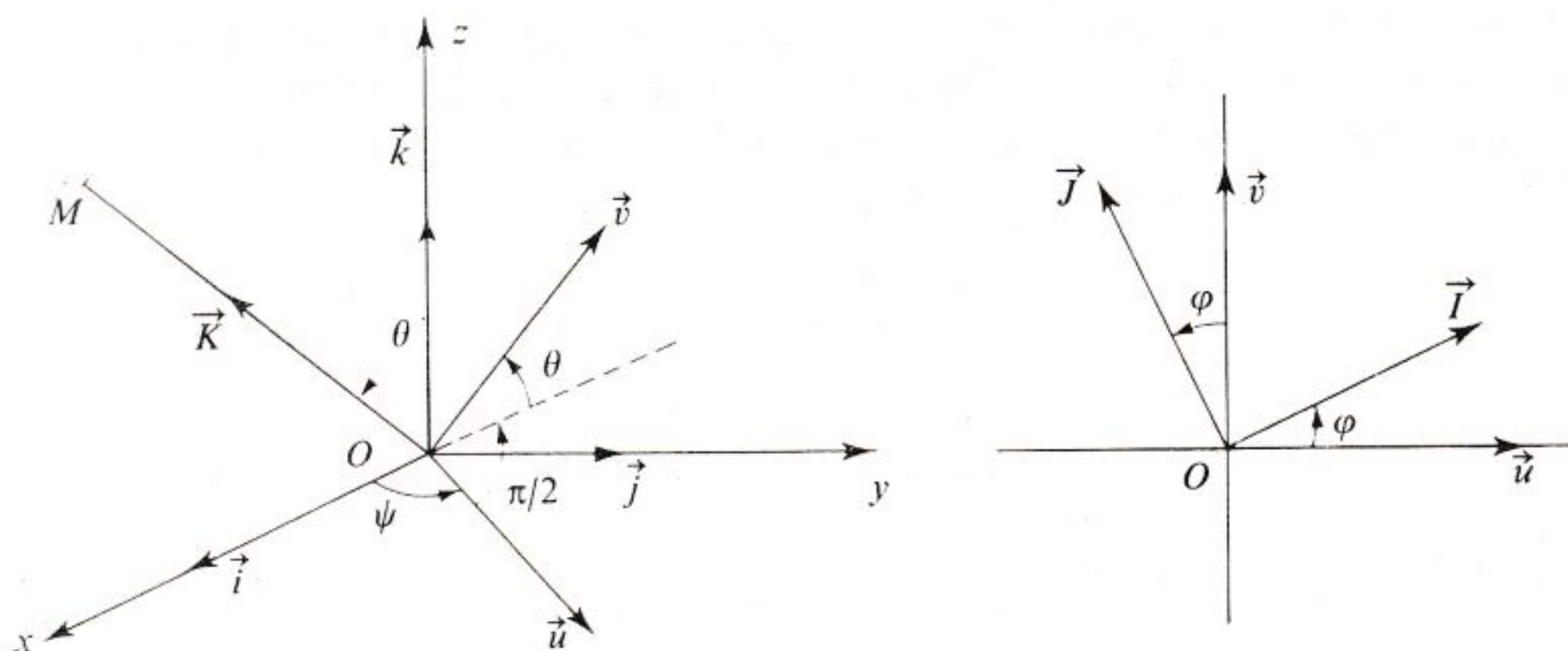


Figura 2.

$\rho_2(\psi, \theta) = (O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{K})$ se deduce de $\rho_1(\psi)$ por la rotación de ángulo θ alrededor del eje (O, \vec{u}) , y el sistema de referencia $\rho(\psi, \theta, \varphi) = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ se deduce de $\rho_2(\psi, \theta)$ por la rotación de ángulo φ alrededor del eje (O, \vec{K}) ; todos estos sistemas de referencia son ortonormales y directos.

Recordemos que el sistema de referencia $\rho(\psi, \theta, \varphi)$ se dice que admite los números ψ, θ, φ como **ángulos de Euler** (véase tomo 1, p. 339-340) y observemos que un sistema de referencia ortonormal dado admite (respecto a \mathcal{R}) una infinidad de sistemas de ángulos de Euler.

La aplicación $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathcal{E}_3 \times \mathcal{B}(E_3)$, $(\psi, \theta, \varphi) \mapsto \rho(\psi, \theta, \varphi)$ define un *sistema de referencia móvil con tres parámetros* de \mathcal{E}_3 . Vamos a calcular sus rotaciones virtuales por aplicación de los principios anteriores:

a) Si (permaneciendo fijos θ y φ), ψ aumenta en $\Delta\psi$, el sistema de referencia $\rho(\psi, \theta, \varphi)$ sufre una rotación de ángulo $\Delta\psi$ alrededor del eje (O, \vec{k}) ; su primera rotación parcial es pues el vector $\vec{\Omega}_1 = \vec{k}$.

b) Si (permaneciendo ψ y φ fijos), θ aumenta en $\Delta\theta$, el sistema de referencia $\rho(\psi, \theta, \varphi)$ sufre una rotación de ángulo $\Delta\theta$ alrededor del eje (O, \vec{u}) ; su segunda rotación parcial es pues el vector $\vec{\Omega}_2 = \vec{u}$.

c) Si (permaneciendo fijos ψ y θ), φ aumenta en $\Delta\varphi$, el sistema de referencia $\rho(\psi, \theta, \varphi)$ sufre una rotación de ángulo $\Delta\varphi$ alrededor del eje (O, \vec{K}) ; su tercera rotación parcial es pues el vector $\vec{\Omega}_3 = \vec{K}$.

Resumiremos estos resultados diciendo que *la rotación infinitesimal del sistema de referencia móvil ρ en el punto (ψ, θ, φ) es*

$$\vec{k} d\psi + \vec{u} d\theta + \vec{K} d\varphi.$$

Se ve inmediatamente que la rotación infinitesimal del sistema de referencia $\rho_1(\psi)$ es $\vec{k} d\psi$ y que la rotación infinitesimal del sistema de referencia $\rho_2(\psi, \theta)$ es $\vec{k} d\psi + \vec{u} d\theta$.

Observación. Para todo real r , el número M de \mathcal{E}_3 definido por $\overrightarrow{OM} = r\vec{K}$ es el punto de *coordenadas esféricas* (r, ψ, θ) en el sistema de referencia dado \mathcal{R} . Si se considera este punto como una función de las tres variables reales r, ψ, θ , se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \vec{K}, \quad \frac{\partial M}{\partial \psi} = r \frac{\partial \vec{K}}{\partial \psi} = r\vec{\Omega}_1 \wedge \vec{K} = r\vec{k} \wedge \vec{K} = -r\vec{u},$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = r \frac{\partial \vec{K}}{\partial \theta} = r\vec{\Omega}_2 \wedge \vec{K} = r\vec{u} \wedge \vec{K} = -r\vec{w},$$

de donde

$$dM = \vec{K} dr - r\vec{u} d\psi - r\vec{w} d\theta.$$

Si se suponen dadas tres funciones derivables $t \mapsto r(t)$, $t \mapsto \psi(t)$, $t \mapsto \theta(t)$ definidas en un mismo intervalo I de \mathbf{R} , la función compuesta

$$t \mapsto P(t) = M(r(t), \psi(t), \theta(t)),$$

verifica

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K} \frac{dr}{dt} - r\vec{u} \frac{d\psi}{dt} - r\vec{w} \frac{d\theta}{dt}.$$

Obtenemos así la velocidad de un movimiento puntual definido en coordenadas esféricas. El cálculo de la aceleración d^2P/dt^2 se hará en el § XI.3.

§ X.6 VUELTA A LOS SISTEMAS DE REFERENCIA MÓVILES CON UN PARÁMETRO DE \mathcal{E}_3 . PRINCIPIO DE ADICIÓN DE LOS VECTORES ROTACIONES

Se suele definir un sistema de referencia móvil con un parámetro de \mathcal{E}_3 dando, para cada valor de la variable t , un sistema $(u_1(t), \dots, u_k(t))$ de *parámetros* que definen la posición de este sistema de referencia en el instante t . En este caso, la rotación instantánea del sistema de referencia móvil se obtiene fácilmente aplicando la proposición que sigue:

Teorema X.6.1

(Principio de adición de los vectores rotaciones.)
Sea Δ un dominio de \mathbf{R}^k ($k \geq 2$) y $\rho: \Delta \rightarrow \mathcal{E}_3 \times \mathcal{B}(E_3)$ un sistema de referencia móvil **diferenciable e indeformable** de \mathcal{E}_3 .

Sea por otra parte

$$u : I \rightarrow \Delta, \quad t \mapsto (u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t))$$

una función **derivable**, definida en un intervalo I de \mathbf{R} y con valores en Δ . Entonces el sistema de referencia móvil (con un parámetro) $t \mapsto \rho(u(t))$ ($t \in I$) es **indeformable** y su **rotación instantánea** en el instante t es el vector

$$(1) \quad \vec{\omega}(t) = \sum_{\lambda=1}^k \vec{\Omega}_{\lambda}(u(t)) u'_{\lambda}(t)$$

donde $\vec{\Omega}_1(u), \dots, \vec{\Omega}_k(u)$ designan las **rotaciones parciales** del sistema de referencia dado en el punto u .

Demostración. Pongamos $\rho(u) = (A(u); \vec{e}_1(u), \vec{e}_2(u), \vec{e}_3(u))$ y para todo $t \in I$ sea $\vec{e}_i(t) = \vec{e}_i(u(t))$ ($i = 1, 2, 3$). Al ser el sistema de referencia móvil dado ρ indeformable, resulta evidente en primer lugar que el sistema de referencia móvil

$$\sigma : t \mapsto (A(u(t)); \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$$

es **indeformable**. Según el teorema de derivación de funciones compuestas se tiene, por otra parte, para $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u_{\lambda}}(u(t)) \frac{du_{\lambda}}{dt},$$

o sea (según la definición de rotaciones parciales)

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^k \vec{\Omega}_{\lambda}(u(t)) \wedge \vec{e}_i(u(t)) u'_{\lambda}(t).$$

El vector $\vec{\omega}(t)$ definido por (1) verifica, pues,

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{e}_i(t) \quad (i = 1, 2, 3);$$

es por lo tanto la rotación instantánea, en el instante t , del sistema de referencia móvil $\sigma : t \mapsto \rho(u(t))$.]

En lenguaje intuitivo, se obtiene la rotación instantánea del sistema de referencia móvil σ haciendo variar sucesivamente cada uno de los parámetros u_1, u_2, \dots, u_k y sumando las rotaciones virtuales $\vec{\Omega}_{\lambda}(t) u'_{\lambda}(t)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, k$) que corresponden a estos movimientos.

Ejemplo fundamental

Supongamos dadas tres funciones numéricas ψ, θ, φ derivables en un intervalo I de R y para cada $t \in I$ sea $\sigma(t) = (O; \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$ el sistema de referencia ortonormal directo de origen O que admite a los números $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$ como *ángulos de Euler* respecto a un sistema de referencia dado $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (véase § 5). Con las notaciones utilizadas en la página 638, se ve inmediatamente que la rotación instantánea de este sistema de referencia en el instante t es el vector

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(t) &= \psi' \vec{k} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{K} \\ &= \theta' \vec{u} + \psi' \operatorname{sen} \theta \vec{v} + (\psi' \cos \theta + \varphi') \vec{K} \\ &= (\theta' \cos \varphi + \psi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) \vec{I} + (\psi' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \theta' \operatorname{sen} \varphi) \vec{J} \\ &\quad + (\psi' \cos \theta + \varphi') \vec{K}.\end{aligned}$$

Se obtienen así las componentes p, q, r de la rotación instantánea en el sistema de referencia móvil, o sea

$$\begin{aligned}p &= \psi' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \theta' \cos \varphi, & q &= \psi' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \theta' \operatorname{sen} \varphi, \\ & & r &= \psi' \cos \theta + \varphi' .\end{aligned}$$

Se deducirán fácilmente las componentes de la rotación instantánea en el sistema de referencia fijo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, que son

$$\begin{aligned}p_1 &= \varphi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \theta' \cos \psi, & q_1 &= \varphi' \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \theta' \operatorname{sen} \varphi, \\ & & r_1 &= \varphi_1 \cos \theta + \psi' .\end{aligned}$$

Estas fórmulas son muy importantes para la dinámica de los sólidos.

Capítulo XI

Cinemática del punto

§ XI.1 INTRODUCCIÓN

La Cinemática tiene por objeto el estudio de los campos de vectores constituidos por las velocidades y las aceleraciones de los puntos de un sistema material en movimiento.

Empezaremos por el caso en que el sistema material es asimilable a un punto (cinemática del punto). En este caso, la Cinemática no hace sino traducir, en un lenguaje adaptado a las realidades físicas, ciertas propiedades de las funciones derivables, definidas sobre un intervalo de \mathbf{R} , con valores en un espacio afín euclídeo de dimensión 3. Este espacio se designará por \mathcal{E}_3 y el espacio vectorial euclídeo asociado será designado por E_3 .

Emprenderemos seguidamente la cinemática del sólido con el estudio de la teoría del *sistema de referencia móvil*. En efecto, para definir en cada instante la posición de un sólido en movimiento, nos vemos obligados a adjuntarle un sistema de referencia móvil.

No hablaremos aquí de las dificultades suscitadas por los conceptos de espacio y de tiempo y nos limitaremos a un modelo simplificado: el espacio será un espacio afín euclídeo de dimensión 3, el tiempo será una variable real y las funciones consideradas se supondrán suficientemente regulares. Sin embargo, la presentación axiomática de este modelo no ha de ser causa de que nos olvidemos de las realidades físicas que le han servido de base ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ De hecho, la Mecánica relativista lleva a la consideración de movimientos puntuales con valores en el espacio-tiempo que no es un espacio afín euclídeo. Nos hemos limitado voluntariamente al cuadro elemental de la Cinemática denominada «clásica».

El capítulo presente, consagrado a la cinemática del punto, consistirá pues en esencia en interpretar resultados conocidos (véase cap. VI y también tomo 2, cap. IV) en el lenguaje utilizado en Mecánica.

Definición XI.1.1

Un **movimiento puntual** en el espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 es una aplicación continua $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$, $t \mapsto M = f(t)$, donde I designa un intervalo de \mathbf{R} .

Por abuso de lenguaje se suele hablar de «movimiento de un *punto* móvil» en lugar de «movimiento puntual». Entiéndase bien, que la palabra «punto» no designa entonces un punto de \mathcal{E}_3 (ya que entonces este «punto» sería fijo). Lo que es un elemento de \mathcal{E}_3 , es el valor $M = f(t)$ de la función f en un instante dado t . El *punto* $M = f(t)$ se dice que es *la posición del móvil en el instante t* .

Se puede, sin embargo, considerar los diversos puntos $f(t)$ (cuando t recorre I) como posiciones sucesivas de una «partícula» en movimiento.

En el estudio que sigue nos limitaremos a considerar movimientos puntuales definidos por aplicaciones de clase C^2 . Pero hay que tener en cuenta que en Física, ciertos problemas llevan a funciones f que son solamente de clase C^1 a trozos (por ejemplo, en los problemas de *choques*). En la práctica se presentan también con frecuencia movimientos que solamente son de clase C^2 a trozos (caso de discontinuidades en las aceleraciones, debidas a la intervención brusca de nuevas fuerzas.)

Veamos la terminología en uso:

- la variable $t \in I$ se denomina **tiempo**;
- la imagen de I por f se denomina **trayectoria** del movimiento;
- para todo $t \in I$, el vector $\vec{V}(t) = df/dt$ recibe el nombre de **velocidad en el instante t** (del movimiento puntual considerado); el número $v(t) = \|\vec{V}(t)\|$ se denomina **velocidad numérica en el instante t** ;
- para todo $t \in I$, el vector $\vec{\Gamma}(t) = d^2f/dt^2$ recibe el nombre de **aceleración en el instante t** (del movimiento puntual considerado).

Finalmente, si la *masa* de la «partícula en movimiento» M es igual a m , el número

$$T = \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{m}{2} \|\vec{V}(t)\|^2,$$

recibe el nombre de **energía cinética** de M en el instante t . En cuestiones teóricas la masa m de M se supondrá igual a 1.

Movimientos de trayectoria notable

Se dice que un movimiento es *rectilíneo* si su trayectoria está contenida en una recta, que es *circular* si su trayectoria está contenida en una circunferencia, y finalmente que es *plano* si su trayectoria está contenida en *un plano*; por ejemplo todo movimiento circular es plano.

Movimiento acelerado, movimiento retardado, movimiento uniforme

Sea $v : t \mapsto v(t)$ la velocidad numérica de un movimiento puntual definido por $f : I \rightarrow \mathcal{E}_3$ y sea $\vec{V}(t)$ la velocidad en el instante t . De las hipótesis hechas se desprende que la función v es de clase C^1 .

Se dice que el movimiento es:

- **retardado** (o *frenado*) en el instante t_0 si $\vec{V}(t_0) \neq 0$ y $\frac{dv}{dt}(t_0) \leq 0$;
- **acelerado** en el instante t_0 si $\vec{V}(t_0) \neq 0$ y $\frac{dv}{dt}(t_0) \geq 0$;
- *retardado* si es retardado en cada instante;
- *acelerado* si es acelerado en cada instante.

Finalmente, se dice que el movimiento es **uniforme** si su velocidad numérica $v(t)$ es *constante*.

En los casos corrientes se podrá subdividir el intervalo I con ayuda de una sucesión (t_k) estrictamente creciente, finita o no, tal que

- a) en cada intervalo $[t_k, t_{k+1}]$, f defina un movimiento acelerado o un movimiento retardado;
- b) tenga

$$I = \bigcup_k [t_k, t_{k+1}].$$

Ley horaria (o: ley del tiempo)

Supongamos dado un *arco geométrico orientado* γ de clase C^2 y sea $g : J \rightarrow \mathcal{E}_3$, $u \mapsto g(u)$ una parametrización admisible de γ . A toda función numérica $\theta : I \rightarrow J$, de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} , podemos asociar el *movimiento puntual* $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ definido por $f(t) = g(\theta(t))$. La trayectoria de este movimiento está contenida en el soporte $\bar{\gamma}$ de γ y al dar la función θ queda precisada la manera en que la partícula considerada se desplaza en γ .

Si la parametrización g es **normal**, la función θ se dice que es una **ley horaria** del movimiento f ; el número $s = \theta(t)$ recibe el nombre de *abscisa curvilínea* de la partícula móvil en el instante t . En este caso la *velocidad en el instante t* queda definida por

$$\vec{V}(t) = f'(t) = g'(s) \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau},$$

donde $\vec{\tau}$ designa el vector unitario tangente a γ en el punto $g(s) = f(t)$; la *velocidad numérica* es $v = |ds/dt|$.

Se observará que el movimiento considerado es *uniforme* si, y solamente si, la ley horaria $t \mapsto s = \theta(t)$ es una *función afín*; cambiando si es preciso la orientación de γ nos podremos entonces limitar al caso en que esta ley es de la forma $s = vt + \text{Cte}$, designando por v una constante positiva (igual a la velocidad numérica).

A la inversa, supongamos dado un movimiento puntual $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$, de clase C^2 y sea γ el arco geométrico de clase C^2 definido por la parametrización f . Si la *velocidad del movimiento f* no se anula nunca, la aplicación

$$\theta: t \mapsto s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt$$

(donde t_0 designa un punto fijo cualquiera de I) define un parámetro normal en γ ; si $g = f \circ \theta^{-1}$ designa la parametrización normal correspondiente, la función θ es una *ley horaria* del movimiento (asociada a esta parametrización). Se observará que, en este caso, la función θ es creciente.

Resumiendo, cuando se da una *parametrización normal* $g: J \rightarrow \mathcal{E}_3$, $s \mapsto g(s)$ de clase C^2 y una *ley horaria* $I \rightarrow J$, $t \mapsto s(t)$ de clase C^2 , queda definido un movimiento cuya trayectoria está contenida en el soporte del arco regular definido por la parametrización g .

A la inversa, todo movimiento puntual de clase C^2 cuya velocidad no se anula nunca puede ser definido de esta manera.

Hodógrafa

Sea $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$, $t \mapsto M = f(t)$ un movimiento puntual y sea O un punto fijo cualquiera de \mathcal{E}_3 .

Para cada $t \in I$, sea $P(t)$ el punto definido por $\overrightarrow{OP} = f'(t) = \vec{V}(t)$.

La aplicación $t \mapsto P(t)$ define un arco geométrico \mathcal{H} de clase C^1 . Por definición, este arco es denominado la **hodógrafa**, relativa al punto O , del movimiento puntual considerado.

Las hodógrafas, relativas a los distintos puntos de \mathcal{E}_3 , de un mismo movimiento puntual, se deducen unas de otras mediante *traslaciones*. Salvo una traslación, se podrá hablar por lo tanto de la hodógrafa del movimiento.

Ejemplos

1. Para que un movimiento sea *uniforme*, es necesario y suficiente que su hodógrafa se halle trazada sobre una esfera de radio no nulo.

2. La hodógrafa de un movimiento rectilíneo es un segmento de recta. Para que un movimiento sea *rectilíneo y uniforme*, es necesario y suficiente que su hodógrafa relativa a un punto O se reduzca a un punto distinto de O .

Movimientos rectilíneos

Por aplicación de la proposición V.8.1, se tiene inmediatamente:

XI.1.1 Para que un movimiento puntual cuya velocidad no se anule nunca sea **rectilíneo**, es necesario y suficiente que en cada instante t , su **vector velocidad** $\vec{V}(t)$, y su **vector aceleración** $\vec{I}(t)$ sean **colineales**.

Sea entonces $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$, $t \mapsto M(t)$ un movimiento puntual *rectilíneo* y sea D la recta que contiene a su trayectoria. Si O designa un punto fijo de D y \vec{u} un vector unitario director de D , dar la función f equivale a dar la función numérica $x: I \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}$: el número $x(t)$ es la abscisa del punto $M(t)$ sobre el eje (O, \vec{u}) ; la función x es una *ley horaria* del movimiento. Se tiene aquí

$$\vec{V}(t) = x'(t)\vec{u}, \quad \vec{I}(t) = x''(t)\vec{u}, \quad v(t) = |x'(t)|.$$

El movimiento es *acelerado* si $x'(t)x''(t) > 0$, es *retardado* si $x'(t)x''(t) < 0$.

Observación. Si en cada instante t , el vector velocidad $\vec{V}(t)$ y el vector aceleración $\vec{I}(t)$ de un movimiento puntual son *colineales*, pero el vector $\vec{V}(t)$ se anula para ciertos valores de t , entonces el movimiento no es necesariamente rectilíneo; su trayectoria puede ser una línea poligonal.

§ XI.2 DETERMINACIÓN DE UN MOVIMIENTO PUNTUAL

Según el teorema fundamental de la Dinámica, el movimiento de una partícula de masa m verifica la relación

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma},$$

donde $\vec{\Gamma}$ designa la aceleración de esta partícula en un instante cualquiera t y \vec{F} la resultante de las fuerzas que actúan sobre esta partícula en el mismo instante.

En los casos elementales se conoce una expresión de \vec{F} , en función de t , de la posición M de la partícula en el instante t y de su velocidad \vec{V} en el mismo instante. El movimiento de la partícula considerada verifica entonces una *ecuación diferencial* de la forma

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{1}{m} \vec{F}(t, M, \vec{V}), \quad \text{con} \quad \vec{V} = \frac{dM}{dt};$$

el problema más corriente consiste en buscar el movimiento de la partícula M conociendo su posición M_0 y su velocidad \vec{V}_0 en un instante dado t_0 . El instante t_0 es llamado *instante inicial* y se dice que la terna (t_0, M_0, \vec{V}_0) es un *sistema de condiciones iniciales*.

La proposición siguiente, que se desprende del teorema de Cauchy-Lipschitz (véase tomo 4 p. 111) muestra que, en ciertas condiciones de regularidad, tal movimiento existe y es único (pudiéndose suponer igual a 1 la masa m).

Teorema XI.2.1

Designemos ⁽¹⁾ por U un abierto de $\mathcal{E}_3 \times E_3$, por I un intervalo de \mathbf{R} , por $\vec{F}: I \times U \rightarrow E_3$ una aplicación de clase C^k ($k \geq 1$) y sea $(t_0; (M_0, \vec{V}_0))$ un elemento de $I \times U$.

Existe entonces un subintervalo J de I que contiene a t_0 y una aplicación $f: J \rightarrow \mathcal{E}_3$, $t \mapsto M = f(t)$ de clase C^{k+2} en J tal que

a) $f(t_0) = M_0, \quad f'(t_0) = \vec{V}_0$

$$(\forall t \in J) \quad (f(t), f'(t)) \in U \quad \text{y} \quad f''(t) = \vec{F}(t, f(t), f'(t)).$$

b) Si g es otra solución de la **ecuación diferencial**

$$g'' = \vec{F}(t, g, g')$$

⁽¹⁾ Recordemos que E_3 designa el espacio vectorial asociado a \mathcal{E}_3 .

definida en un subintervalo K de J que contiene a t_0 y que verifica las mismas condiciones iniciales

$$g(t_0) = M_0, \quad g'(t_0) = \vec{V}_0,$$

entonces se tiene $K \subset J$ y g es la restricción de f a K .

Demostración. Identifiquemos \mathcal{E}_3 con E_3 tomando un origen y consideremos el sistema diferencial vectorial

$$(2) \quad x' = y, \quad y' = \vec{F}(t, x, y)$$

donde la incógnita (x, y) es una función con valores en $\mathcal{E}_3 \times E_3$. Al ser la función \vec{F} de clase (por lo menos) C^1 , la proposición I.2.1 del tomo 4 prueba que es localmente de Lipschitz respecto a la variable (x, y) . El teorema de Cauchy-Lipschitz y la proposición III.1.4 del tomo 4 aseguran entonces la existencia de una *solución maximal única* (x, y) de (2) definida en un subintervalo J de I que contiene a t_0 y que verifica las *condiciones iniciales*:

$$x(t_0) = M_0, \quad x'(t_0) = \vec{V}_0.$$

Según la proposición I.2.1 del tomo 4, las funciones x, y son de clase C^{k+1} ; pero puesto que se tiene $x' = y$, resulta que x es de clase C^{k+2} .

La función $f: t \mapsto x(t)$ posee entonces todas las propiedades anunciadas (véase tomo 4 p. 115). \square

Observemos que el punto t_0 puede ser un *extremo* de I . En el estudio físico del movimiento, el intervalo I es muchas veces de la forma $[t_0, t_1[$; al número t_0 se le puede dar entonces, justificadamente, el nombre de «instante inicial».

Con las hipótesis del teorema XI.2.1, el movimiento puntual definido por f recibe el nombre de *movimiento puntual determinado* (o definido) *mediante la función \vec{F} y las condiciones iniciales (t_0, M_0, \vec{V}_0) .*

Este teorema constituye el *principio fundamental de la dinámica del punto material*. Si una partícula está sometida a fuerzas que dependen solamente de su posición y de su velocidad en cada instante, su movimiento queda determinado cuando se da su posición y su velocidad en el instante inicial.

Observación. Si en el teorema XI.2.1, el intervalo J está *acotado* su longitud recibe el nombre de *duración* del movimiento definido por las condiciones iniciales (t_0, M_0, \vec{V}_0) .

Ejemplo

Veremos más adelante (§ 5) que el movimiento de una partícula M sometida a una *atracción* (o *repulsión*) de un punto fijo O tiene lugar en un plano que pasa por O . Pongámonos en el caso en que esta atracción (o repulsión) sea *proporcional a la distancia* $r = OM$. El movimiento de M verifica entonces una ecuación diferencial de la forma

$$(3) \quad \frac{d^2 \vec{M}}{dt^2} = k \vec{OM},$$

donde k designa una constante positiva [resp. negativa] cuando se trata de una repulsión [resp. de una atracción] ($k \neq 0$).

Designemos por \mathcal{P} un plano que pase por O , que contenga a la trayectoria, y dotemos a este plano de un sistema de referencia afín $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de origen O . Las coordenadas x, y de la partícula móvil en este sistema de referencia verifican el sistema diferencial

$$(4) \quad x'' = kx, \quad y'' = ky$$

cuya integración es inmediata.

Dadas las condiciones iniciales (t_0, M_0, \vec{V}_0) , distingamos dos casos:

a) Si $k > 0$, pongamos $k = \omega^2 (\omega > 0)$; el movimiento puntual considerado viene entonces definido por:

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 \cosh(\omega(t - t_0)) + \frac{\vec{V}_0}{\omega} \sinh(\omega(t - t_0)).$$

Es rectilíneo si los vectores \vec{OM}_0, \vec{V}_0 son colineales, de lo contrario su trayectoria es una *rama de hipérbola de centro* O .

b) Si $k < 0$, pongamos $k = -\omega^2 (\omega > 0)$; el movimiento viene entonces definido por

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 \cos(\omega(t - t_0)) + \frac{\vec{V}_0}{\omega} \sin(\omega(t - t_0)).$$

Es rectilíneo si los vectores \vec{OM}_0, \vec{V}_0 son colineales, de lo contrario su trayectoria es una *elipse de centro* O . En los dos casos el movimiento es *periódico*, de período

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, y la proyección de M sobre una recta cualquiera que pase por O tiene un movimiento *oscilatorio*.

Para precisar el movimiento, investiguemos si es *acelerado o retardado*. Poniendo

$$v = \|\vec{V}(t)\| = \frac{dM}{dt},$$

se tiene aquí

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2 \frac{dM}{dt} \cdot \frac{d^2M}{dt^2} = 2 k \overrightarrow{OM} \cdot \frac{dM}{dt} = k \frac{d}{dt} (\|\overrightarrow{OM}\|^2).$$

Se tiene pues $v^2 = kr^2 + \text{Cte}$, con $r = OM$. De ahí resulta, que

- en el caso de una *atracción* ($k < 0$) el movimiento es acelerado cuando M se acerca a O y retardado en caso contrario;
- en el caso de una *repulsión* ($k > 0$) el movimiento es acelerado cuando M se aleja de O y retardado en caso contrario.

Integral primera de la energía cinética

Consideremos una partícula M de masa unidad sometida a una fuerza \vec{F} de la forma $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U$, donde U designa una función numérica de clase C^2 en un abierto de \mathcal{E}_3 . Se dice entonces que la fuerza \vec{F} deriva de la **función de fuerza** U , o del **potencial** $-U$. El movimiento de esta partícula verifica la ecuación diferencial

$$(5) \quad \frac{d^2M}{dt^2} = \overrightarrow{\text{grad}}_M U,$$

de donde se deduce

$$\frac{d^2M}{dt^2} \cdot \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dt} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_M U = \frac{d}{dt} U(M(t)),$$

o sea

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{dM}{dt} \right\|^2 \right) - U(M(t)) = 0.$$

Resulta de ahí que la función

$$E : t \mapsto \frac{1}{2} \left\| \frac{dM}{dt} \right\|^2 - U(M(t)) = \frac{v^2(t)}{2} - U(M(t))$$

es *constante* (el número $E(t)$ recibe el nombre de energía mecánica de la partícula en el instante t). Si el movimiento verifica las condiciones iniciales (t_0, M_0, \vec{V}_0) y si se pone $v_0 = \|\vec{V}_0\|$, se tiene

$$\frac{v^2(t)}{2} - U(M(t)) = h, \quad \text{con } h = \frac{1}{2} v_0^2 - U(M_0).$$

La relación (6) se dice que es la **integral primera de la energía cinética**, y es una ecuación diferencial de primer orden que no es equivalente a (5), pero que resulta muy útil para el estudio del movimiento.

El ejemplo anterior corresponde al caso en que se tiene $U(r) = kr$. El caso de un movimiento newtoniano (§ 7) corresponde al caso de una función de fuerza de la forma $U(r) = k/r$ (caso de un potencial denominado *newtoniano*).

§ XI.3 COMPONENTES DE LA VELOCIDAD Y DE LA ACELERACIÓN

Supongamos dado en \mathcal{E}_3 un movimiento puntual

$$f: I \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad t \mapsto M = f(t).$$

Vamos a determinar las componentes de la velocidad $\vec{V}(t)$ y de la aceleración $\vec{\Gamma}(t)$ del movimiento en los sistemas de referencia más frecuentemente utilizados.

Caso en que $f(t)$ viene dada por sus coordenadas en un sistema de referencia afín

Sean $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ las coordenadas de $f(t)$ en un sistema de referencia afín fijo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 . Según el teorema IV.1.2 del tomo 2, se tiene inmediatamente

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} + z'(t) \vec{k} \\ \vec{\Gamma}(t) &= x''(t) \vec{i} + y''(t) \vec{j} + z''(t) \vec{k} \end{aligned}$$

La energía cinética de la partícula en movimiento (supuesta de masa 1) viene entonces dada, en cada instante, por

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Componentes de \vec{V} y \vec{I} en el sistema de referencia de Frenet

Supongamos definido el movimiento mediante una parametrización normal de su trayectoria γ , o sea $s \mapsto g(s)$, y una *ley horaria* $t \mapsto s(t)$, lo cual es siempre posible si la velocidad $\vec{V}(t)$ de este movimiento no se anula nunca (véase p. 646). Si se designa por $\vec{\tau} = g'(s)$ el vector unitario tangente asociado a la parametrización g , se tiene

$$\vec{V}(t) = \frac{dM}{dt} = g'(s) \frac{ds}{dt},$$

o sea

$$(1) \quad \boxed{\vec{V}(t) = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}(s)}.$$

El número ds/dt recibe el nombre de *velocidad escalar* del movimiento; la *velocidad numérica* es el número $v = |ds/dt|$.

Si la trayectoria no presenta puntos de inflexión (lo cual se cumple si los vectores $\vec{V}(t)$ y $\vec{I}(t)$ no son nunca colineales), el sistema de referencia de Serret-Frenet (asociado a la parametrización g) se halla definido por

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho \vec{v}, \quad \vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{v}$$

(véase la p. 401). Por derivación de (1) se tiene inmediatamente:

$$\vec{I}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau}(s) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \rho(s) \vec{v}(s),$$

o sea

$$(2) \quad \boxed{\vec{I} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{v}},$$

designando por $R = 1/\rho$ el radio de curvatura de la trayectoria en el punto $g(s)$, con $s = s(t)$.

La fórmula (2) demuestra que la aceleración se halla en el plano vectorial osculador a γ y dirigido hacia la concavidad de la curva (véase p. 414). El número d^2s/dt^2 recibe el nombre de *aceleración tangencial*; el número positivo v^2/R es la *aceleración normal*.

- Se observará que el movimiento es **uniforme** si, y solamente si, la aceleración tangencial es constantemente nula, es decir, si el vector aceleración $\vec{I}(t)$ es, en cada instante, normal a la trayectoria.

Componentes en coordenadas semipolares

Sea $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$ un movimiento puntual definido en cada instante t , dando el sistema $(r(t), \theta(t), z(t))$ de coordenadas semipolares del punto $M = f(t)$ en un sistema de referencia ortonormal fijo $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 ; supongamos las funciones r, θ, φ de clase C^2 . El punto $M = f(t)$ queda entonces definido por

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}(\theta) + z \vec{k},$$

poniendo, como de costumbre,

$$\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta.$$

Poniendo $\vec{v}(\theta) = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta$, vamos a determinar las componentes del vector velocidad $\vec{V}(t)$ y del vector aceleración $\vec{\Gamma}(t)$ en el sistema de referencia ortonormal $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta), \vec{k})$.

Se tiene, en primer lugar,

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r'(t) \vec{u} + r\theta'(t) \vec{v} + z'(t) \vec{k},$$

después, derivando nuevamente,

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(t) &= \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = r''(t) \vec{u} + 2r'(t)\theta'(t) \vec{v} + r\theta''(t) \vec{v} - r\theta'^2(t) \vec{u} + z''(t) \vec{k} \\ &= (r''(t) - r(t)\theta'^2(t)) \vec{u} + (r(t)\theta''(t) + 2r'(t)\theta'(t)) \vec{v} + z''(t) \vec{k}. \end{aligned}$$

Se deducen de ahí las componentes buscadas:

$\begin{aligned} \vec{V}(t) &: (r', r\theta', z') \\ \vec{\Gamma}(t) &: (r'' - r\theta'^2, r\theta'' + 2r'\theta', z'') \end{aligned}$
--

siendo las derivadas respecto al tiempo t .

La energía cinética de la partícula M (supuesta de masa 1) es igual a

$$T = \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 = r'^2 + r^2 \theta'^2 + z'^2.$$

Componentes en coordenadas esféricas

Sea $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$ un movimiento puntual definido en cada instante t mediante un sistema $(r(t), \theta(t), \psi(t))$ de *coordenadas esféricas* del punto $M = f(t)$ en un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 , y supongamos las funciones r, θ, ψ de clase C^2 .

Consideremos entonces el sistema de referencia móvil $\rho(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ que tiene como *ángulos de Euler*, en cada instante t , los números $\psi(t), \theta(t), 0$. Si se orienta \mathcal{E}_3 de modo que el sistema de referencia dado \mathcal{R} sea directo, el sistema de referencia $\rho(t)$ se deduce de \mathcal{R} por la rotación de ángulo $\psi(t)$ alrededor del eje (O, \vec{k}) seguida de la rotación de ángulo $\theta(t)$ alrededor del eje $(O, \vec{I}(t))$ (véase el convenio de la página 617), con

$$\vec{I}(t) = \vec{i} \cos \psi(t) + \vec{j} \sin \psi(t)$$

(véase la figura 1). La rotación instantánea de este sistema de referencia móvil queda definida por:

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k} + \theta' \vec{I} = \theta' \vec{I} + \psi' \sin \theta \vec{J} + \psi' \cos \theta \vec{K}$$

(véase § X.6 teniendo en cuenta el cambio de notaciones); la relación $\overrightarrow{OM} = r\vec{K}$ permite determinar las componentes de los vectores

$$\vec{V}(t) = \frac{dM}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2M}{dt^2}$$

en el sistema de referencia móvil $\rho(t)$. Se tiene en efecto (véase § X.4):

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{I} = \psi' \cos \theta \vec{J} - \psi' \sin \theta \vec{K}$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{J} = -\psi' \cos \theta \vec{I} + \theta' \vec{K}$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{K} = \psi' \sin \theta \vec{I} - \theta' \vec{J},$$

de donde

$$\vec{V} = \frac{dM}{dt} = r' \vec{K} + r \frac{d\vec{K}}{dt},$$

o sea

$$(3) \quad \boxed{\vec{V} = r\psi' \operatorname{sen} \theta \vec{I} - r\theta' \vec{J} + r' \vec{K}};$$

la energía cinética es:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2 \theta'^2 + r^2 \psi'^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}.$$

Por derivación de (3) se obtienen las componentes del vector \vec{I} en la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, o sea, una vez hechos los cálculos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \psi' \operatorname{sen}^2 \theta); & - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2 \theta') + r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \psi'^2; \\ & r'' - r(\theta'^2 + \psi'^2 \operatorname{sen}^2 \theta). \end{aligned}$$

Estas fórmulas no son para memorizarlas; se trata de casos particulares de las fórmulas cinemáticas de Lagrange ⁽¹⁾ que determinan el vector aceleración por medio de coordenadas curvilíneas cualesquiera.

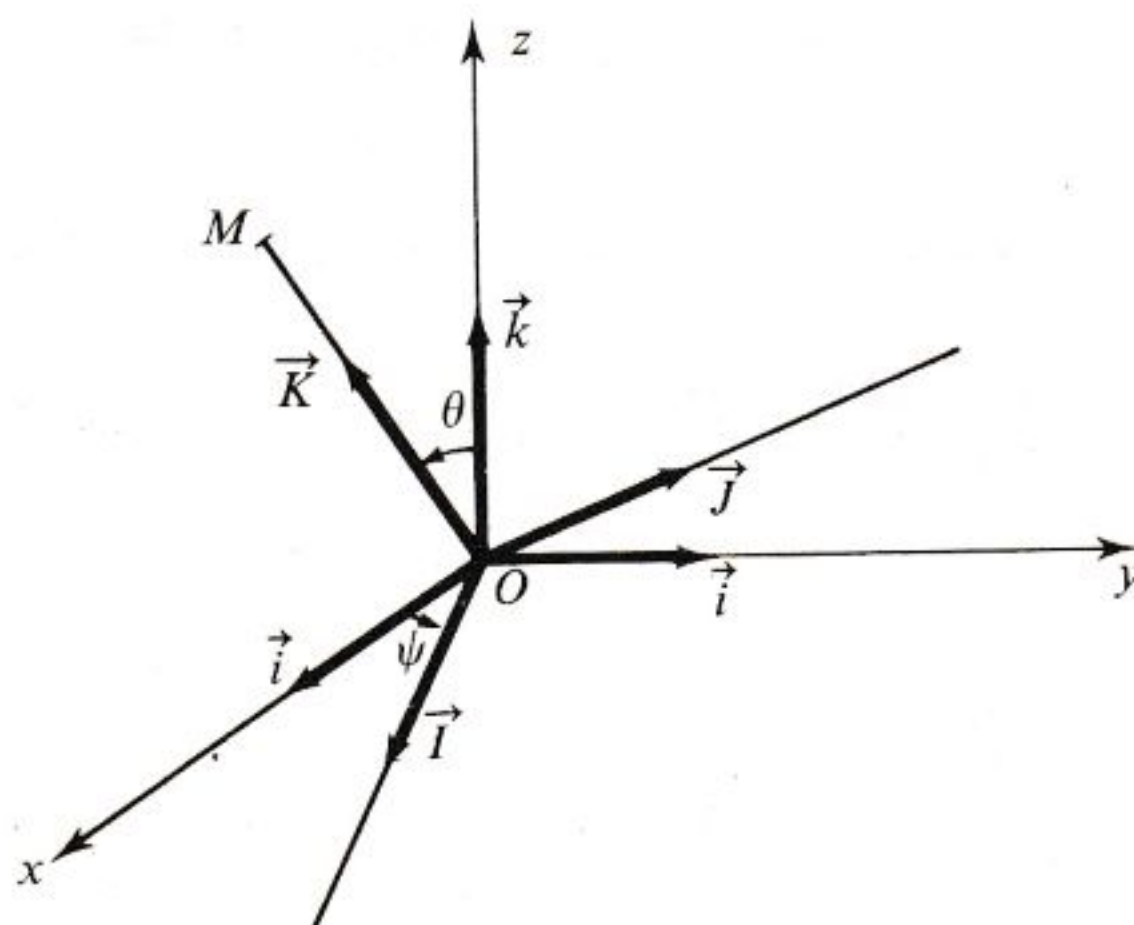


Figura 1.

⁽¹⁾ Véase [5].

§ XI.4 MOVIMIENTO CIRCULAR

Supongamos dado un movimiento circular definido mediante una aplicación $f: I \rightarrow \mathcal{E}_3$, $t \mapsto M = f(t)$ de clase C^2 . Designemos por \mathcal{P} el plano de la circunferencia C que contiene la trayectoria, por O el centro de C y por R su radio. Utilizaremos un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de origen O en \mathcal{P} (véase la figura 2).

Designemos por $M_0 = f(t_0)$ la posición del móvil en un instante dado t_0 y por θ_0 uno de los reales que verifican

$$\overrightarrow{OM}_0 = R(\vec{i} \cos \theta_0 + \vec{j} \sin \theta_0).$$

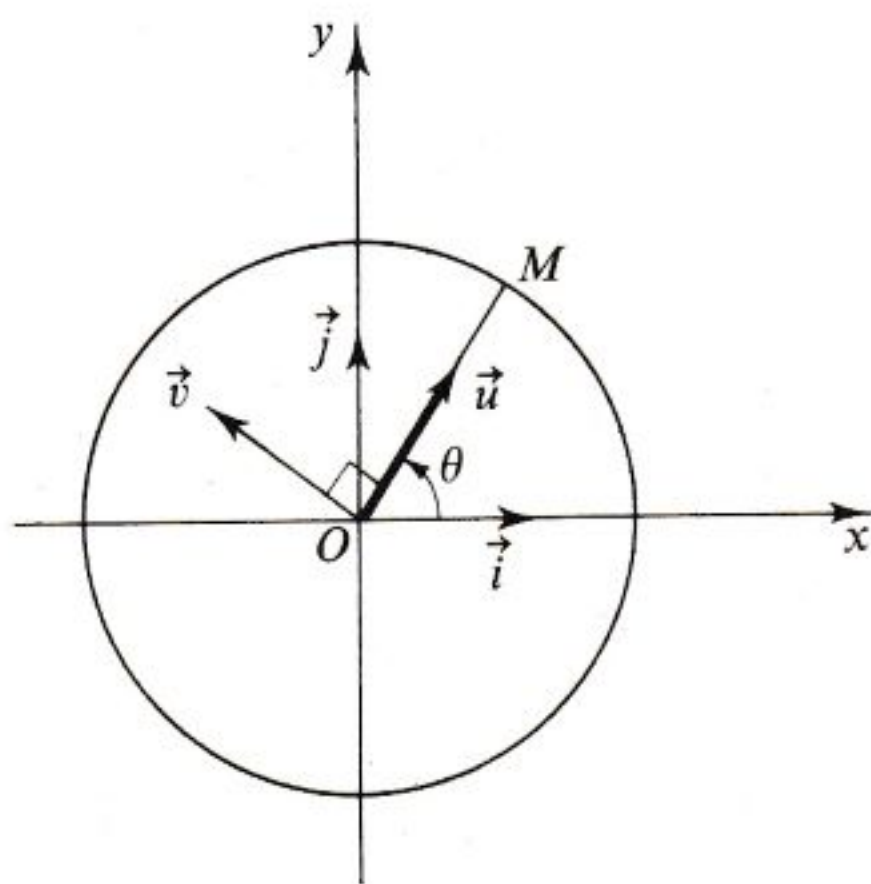


Figura 2.

Según el «teorema del levantamiento» VI.6.1, existe una función $\theta: I \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^2 lo mismo que f , determinada de manera única, que verifica $\theta(t_0) = t_0$ y

$$(1) \quad (\forall t \in I) \quad \overrightarrow{OM} = R(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta).$$

Pongamos como siempre

$$\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta, \quad \vec{v}(\theta) = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta.$$

Por derivación de (1) se tiene

$$(2) \quad \vec{V}(t) = \frac{dM}{dt} = R \frac{d\vec{u}}{dt} = R\theta' \vec{v}(\theta)$$

$$(3) \quad \vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2 M}{dt^2} = R(\theta'' \vec{v}(\theta) - \theta'^2 \vec{u}(\theta))$$

(estas fórmulas constituyen un caso particular de las que proporcionan las componentes de \vec{V} y $\vec{\Gamma}$ en coordenadas semipolares o en el sistema de referencia de Serret-Frenet).

El número $\omega = \theta'(t)$ recibe el nombre de **velocidad angular** del movimiento en el instante t ; el número $d\omega/dt = \theta''(t)$ recibe el nombre de **aceleración angular**.

La velocidad angular y la aceleración angular dependen solamente de la clase de orientación en \mathcal{P} del sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (si se sustituye esta clase por la opuesta, la velocidad y la aceleración angulares se cambian en sus opuestas respectivas).

Según (2) la *velocidad numérica* es $v(t) = R|\omega|$ y según (3) la *aceleración normal* es $v^2/R = R\omega^2$.

Suponiendo desde ahora *orientado* el espacio \mathcal{E}_3 , pongamos $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$; resulta evidente que la rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$ del sistema de referencia móvil $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ es

$$\vec{\Omega}(t) = \theta'(t) \vec{k}.$$

La relación $\vec{OM} = R\vec{u}$ permite por lo tanto escribir

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(R\vec{u}) = R(\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) = \vec{\Omega} \wedge (R\vec{u}),$$

o sea

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}}.$$

Para que el movimiento sea *uniforme* es necesario y suficiente que se tenga $d\omega/dt = 0$ para todo t , o dicho de otro modo que los vectores \vec{OM} y $\vec{\Gamma}$ sean *colineales en cada instante*. Cuando es así, ω es constante y se tiene

$$\vec{\Gamma}(t) = -R\omega^2 \vec{u}.$$

§ XI.5 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CENTRAL

Definición XI.5.1

Un movimiento puntual definido por

$$f: I \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad t \mapsto M = f(t)$$

se dice que es de **aceleración central** si existe un punto O tal que en cada instante t , el vector \overrightarrow{OM} y el vector aceleración $\vec{\Gamma}(t)$ son colineales.

Para ello, es necesario y suficiente que se tenga

$$(1) \quad (\forall t \in I) \quad \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}(t) = 0$$

(suponiendo al espacio orientado).

Designemos por $\vec{V} = dM/dt$ la velocidad del movimiento. Por derivación se tiene

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}.$$

La relación (1) equivale pues a

(2) la función vectorial $t \mapsto \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$ es constante.

Para proseguir el estudio del movimiento es preciso distinguir dos casos según que el vector constante $\vec{G} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$ sea o no nulo.

Primer caso. Se tiene en primer lugar:

XI.5.1 Sea un movimiento puntual en \mathcal{E}_3 definido por

$$f: I \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad t \mapsto M = f(t),$$

y sea \vec{V} su velocidad. Se supone que existe un punto fijo O de \mathcal{E}_3 tal que, para todo $t \in I$, se tiene

$$O \neq M \quad y \quad \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = 0.$$

Entonces este movimiento es **rectilíneo**; su trayectoria está contenida en una recta que pasa por O .

Demostración. Según la hipótesis, existe una función numérica λ , definida en I , tal que

$$(\forall t \in I) \quad \vec{V}(t) = \lambda(t) \overrightarrow{OM}.$$

Se ve fácilmente que λ es de clase C^1 (calculando λ con ayuda de un sistema de referencia afín). La función vectorial $Y(t) = \overrightarrow{OM}$ satisface pues a la ecuación diferencial

$$Y'(t) = \lambda(t) Y(t),$$

de donde inmediatamente

$$Y(t) = Y(t_0) \exp \int_{t_0}^t \lambda(u) du,$$

habiéndose fijado arbitrariamente el real $t_0 \in I$. De aquí se desprende el resultado anunciado.]]

Observaciones

1. Si se tiene $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(t) = 0$ para todo t y si existen valores de t para los cuales $M = O$, el movimiento no es necesariamente rectilíneo.
2. Igualmente se demostraría que si la *aceleración* de un movimiento se mantiene colineal con un vector fijo, este movimiento es rectilíneo.

Caso general. Volvamos a las notaciones de principio de este § y consideremos un movimiento puntual con aceleración central, que en cada instante t verifique

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(t) = \vec{G},$$

siendo el vector fijo \vec{G} **no nulo**.

- a) Se ve en primer lugar que el movimiento es *plano*, ya que el vector \overrightarrow{OM} es ortogonal a \vec{G} . Su trayectoria se halla contenida en el plano \mathcal{P} que pasa

por O y es ortogonal a \vec{G} . Además esta trayectoria no está contenida en ninguna recta que pase por O (ya que se tiene $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(t) \neq 0$) y no pasa por O . Finalmente el vector velocidad $\vec{V}(t)$ no se anula nunca.

b) Estudiemos ahora el movimiento en el plano \mathcal{P} . Para ello, dotemos a \mathcal{P} de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; designemos por \mathcal{C} el arco orientado de clase C^2 definido por la parametrización $f: t \mapsto M = f(t)$. El arco \mathcal{C} es *regular* (ya que el vector $\vec{V}(t) = f'(t)$ no es nunca nulo) y la función $r: t \mapsto r(t) = \|\overrightarrow{OM}\|$ no se anula nunca. Pongamos

$$\varphi(t) = \frac{1}{r(t)}, \quad \vec{u}(t) = \frac{1}{r(t)} \overrightarrow{OM}.$$

(véase la figura 3). Al ser la aplicación f de clase C^2 el «teorema del levantamiento» VI.6.1 implica la existencia de una función numérica $\theta: t \mapsto \theta(t)$ de clase C^2 , única módulo 2π , que verifica para todo valor de t

$$\vec{u}(t) = \vec{i} \cos \theta(t) + \vec{j} \sin \theta(t).$$

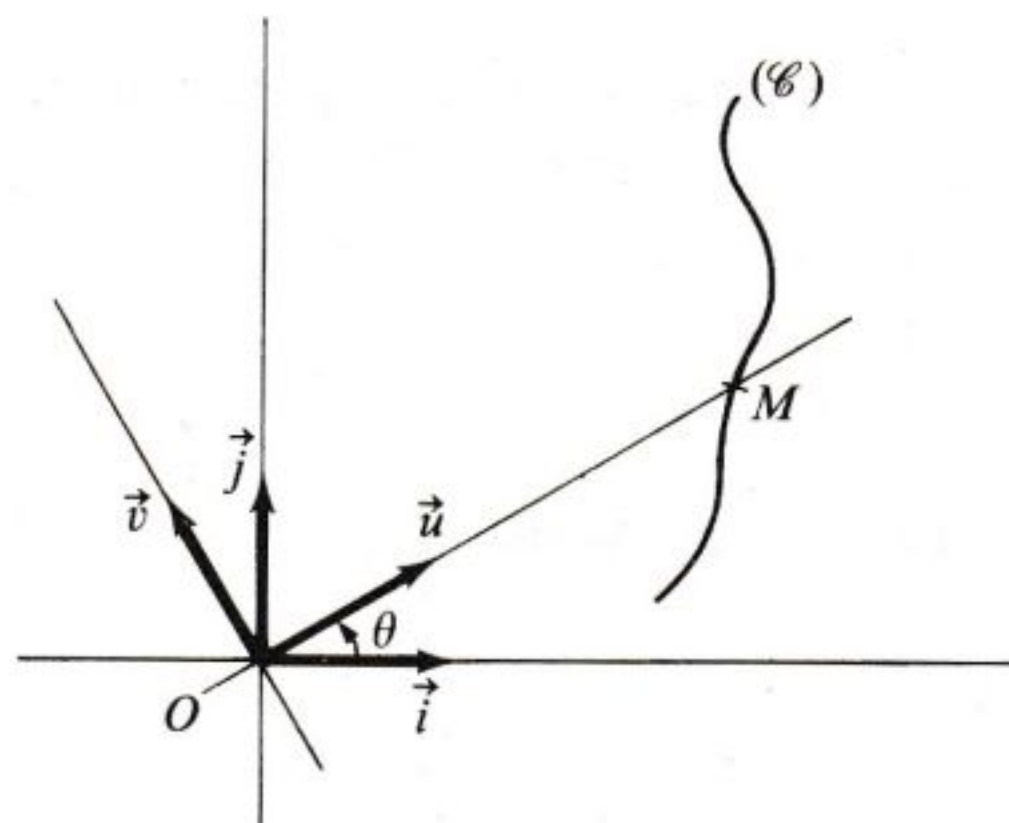


Figura 3.

● El movimiento considerado se puede definir en coordenadas polares, dando dos funciones r, θ de clase C^2 .

Poniendo $\vec{v}(t) = -\vec{i} \sin \theta(t) + \vec{j} \cos \theta(t)$, se sabe que las componentes de $\vec{V}(t)$ y $\vec{\Gamma}(t)$ en la base $(\vec{u}(t), \vec{v}(t))$ son respectivamente (véase § 3)

$$\vec{V} \begin{vmatrix} r' \\ r\theta' \end{vmatrix} \quad \vec{r} \begin{vmatrix} r'' - r\theta'^2 \\ r\theta'' + 2r'\theta' \end{vmatrix}.$$

Al ser colineales \vec{r} y \vec{u} , se tiene $r\theta'' + 2r'\theta' = 0$, y puesto que r se mantiene > 0 , esta ecuación equivale a $r^2\theta'' + 2rr'\theta' = 0$, es decir a

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0.$$

De donde resulta la conclusión: *existe una constante C tal que*

$$(3) \quad \boxed{r^2 \frac{d\theta}{dt} = C}.$$

Se encuentra de nuevo este resultado al desarrollar la relación $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \vec{G}$; en efecto, teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$ y $\vec{V} = r'\vec{u} + r\theta'\vec{v}$, se obtiene (designando por \vec{k} el vector $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i} \wedge \vec{j}$)

$$r^2 \theta' \vec{k} = \vec{G}.$$

Por lo tanto C es el único real tal que $\vec{G} = C\vec{k}$. En particular, C es *no nulo*; la relación (3) implica $d\theta/dt \neq 0$ para todo t . En consecuencia, la función $\theta : t \mapsto \theta(t)$ define un cambio de parámetro admisible en el arco \mathcal{C} . Se puede tomar siempre (en teoría) a θ como parámetro en \mathcal{C} .

Interpretación de (3): Ley de las áreas

Designemos por $J = [t_1, t_2]$ un intervalo de tiempo suficientemente pequeño para que se tenga $|\theta(t_2) - \theta(t_1)| < 2\pi$. La restricción de f al intervalo J es entonces inyectiva (puesto que la relación $f(t') = f(t)$ implica $\theta(t') - \theta(t) = 0 \pmod{2\pi}$). Pongamos $M_1 = f(t_1)$ $M_2 = f(t_2)$, y designemos por K el compacto plano cuya frontera está formada por segmentos de recta $[OM_1]$, $[OM_2]$, y por el arco $f(J)$ (véase la figura 4). Se sabe que el área de este compacto es

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\theta(t_1)}^{\theta(t_2)} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2(\theta(t)) \theta'(t) dt.$$

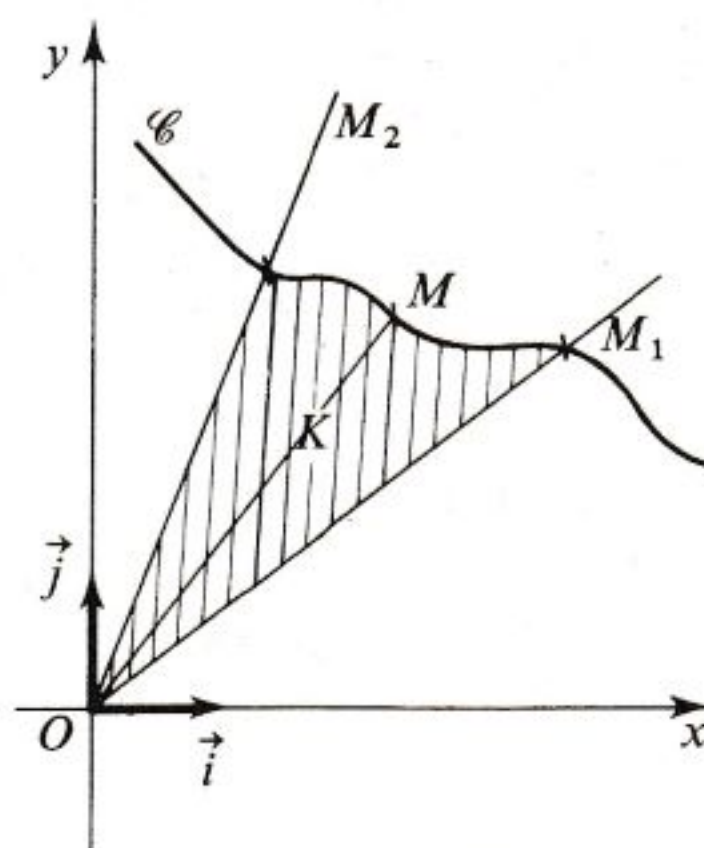


Figura 4.

Teniendo en cuenta (3) se obtiene por lo tanto

$$(4) \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} C \, dt = \frac{1}{2} C(t_2 - t_1).$$

Se traduce este resultado diciendo que *el área barrida por el radio vector [OM] es proporcional al tiempo*. La relación (3) es la forma «infinitesimal» de esta proposición y resulta cómodo escribirla en forma «diferencial»

$$(3') \quad r^2 \, d\theta = C \, dt.$$

Esta proposición recibe el nombre de **ley de las áreas**. Al número $\frac{1}{2} C$ se le llama *velocidad areolar* del movimiento.

Fórmula de Binet

Manteniendo las mismas notaciones e hipótesis se tiene

$$\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}, \quad \text{con} \quad \Gamma(t) = r''(t) - r(t) \theta'^2(t);$$

el número $\Gamma(t)$ es la *medida algebraica* del vector $\vec{\Gamma}(t)$ según el vector \vec{u} .

Nos proponemos expresar Γ en función de θ en el caso en que el arco \mathcal{C} esté definido mediante una ecuación polar de la forma $r = 1/\varphi(\theta)$ (el estudio anterior

demuestra la existencia de una tal parametrización). Por derivación de funciones compuestas se tiene (introduciendo por comodidad un abuso de escritura)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = - \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi^2(\theta)} \theta'(t),$$

y por otra parte $d\theta/dt = C\varphi^2$, de donde

$$r'(t) = - C \frac{d\varphi}{d\theta}.$$

De aquí se deduce

$$r''(t) = - C \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = - C^2 \varphi^2 \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}.$$

Llevando este valor a la expresión de Γ , se obtiene la expresión de Γ en función de $\theta = \theta(t)$:

$$(5) \quad \boxed{\Gamma = - C^2 \varphi^2(\theta) \left(\varphi(\theta) + \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \right)}.$$

La relación (5) es conocida como *fórmula de Binet*.

§ XI.6 DETERMINACIÓN DE UN MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CENTRAL DANDO LAS CONDICIONES INICIALES

En los problemas corrientes de la dinámica del punto, se conoce en cada instante la expresión de vector aceleración $\vec{I}(t)$ en función de la posición M del punto móvil y de su velocidad $\vec{V}(t)$ en dicho instante (véase § 2).

Nos proponemos determinar tal movimiento en el caso en que la aceleración es *central* y en que se conoce un sistema (t_0, M_0, \vec{V}_0) de *condiciones iniciales*.

Según el estudio hecho en el § anterior, existe un punto fijo O y un vector fijo \vec{G} tales que en cada instante t , se tiene

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(t) = \vec{G};$$

nos limitaremos aquí al caso en que $\vec{G} \neq 0$ (el caso en que $\vec{G} = 0$ lleva al estudio de movimientos rectilíneos). Se tiene entonces $\vec{OM} \neq 0$, y en cada instante, el vector unitario $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ queda bien determinado. Dar el vector aceleración \vec{F} equivale a dar el número Γ tal que $\vec{F} = \Gamma \vec{u}$.

Supondremos pues dados:

- Un sistema (t_0, M_0, \vec{V}_0) de condiciones iniciales tales que el vector $\vec{G} = \vec{OM}_0 \wedge \vec{V}_0$ sea no nulo.
- Un intervalo I de \mathbf{R} que contenga a t_0 , un abierto U de $\mathcal{E}_3 \times E_3$ que contenga (M_0, \vec{V}_0) y una función numérica F de clase C^1 en $I \times U$ tales que, en cada instante t , se tenga

$$(1) \quad \vec{F}(t) = F(t, M, \vec{V}(t)) \vec{u}, \quad \text{con} \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}.$$

El teorema XI.2.1 asegura entonces la existencia de un movimiento puntual único de duración máxima $f: t \mapsto M = f(t)$ que satisface a (1) y a las condiciones iniciales (t_0, M_0, \vec{V}_0) ; por otra parte, el estudio hecho en el § anterior prueba que este movimiento tiene lugar en el plano \mathcal{P} que pasa por O y es ortogonal al vector $\vec{G} = \vec{OM}_0 \wedge \vec{V}_0$.

Vamos a ver en qué modo se puede, en los casos corrientes, determinar explícitamente este movimiento (trayectoria y ley horaria).

Para ello vamos a elegir un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E}_3 , de origen O , tal que

$$(2) \quad \vec{i} = \frac{\vec{OM}_0}{\|\vec{OM}_0\|} \quad \text{y} \quad \vec{k} = \frac{\vec{G}}{\|\vec{G}\|} = \frac{\vec{OM}_0 \wedge \vec{V}_0}{\|\vec{OM}_0 \wedge \vec{V}_0\|};$$

en el plano \mathcal{P} utilizaremos *coordenadas polares* (r, θ) , con $r > 0$, respecto al sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$. El estudio hecho en el § anterior ha demostrado, en efecto, que se podía definir el movimiento dando las funciones r, θ de clase C^2 que constituyen en cada instante, un sistema de coordenadas polares del punto móvil $M = f(t)$ y que verifican $r(t) > 0$.

Definida la velocidad $\vec{V}(t)$ de este móvil mediante los números $r'(t)$ y $\theta'(t)$, supondremos conocida la expresión de la aceleración central $\Gamma = r'' - r\theta'^2$ en función de las variables $t, r, \theta, r', \theta'$. Esto equivale a suponer dada una función numérica $F_1(t, r, \theta, r', \theta')$ de clase C^1 en un abierto de \mathbf{R}^5 tal que, al poner $\vec{OM} = r(i \cos \theta + j \sin \theta)$ y

$$\vec{V} = r'(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) + r\theta'(-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta)$$

se tiene, en cada instante,

$$F(t, M, \vec{V}) = F_1(t, r, \theta, r', \theta').$$

Suponiendo conocida una tal función F_1 , nos encontramos con la integración del sistema diferencial

$$(3) \quad \boxed{r^2 \theta' = C \quad r'' - r\theta'^2 = F_1(t, r, \theta, r', \theta')}$$

con condiciones iniciales de la forma

$$r(t_0) = \|\vec{OM}_0\| = r_0, \quad \theta(t_0) = 0$$

(lo cual es posible dada la elección de \vec{i}) y $r'(t_0) = r'_0$, $\theta'(t_0) = \theta'_0$, de donde $C = r_0^2 \theta'_0$.

Observación. Se podría escribir el sistema diferencial verificado por las coordenadas *cartesianas* de $M = f(t)$ en el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$; pero (excepcionalmente el caso de una atracción o repulsión proporcional a la distancia estudiado en el § 2) el sistema diferencial así obtenido es por lo general menos simple que (3).

Caso en que Γ depende solamente de la posición y de la velocidad de M

Vamos a proseguir el estudio del movimiento en el caso en que la aceleración central Γ depende solamente de la posición y de la velocidad del punto móvil M . Esto equivale a decir que la función F_1 no depende de la variable t , y pondremos entonces

$$F_1(t, r, \theta, r', \theta') = \Phi(r, \theta, r', \theta').$$

En este caso las fórmulas de Binet (véase p. 664) nos permiten obtener una ecuación diferencial que determina la trayectoria de M .

Poniendo

$$\frac{1}{r} = \varphi(\theta) \quad \left[\text{es decir } \frac{1}{r(t)} = \varphi(\theta(t)) \right],$$

sabemos en efecto que la función Γ tiene que verificar

$$\Gamma = -C^2 \varphi^2 (\varphi'' + \varphi), \quad \text{con} \quad C = r_0^2 \theta'_0,$$

o sea, aquí,

$$\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + \varphi = -\frac{1}{C^2 \varphi^2} \Phi \left(r, \theta, \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt} \right)$$

con

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \quad \text{y} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(1/\varphi)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -C\varphi'(\theta).$$

La función φ queda pues determinada mediante la *ecuación diferencial*

$$(5) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = -\varphi - \frac{1}{C^2 \varphi^2} \Phi \left(\frac{1}{\varphi}, \theta, -C\varphi', C\varphi^2 \right),$$

con las *condiciones iniciales*

$$(6) \quad \varphi(0) = \frac{1}{r_0}, \quad \varphi'(0) = -\frac{r'_0}{r_0^2 \theta'_0} = -\frac{r'_0}{C}$$

(ya que hemos elegido $\theta(t_0) = 0$).

El conocimiento de φ determina el arco \mathcal{C} descrito por el punto M ; se obtiene seguidamente la expresión de la variable de tiempo t en función de la variable angular θ mediante

$$t - t_0 = \frac{1}{C} \int_0^\theta \frac{du}{\varphi^2(u)}.$$

Caso en que Γ depende solamente de la distancia $r = OM$

Este caso que es particular del anterior, se presenta con frecuencia en las aplicaciones. Es aquel en que la función F que verifica (1), depende solamente de $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ ⁽¹⁾. Podemos pues poner

⁽¹⁾ Es el único caso en que la aceleración central $\vec{\Gamma}$ deriva de una *función de fuerza* (véase ejercicio IV.13).

$$F(t, M, \vec{V}(t), \vec{u}) = \Phi(r) \quad \text{con} \quad r = \|\overrightarrow{OM}\|,$$

y el sistema diferencial (3) se reduce a

$$(7) \quad \boxed{r^2 \theta' = C \quad r'' - r\theta'^2 = \Phi(r)}$$

Podemos utilizar aquí los métodos generales expuestos anteriormente, y la curva \mathcal{C} descrita por el punto M queda determinada por la ecuación diferencial (caso particular de (5))

$$(8) \quad \boxed{\varphi'' = -\varphi - \frac{1}{C^2 \varphi^2} \Phi\left(\frac{1}{\varphi}\right)},$$

con las condiciones iniciales

$$\varphi(0) = \frac{1}{r_0}, \quad \varphi'(0) = -\frac{r'_0}{C}.$$

La ecuación diferencial (8) es una ecuación diferencial «con lagunas», del tipo $y'' = g(y)$, estudiado en el § III.5 del tomo 4.

Método de integración

Al eliminar θ' entre las dos ecuaciones (7), se ve que la función $r : t \mapsto r(t)$ verifica la ecuación diferencial «con lagunas»

$$(9) \quad r'' - \frac{C^2}{r^3} = \Phi(r).$$

Designemos por U una primitiva cualquiera de Φ . Al multiplicar los dos miembros de (9) por r' se obtiene la relación

$$(9') \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r'^2 - U(r) + \frac{C^2}{2r^2} \right) = 0$$

de donde

$$(10) \quad r'^2 = 2 U(r) - \frac{C^2}{r^2} + h, \quad \text{con } h = \text{Cte}.$$

Volvemos a encontrar aquí, en este caso particular, la integral primera de la energía cinética (véase § 2). Se tiene aquí en efecto

$$\vec{F} = U'(r) \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \overrightarrow{\text{grad}} U(r)$$

(véase ejercicio IV.13).

Si la derivada $r'(t)$ no se anula en el curso del movimiento, la relación (9') es equivalente a (9); la función r es un parámetro admisible sobre la trayectoria \mathcal{C} , y se deduce de (10) la expresión de la variable tiempo en función del parámetro r , que es:

$$(11) \quad t = t_0 + \varepsilon \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{2 U(\rho) - \frac{C^2}{\rho^2} + h}}.$$

con $\varepsilon = +1$ o $\varepsilon = -1$ según que se tenga $r'(t) > 0$ o $r'(t) < 0$. Seguidamente se tiene:

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \frac{C d\tau}{r^2(\tau)}.$$

Por un método análogo se obtendría la expresión de la variable angular θ en función de r , o de $\varphi = 1/r$, a partir de la ecuación diferencial (8). Se obtiene así una ecuación polar de la trayectoria. Desde un punto de vista práctico, este método equivale a tomar a φ como parámetro y a $d\varphi/d\theta = \varphi'$ como función incógnita (véase tomo 4 p. 129). Llevaremos a cabo los cálculos en el caso de una atracción newtoniana (véase § 7).

Caso en que $r'(t_0) = 0$

Para ver lo que ocurre cuando la derivada r' se anula durante el movimiento, nos basta con estudiar el caso en que, en el instante inicial t_0 , se tiene $r'(t_0) = 0$.

a) *Primer caso:* $r''(t_0) = 0$. Este caso se presenta si, y solamente si, se tiene

$$r_0 \theta_0'^2 + \Phi(r_0) = 0.$$

En este caso el sistema diferencial (7) admite la solución

$$r = \text{Cte} = r_0, \quad \theta = \frac{C}{r_0^2} (t - t_0);$$

puesto que la función Φ se supone de clase C^1 , esta solución es la única que verifica las condiciones iniciales $r(t_0) = r_0$, $\theta(t_0) = \theta_0$. El movimiento considerado es entonces un *movimiento circular uniforme* de velocidad angular $\omega = C/r_0^2$.

Recíprocamente, si la trayectoria del movimiento considerado está contenida en una circunferencia de centro O , se tiene necesariamente $r'(t_0) = 0$, $r''(t_0) = 0$, por lo tanto $r_0 \theta_0'^2 + \Phi(r_0) = 0$, y el movimiento es uniforme.

b) *Segundo caso:* $r''(t_0) \neq 0$. Este caso se presenta si, y solamente si, se tiene

$$r_0 \theta_0'^2 + \Phi(r_0) \neq 0.$$

Para t suficientemente próximo a t_0 , pero distinto de t_0 , la derivada $r'(t)$ es del mismo signo que $(t - t_0) r''(t_0)$ y la diferencia $r(t) - r_0$ es del mismo signo que $r''(t_0) = \Phi(r_0) + r_0 \theta_0'^2$. Existe pues un intervalo de tiempo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, con $\alpha > 0$, sobre el cual se tiene constantemente (según el signo de $r''(t_0)$), ya sea $r(t) \geq r_0$, o $r(t) \leq r_0$; en cada uno de los intervalos $[t_0, t_0 + \alpha]$, $[t_0 - \alpha, t_0]$, la función r se halla definida implícitamente mediante una relación de la forma (11), con $\varepsilon = +1$, si se tiene $(t - t_0) r''(t_0) > 0$, y $\varepsilon = -1$ si se tiene $(t - t_0) r''(t_0) < 0$.

Si, para simplificar, se supone $t_0 = 0$, resulta que la función $t \mapsto r(t)$ es *par* en el intervalo $[-\alpha, +\alpha]$.

Para obtener la marcha global del movimiento, bastará aplicar a la ecuación diferencial (9) u (8) el método expuesto en el § III.5 del tomo 4 p. 135.

§ XI.7 MOVIMIENTO PUNTUAL NEWTONIANO

Un movimiento puntual se dice que es **newtoniano** si existe un punto O y una constante $k > 0$ tales que, en cada instante, su aceleración verifica

$$\vec{r} = -k \frac{\vec{u}}{r^2}, \quad \text{con } r = \|\vec{OM}\| \quad \text{y} \quad \vec{u} = \frac{1}{r} \vec{OM}$$

(es el movimiento de una partícula M atraída por el punto O , siendo la atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia).

Se trata de un *movimiento con aceleración central*. Con las notaciones de los §§ anteriores, se tiene aquí

$$\Gamma = \Phi(r) = -\frac{k}{r^2};$$

el movimiento queda determinado en coordenadas polares (r, θ) por el sistema diferencial

$$(1) \quad \boxed{r^2 \theta' = C \quad r'' - r\theta'^2 = -\frac{k}{r^2}}.$$

(véase fórmula (7), p. 668). Según la fórmula de Binet, su trayectoria se halla definida (si $C \neq 0$) por la ecuación diferencial

$$(2) \quad \boxed{\varphi''(\theta) + \varphi(\theta) = \frac{k}{C^2}},$$

con $\varphi = \frac{1}{r}$ (ya que se tiene aquí $\Gamma = -k\varphi^2$).

Si la constante C es nula (caso de un punto en reposo o de un movimiento rectilíneo) el sistema (1) sigue siendo válido y se obtiene la ley horaria del movimiento al integrar la ecuación diferencial $r'' = -k/r^2$, lo cual no presenta ninguna dificultad. Esta ecuación se estudia en el tomo 4 p. 139.

Supongamos $C \neq 0$ y elijamos el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$, lo mismo que en el § 6, de modo que las condiciones iniciales (t_0, M_0, \vec{V}_0) verifiquen: $\overrightarrow{OM_0} = r_0 \vec{i}$, con $r_0 > 0$, de donde $\theta(t_0) = 0$.

Pondremos (véase la figura 5)

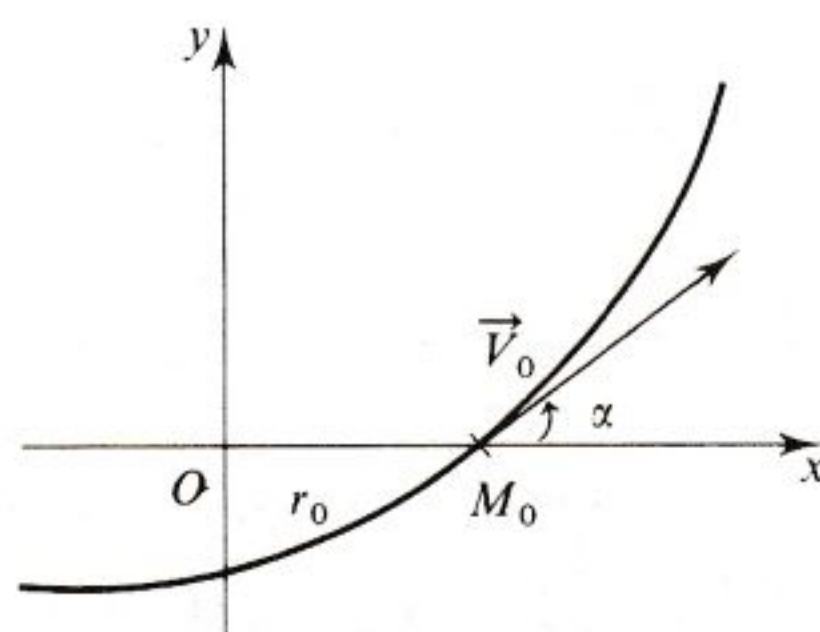


Figura 5.

$$\vec{V}_0 = v_0 (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \quad \text{con } v_0 > 0, \alpha \neq 0$$

de donde

$$r'_0 = v_0 \cos \alpha, \quad \theta'_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{r_0}, \quad C = r_0 v_0 \sin \alpha.$$

Determinación de la trayectoria

Para obtener la trayectoria basta integrar la ecuación diferencial (2) con las condiciones iniciales

$$\varphi(0) = \frac{1}{r_0}, \quad \varphi'(0) = -\frac{r'_0}{r_0^2} = -\frac{v_0 \cos \alpha}{r_0^2}.$$

Las soluciones de (2) son de la forma $\varphi(\theta) = k/C^2 + A \cos \theta + B \sin \theta$, con $A, B = \text{Cte}$; las constantes A, B se hallan aquí determinadas por las condiciones iniciales

$$\varphi(0) = \frac{1}{r_0} = \frac{k}{C^2} + A,$$

$$\varphi'(0) = -\frac{r'_0}{\theta'_0 r_0^2} = -\frac{1}{r_0} \cotg \alpha = B.$$

de donde

$$(3) \quad A = \frac{1}{r_0} - \frac{k}{C^2} = \frac{1}{r_0} - \frac{k}{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha} \quad \text{et} \quad B = -\frac{\cotg \alpha}{r_0}.$$

La trayectoria se halla pues sobre la curva E de ecuación polar

$$(4) \quad \boxed{\frac{1}{r} = \frac{k}{C^2} + A \cos \theta + B \sin \theta}.$$

Naturaleza de la trayectoria

a) Si las constantes A, B son las dos nulas, la trayectoria es una *circunferencia de centro O* . Este caso se presenta si, y solamente si, se tiene $\cos \alpha = 0$ y $1/r_0 = k/C^2$, es decir si $r'_0 = 0$ y $v_0^2 = kr_0$, o sea $r'_0 = 0$ y $\theta_0'^2 = k/r_0^3$.

En este caso el movimiento es *circular uniforme*, de velocidad angular θ'_0 .

Nos encontramos de nuevo, en este caso particular, con los resultados de la discusión del final del § 6.

b) Si las constantes A, B no son ambas nulas, la ecuación (4) puede ponerse en la forma

$$\frac{1}{r} = p(1 + e \cos(\theta - \theta_0)),$$

con

$$p = \frac{C^2}{k} \quad \text{y} \quad e = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{p},$$

donde θ_0 designa una constante adecuada. De acuerdo con el estudio hecho en el § III.4, la curva E es una **cónica de foco O y de excentricidad e** .

Mediante un cálculo fácil, se tiene (de acuerdo con (3))

$$e^2 - 1 = p^2(A^2 + B^2) - 1 = \frac{r_0^2 v_0^4 \sin^2 \alpha}{k^2} - 2 \frac{r_0 v_0^2 \sin^2 \alpha}{k}$$

o sea

$$(5) \quad e^2 - 1 = \frac{1}{k^2} r_0 v_0^2 \sin^2 \alpha (r_0 v_0^2 - 2k).$$

Se ve pues que el signo de $e^2 - 1$ depende solamente de $r_0 v_0$ y no de α . Precizando más:

a) si $v_0^2 < \frac{2k}{r_0}$, E es una **elipse**;

b) si $v_0^2 > \frac{2k}{r_0}$, E es una **hipérbola**;

c) si $v_0^2 = \frac{2k}{r_0}$, E es una **parábola**.

Observación. Buscando los valores de r_0 , v_0 para los cuales se tiene $e = 0$, se encuentra el caso del *movimiento circular*.

Más adelante daremos otro método de cálculo (p. 676).

Estudio del movimiento

Según la ley de las áreas, la función $\theta(t)$ es estrictamente monótona y su recíproca se halla definida por

$$t - t_0 = \frac{1}{C} \int_0^\theta r^2(u) du = \frac{1}{C} \int_0^\theta \frac{du}{\varphi^2(u)}.$$

De donde se deducen los resultados siguientes:

a) Si E es una *elipse* o una *circunferencia*, la trayectoria es la curva E completa (véase la figura 6) y el movimiento es *periódico*, de período

$$T = \frac{1}{|C|} \int_0^{2\pi} \frac{du}{\varphi^2(u)}$$

(ya que, al aumentar θ en 2π , el móvil vuelve a pasar por la misma posición, con la misma velocidad).

b) Si E es una *parábola*, ésta constituye la trayectoria, y es descrita una sola vez.

c) Si E es una *hipérbola*, la trayectoria queda constituida por la rama de esta hipérbola que contiene al punto M_0 y se describe una sola vez.

Para saber si el movimiento es *acelerado* o *retardado* volvamos a la ecuación diferencial vectorial que determina dicho movimiento, o sea:

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \vec{u} = -\frac{k}{r^3} \overrightarrow{OM}.$$

De ella se deduce

$$\begin{aligned} (6) \quad \frac{d}{dt}(v^2) &= 2 \frac{dM}{dt} \cdot \frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{2k}{r^3} \overrightarrow{OM} \cdot \frac{dM}{dt} \\ &= -\frac{k}{r^3} \frac{d}{dt} (\|\overrightarrow{OM}\|^2) = -\frac{2k}{r^2} \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Se ve de este modo que el movimiento es *acelerado* cuando r crece, *retardado* cuando r decrece (siendo válido este resultado para todo movimiento con aceleración central debida a una fuerza de *atracción*). La velocidad pasa por un *máximo* cuando el punto M se halla a la menor distancia posible de O , por lo tanto en un vértice de la cónica E (cuando ésta no es una circunferencia). Este punto recibe el nombre de **perigeo** de la trayectoria.

Si E es una elipse, el perigeo es el vértice de E situado sobre el eje mayor y más próximo a O . Si E es una hipérbola o una parábola, es el único vértice de E que pertenece a la trayectoria.

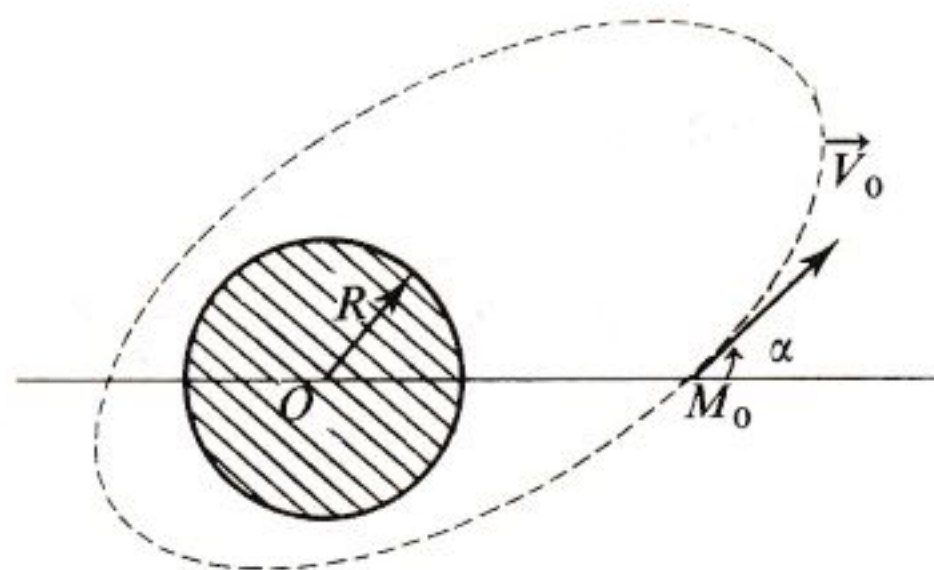


Figura 6.

Si la trayectoria es una hipérbola o una parábola, la velocidad no presenta ningún mínimo y tiende hacia 0 cuando el móvil se aleja hacia el infinito.

Si la trayectoria es una elipse, la velocidad pasa por un *mínimo* en el vértice de E , situado sobre el eje mayor, que está más alejado de O . Este punto recibe el nombre de **apogeo** de la trayectoria.

Leyes de Kepler

Supongamos que E sea una *elipse* y designemos por $2a$ y $2b$ las longitudes de sus ejes. Su *área* es entonces igual a πab . Por otra parte, según la fórmula (4) del § 5, este área es igual a $\frac{1}{2} |C| T$, designando por T el *período* del movimiento (es efectivamente el área «barrida» por el radio vector OM durante el tiempo T).

De las relaciones $p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{k}$ y $4\pi^2 a^2 b^2 = C^2 T^2$ se deduce

$$\frac{C^2 T^2}{4 a^3} = \pi^2 \frac{b^2}{a} = \pi^2 \frac{C^2}{k}, \text{ o sea } \frac{T^2}{4 a^3} = \frac{\pi^2}{k}.$$

La razón T^2/a^3 no depende pues de las condiciones iniciales. Enunciaremos:

Si la trayectoria de un movimiento newtoniano de centro O es acotada, se trata de una **elipse** de foco O (o de una circunferencia de centro O) que verifica la ley de las áreas; el movimiento es **periódico** y el cuadrado del período es proporcional al cubo del eje mayor de esta elipse.

Este enunciado constituye las *leyes de Kepler*. (Se observará que los resultados obtenidos son válidos en el caso de una trayectoria circular, designando por $2a$ el diámetro de esta circunferencia.)

Integral primera de la energía cinética

De las relaciones (6) se deduce, por integración

$$v^2 + \frac{2k}{r} = \text{Cte} = v_0^2 + \frac{2k}{r_0},$$

con

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Esta relación es un caso particular del teorema general de la energía cinética (véase p. 651). Teniendo en cuenta la relación $r^2 \theta' = C$ (ley de las áreas), se deduce

$$(7) \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2k}{r} = 2K, \quad \text{con} \quad K = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{k}{r_0}.$$

Determinación de los extremos de la distancia $r = OM$

El *mínimo* de la función r (que se alcanza en el perigeo) verifica $dr/dt = 0$. Según la relación (7) es pues una raíz de la ecuación

$$(8) \quad 2Kr^2 + 2kr - C^2 = 0.$$

Lo mismo ocurre con el *máximo* cuando existe, es decir en el caso de un movimiento elíptico.

Si E es una *elipse*, los números $\frac{p}{1+e}$ y $\frac{p}{1-e}$ (que son los extremos de r) son

las raíces de la ecuación (8) (que es entonces de grado 2). El caso en que (8) admite una raíz doble es el del movimiento circular.

Si E es una *hipérbola*, resulta fácil ver que los números $\frac{p}{1+e}$ y $\frac{p}{1-e}$ siguen siendo raíces de (8), si bien uno solo de los vértices de E pertenece a la trayectoria. En efecto, la función

$$\varphi : \theta \mapsto \frac{1}{r(\theta)} = \frac{k}{C^2} + A \cos \theta + B \sin \theta$$

verifica la ecuación diferencial (2), incluso para los valores de θ no alcanzados en el curso del movimiento. Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por $2\varphi'(\theta)$ e integrando, se ve que la función $\varphi = 1/r$ verifica

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + \varphi^2(\theta) - \frac{2k}{C^2}\varphi(\theta) = \frac{r_0'^2}{C^2} + \frac{1}{r_0^2} - \frac{2k}{C^2 r_0} = \frac{2K}{C^2}.$$

Al satisfacer los extremos de $\varphi = 1/r$ a $d\varphi/d\theta = 0$, se ve, de este modo, que los extremos de r verifican, en todos los casos, la ecuación (8).

Si $K = 0$, la ecuación (8) es de primer grado; entonces E es una *parábola* cuyo parámetro p es la única raíz de (8), o sea $p = C^2/2k$.

Si $K \neq 0$, las raíces de (8) son los números

$$r_1 = \frac{p}{1+e}, \quad r_2 = \frac{p}{1-e};$$

el eje mayor de E es $2a = |r_1 + r_2| = k/|K|$; la distancia focal de E es

$$2C = |r_1 - r_2| = \frac{\sqrt{k^2 + KC^2}}{|K|},$$

lo cual permite determinar las características de E .

Problema de la satelización

Sea R un número que verifica $0 < R < r_0$ (representando R el radio de la Tierra).

Se trata de determinar los números v_0 y α de modo que la trayectoria sea *elíptica*, y no corte al círculo de centro O y de radio R (fig. 6, p. 675). Para ello, es necesario y suficiente que se tenga $K < 0$ y que las raíces de (8) sean $> R$. Ahora bien, la hipótesis $r_0 > R$ implica que una al menos de las raíces de (8) es $> R$; si ponemos $T(x) = 2Kx^2 + 2kx - C^2$, la condición buscada se traduce por las relaciones

$$(9) \quad K < 0 \quad \text{y} \quad T(R) < 0, \quad \text{o sea}$$

$$(10) \quad v_0^2 < \frac{2k}{r_0}$$

y

$$(11) \quad Lv_0^2 \sin^2 \alpha - Mv_0^2 - N > 0,$$

con $L = r_0^3$, $M = r_0 R^2$, $N = 2kR(r_0 - R)$. La desigualdad (11) se cumple con la menor velocidad inicial posible v_0 si $|\sin \alpha| = 1$ (es decir si el ángulo de tiro es *recto*). En este caso las desigualdades (10) y (11) se reducen a

$$\frac{2k}{r_0} > v_0^2 > \frac{2kR}{r_0(r_0 + R)}.$$

La menor velocidad de lanzamiento que permite la satelización es pues

$$v_m = \sqrt{\frac{2kR}{r_0(r_0 + R)}}$$

(velocidad de escape).

En la práctica (puesta de un satélite sobre una órbita terrestre) r_0 difiere poco de R y la velocidad de escape se halla próxima a $\sqrt{k/R}$. Recordemos que para $v_0 \geq \sqrt{2k/r_0}$, la trayectoria sería parabólica o hiperbólica.

Para discutir las condiciones de lanzamiento en el caso general, introduzcamos un sistema de referencia ortonormal ($M_0; X, Y$) de origen M_0 tal que O sea el punto de coordenadas $(-r_0, 0)$ (véase la figura 7). Las coordenadas del punto $P_0 = M_0 + \vec{V}_0$ en este sistema de referencia son $X = v_0 \cos \alpha$, $Y = V_0 \sin \alpha$, y las relaciones (10) y (11) equivalen respectivamente a

$$(12) \quad X^2 + Y^2 < \frac{2k}{r_0}$$

$$(13) \quad (L - M) Y^2 - M X^2 - N > 0.$$

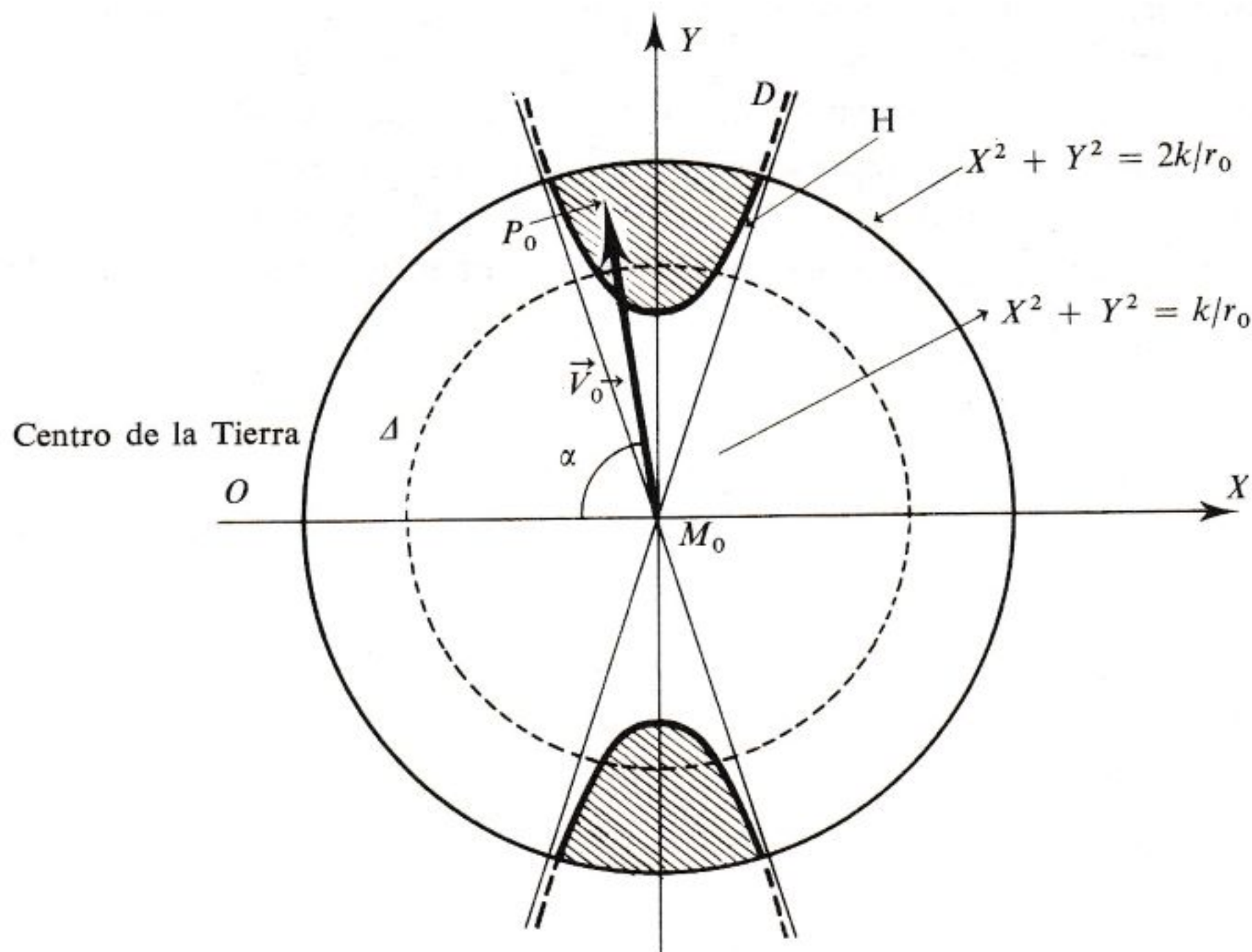


Figura 7.

El «lanzamiento» tendrá éxito si el punto P_0 pertenece al disco Δ definido por (12) y al dominio D definido por (13). Este dominio D es el interior de una hipérbola H cuyos vértices, situados sobre el eje M_0Y , tienen por ordenadas $\pm v_m$. La zona útil de las posiciones de P_0 ha sido rayada en la figura 7.

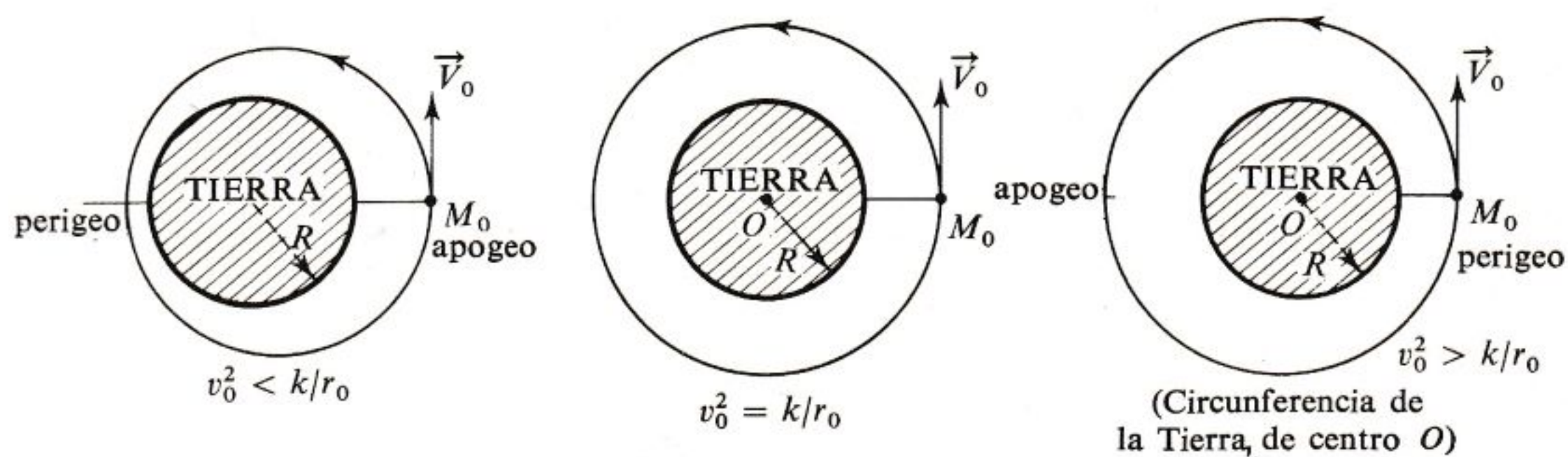


Figura 8.

Los puntos de H de ordenada $\pm \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$ tienen por abscisas $\pm \sqrt{\frac{2k}{R^2} (r_0 - R)}$, con lo que el ángulo de las asíntotas de H es agudo.

Se ve que errores pequeños en v_0 no impedirán que se produzca la satelización, mientras que errores incluso muy pequeños en α , provocarán el encuentro de la trayectoria con la circunferencia frontera de Δ (caída del satélite).

En la figura 8 hemos representado las distintas formas de la trayectoria según el valor de v_0 , en el caso en que $\alpha = \pi/2$. La trayectoria es circular para $v_0^2 = k/r_0^2$; para $v_0 < k/r_0$, el punto M_0 ocupa el *apogeo* de la trayectoria, y para $v_0^2 > k/r_0$ ocupa el *perigeo*.

Capítulo XII

Cinemática del sólido

En todo este capítulo designaremos por \mathcal{E} un *espacio afín euclídeo* de dimensión 3, ligado al espacio vectorial euclídeo E ; nos proponemos dar un modelo matemático del concepto de «sólido en movimiento en \mathcal{E} ». Para los cálculos prácticos elegiremos un «sistema de referencia móvil ligado a este sólido» y utilizaremos los resultados de la teoría del sistema de referencia móvil dados en el capítulo X.

La distancia euclídea entre dos puntos M, P de \mathcal{E} se designará por $\|\overrightarrow{MP}\|$, o $d(M, P)$, o simplemente MP cuando no exista posibilidad de confusión.

§ XII.1 CONCEPTO GENERAL DE SISTEMA MATERIAL EN MOVIMIENTO

La definición que sigue constituye un modelo matemático del concepto intuitivo de «sistema de partículas en movimiento en \mathcal{E} ».

Definición XII.1.1

*Un sistema material en movimiento en \mathcal{E} es una familia no vacía $(\varphi_\mu)_{\mu \in \mathcal{M}}$ de movimientos puntuales $\varphi_\mu: I \rightarrow \mathcal{E}$, $t \mapsto \varphi_\mu(t)$, definidos sobre un mismo intervalo de tiempo I , tal que, para cada $t \in I$, la aplicación $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mu \mapsto \varphi_\mu(t)$ es **inyectiva**.*

Diremos que el movimiento es de clase C^k si cada una de las funciones φ_μ es de clase C^k .

El movimiento de un sistema material queda pues definido cuando se da un conjunto no vacío \mathcal{M} , un intervalo I de \mathbf{R} y una aplicación

$$\varphi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu)$$

tal que

- i) para cada $\mu \in \mathcal{M}$, la aplicación $\varphi_\mu : t \mapsto \varphi(t, \mu)$ es *continua* (o de clase C^k , si el movimiento es de clase C^k);
- ii) para cada $t \in I$, la aplicación $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$ es *inyectiva*.

Se dirá que la variable t es el *tiempo* y el movimiento puntual φ_μ :

$$t \mapsto \varphi_\mu(t) = \varphi(t, \mu),$$

se dirá que es el *movimiento de la partícula* μ .

Desde un punto de vista matemático, el conjunto \mathcal{M} no es sino un *conjunto de índices* y su definición ha de entenderse dada salvo una biyección, y sirve solamente para individualizar las «partículas» que constituyen el «sistema» considerado. Desde un punto de vista físico, se puede concebir a \mathcal{M} como un «modelo» o una «maqueta» de este sistema material. Por ejemplo \mathcal{M} puede ser la maqueta de un avión; entonces el punto $\varphi(t, \mu)$ es la *posición* ocupada en el instante t por el punto del avión (real) que corresponde al punto μ de su maqueta. Pero \mathcal{M} podría ser también sencillamente el catálogo de las piezas individuales que entran en la construcción de este avión (estando cada una de estas piezas asimilada a un «punto»).

En resumen: *el movimiento de un sistema material queda definido cuando se dan los movimientos puntuales de cada una de las partículas que constituyen este sistema; estos movimientos se hallan simplemente sujetos a la condición de que dos partículas distintas μ, ν nunca ocupen idéntica posición en un mismo instante.* (Es la traducción física del hecho de que para cada $t \in I$, la aplicación $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, \mu \mapsto \varphi_\mu(t) = \varphi(t, \mu)$ es *inyectiva*.)

Esta interpretación física nos permite dar la siguiente

Definición XII.1.2

§ Para cada $t \in I$, la imagen \mathcal{M}_t de \mathcal{M} por la aplicación $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$
 § recibe el nombre de **posición del sistema material en el instante t** .

El conjunto \mathcal{M}_t es pues *una parte de \mathcal{E}* , y es el conjunto de las posiciones de las partículas que constituyen el sistema en el instante t .

Campo de las velocidades y de las aceleraciones

Supongamos que la aplicación

$$(1) \quad \varphi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu) = \varphi_\mu(t)$$

define un movimiento de clase C^2 . La **velocidad** y la **aceleración** de la partícula μ en el instante t quedan entonces definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\mu(t) &= \frac{d}{dt} \varphi_\mu(t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \mu); \\ \vec{\gamma}_\mu(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \varphi_\mu(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(t, \mu). \end{aligned}$$

Según las hipótesis, la aplicación $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_t$, $\mu \mapsto \varphi(t, \mu)$ es *biyectiva*; podemos pues definir un *campo de vectores* \vec{V}_t en \mathcal{M}_t asociando a cada punto $M = \varphi(t, \mu)$ de \mathcal{M}_t , la velocidad $\vec{v}_\mu(t)$ de la partícula μ en el instante t . Este campo se denomina **campo de velocidades** del sistema material en el instante t . Queda definido por la condición

$$(2) \quad (\forall \mu \in \mathcal{M}) \quad \vec{V}_t(\varphi(t, \mu)) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \mu).$$

Podemos definir del mismo modo un *campo de vectores* $\vec{\Gamma}_t$ en \mathcal{M}_t asociando a cada punto $M = \varphi(t, \mu)$ de \mathcal{M}_t , la aceleración $\vec{\gamma}_\mu(t)$ de la partícula μ en el instante t . Este campo se denomina **campo de aceleraciones** del sistema material en el instante t . Queda definido por la condición

$$(3) \quad (\forall \mu \in \mathcal{M}) \quad \vec{\Gamma}_t(\varphi(t, \mu)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(t, \mu).$$

Cambio de modelo

Si consideramos de nuevo el ejemplo del movimiento de un avión, resulta evidente que el movimiento del avión real no depende de la maqueta \mathcal{M} que sirve para definirlo.

Desde un punto de vista matemático, el paso de una maqueta \mathcal{M} a una maqueta \mathcal{M}' se traduce en una *biyección* θ de un conjunto \mathcal{M}' en el conjunto \mathcal{M} . Con la nueva maqueta \mathcal{M}' el movimiento queda definido por la aplicación

$$\varphi' : I \times \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \mu') \mapsto \varphi_{\theta(\mu')}(t) = \varphi(t, \theta(\mu')).$$

En otros términos, *un cambio de modelo corresponde a un cambio de índices de la familia de los movimientos de las partículas*, quedando definida la nueva familia $(\varphi'_{\mu'})_{\mu' \in \mathcal{M}'}$ por $\varphi'_{\mu'} = \varphi_{\theta(\mu')}$.

Es evidente que *este cambio de modelo no modifica ni el conjunto \mathcal{M}_t ni el campo de velocidades, ni el campo de aceleraciones en el instante t* . En efecto, si $M = \varphi_{\mu}(t)$ es un punto de \mathcal{M}_t , se tiene también $M = \varphi'_{\mu'}(t)$ con $\mu' = \theta^{-1}(\mu)$ y

$$\vec{V}_t(M) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \mu) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \theta(\mu')) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi'(t, \mu')$$

$$\vec{\Gamma}_t(M) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(t, \mu) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(t, \theta(\mu')) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi'(t, \mu').$$

● Consideraremos pues que dos aplicaciones $\varphi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ y $\varphi' : I \times \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{E}$ de la forma (1) definen **el mismo movimiento** si existe una biyección $\theta : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ tal que para todo $t \in I$ y todo $\mu' \in \mathcal{M}'$, se tiene:

$$(4) \quad \varphi'(t, \mu') = \varphi(t, \theta(\mu')).$$

Se observará que la existencia de una tal aplicación θ define una *relación de equivalencia* entre las aplicaciones de forma (1), cuando el intervalo I es fijo. Se podría deducir de ahí una definición axiomática del concepto abstracto de «movimiento»⁽¹⁾.

En particular, podemos tomar como \mathcal{M}' la posición del sistema en un instante dado t_0 , estando definida la biyección $\theta : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$, $\mu' \mapsto \mu$ por la condición

$$\mu' = \varphi_{\mu}(t_0) = \varphi(t_0, \mu) \text{ (es decir } \theta^{-1}(\mu) = \varphi(t_0, \mu) \text{)}.$$

Cambiando de notación, podemos enunciar:

Es siempre posible definir el movimiento de un sistema material en \mathcal{E} dando una parte \mathcal{M} de \mathcal{E} y una aplicación

$$\varphi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$$

de modo que exista un instante $t_0 \in I$ tal que se tenga

$$(\forall \mu \in \mathcal{M}) \quad \varphi(t_0, \mu) = \mu.$$

⁽¹⁾ Se tendrá en cuenta aquí que sólo se puede hablar de «clase de equivalencia» si se impone a \mathcal{M} la condición de pertenecer a un *conjunto* dado, ya que, de lo contrario, ello equivaldría a considerar «el conjunto de todos los conjuntos equipotentes a un conjunto dado \mathcal{M} », el cual no existe.

En este caso \mathcal{M} es la *posición del sistema en el instante t_0* .

Considerando de nuevo el ejemplo del avión, el conjunto \mathcal{M} podrá ser la posición ocupada por este avión sobre la pista en el momento de la salida.

Vamos a dedicarnos ahora al estudio de los sistemas materiales particulares denominados *sólidos*.

§ XII.2 SÓLIDOS EN MOVIMIENTO

Definición XII.2.1

Con las notaciones del § 1, se dice que la aplicación

$$(1) \quad \varphi : I \times \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu) = \varphi_\mu(t)$$

define el **movimiento de un sólido** si, para todos los elementos μ, ν de \mathcal{M} , la distancia euclídea $d(\varphi_\mu(t), \varphi_\nu(t))$ es independiente de t .

Un sólido en movimiento recibe también el nombre de **sistema material indeformable**, y es un conjunto de «partículas en movimiento» que se mantienen a distancias constantes entre sí, dos a dos.

Interpretación geométrica

Para cada $t \in I$, designemos siempre por \mathcal{M}_t la posición del sistema en el instante t y designemos por Φ_t la biyección de \mathcal{M} en \mathcal{M}_t definida por

$$\Phi_t(\mu) = \varphi(t, \mu) = \varphi_\mu(t).$$

Para que la aplicación φ defina el movimiento de un sólido, es necesario y suficiente que, para todos los $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ y todos los instantes $t, u \in I$, se tenga

$$d(\Phi_t(\mu), \Phi_t(\nu)) = d(\Phi_u(\mu), \Phi_u(\nu));$$

en otros términos, es necesario y suficiente que para todos los $t, u \in I$, la biyección

$$(2) \quad \delta_{t,u} : \Phi_u \circ \Phi_t^{-1} : \mathcal{M}_t \rightarrow \mathcal{M}_u$$

sea una **isometría**. Esta isometría lleva la posición del sólido en el instante t_0 a su posición en el instante u .

Según la definición de $\delta_{t,u}$ se ve inmediatamente que $\delta_{t,t}$ es la aplicación idéntica de \mathcal{M}_t sobre sí mismo, y que, para todos los $t, u \in I$, se tiene

$$\delta_{u,t} = ((\delta_{t,u}))^{-1}.$$

Utilización de «modelos» de tamaño natural

Tal como hemos visto en el § anterior, nos podemos limitar siempre al caso en que el «modelo» \mathcal{M} es la posición del sistema en un instante dado t_0 , y en que se tiene

$$(\forall \mu \in \mathcal{M}) \quad \varphi(t_0, \mu) = \mu.$$

En este caso, $\Phi_{t_0} = \text{Id}_\mu$, y para todo $t \in I$, se tiene: $\Phi_t = \delta_{t_0,t}$.

De un modo más general, se puede definir el movimiento de un sólido dando,

- a) una parte \mathcal{M} de un *espacio afín euclídeo* \mathcal{S} de dimensión 3;
- b) una aplicación $\varphi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, $t \mapsto \varphi_\mu(t) = \varphi(t, \mu)$ tal que para cada $t \in I$, la aplicación $\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mu \mapsto \varphi(t, \mu)$ *conserva las distancias*.

Este movimiento es el de un sólido cuyo conjunto \mathcal{M} constituye un modelo de «tamaño natural». Por abuso de lenguaje, diremos que es un *movimiento del sólido \mathcal{M} en el espacio \mathcal{E}* ; el conjunto $\mathcal{M}_t = \Phi_t(\mathcal{M})$ será denominado «posición de \mathcal{M} en el instante t ».

Por ejemplo, si el «sólido en movimiento» es un avión en vuelo, el conjunto \mathcal{M} puede ser la posición del avión en su hangar antes del vuelo, o un avión del mismo tipo, inmóvil, colocado en cualquier sitio.

- *Este modo de definición será el que utilizaremos en los §§ que siguen.*

Propiedad característica de los movimientos de los sólidos

Volviendo a la definición XII.2.1, se tiene fácilmente el

Teorema XII.2.1

Para que un movimiento de clase C^1 sea el de un **sólido**, es necesario y suficiente que en cada instante, el **campo de sus velocidades** sea **equiproyectivo**, o sea que verifique (con las notaciones del § 1)

$$(\forall t \in I) (\forall M \in \mathcal{M}_t) (\forall N \in \mathcal{M}_t) \quad (\vec{V}_t(M) - \vec{V}_t(N)) \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$

Demostración. Para que el movimiento definido por la aplicación $\varphi : I \times \Phi \rightarrow \mathcal{E}$, $(t, \mu) \mapsto \varphi_\mu(t) = \varphi(t, \mu)$ (supuesto de clase C^1) sea el movimiento de un sólido, es necesario y suficiente que se tenga

$$(\forall t \in I, \forall \mu \in \mathcal{M}, \forall v \in \mathcal{M}) \quad \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\varphi_\mu(t) \varphi_v(t)})^2 = 0,$$

o sea

$$(3) \quad \left(\frac{d}{dt} \varphi_v(t) - \frac{d}{dt} \varphi_\mu(t) \right) \cdot \overrightarrow{\varphi_\mu(t) \varphi_v(t)} = 0.$$

Poniendo $M = \varphi_\mu(t)$, $N = \varphi_v(t)$, se tiene (con las notaciones del § 1)

$$\frac{d}{dt} \varphi_v(t) = \vec{V}_t(N), \quad \frac{d}{dt} \varphi_\mu(t) = \vec{V}_t(M),$$

y la relación (3) se escribe

$$(4) \quad (\vec{V}_t(N) - \vec{V}_t(M)) \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$

Para que el movimiento considerado sea el de un sólido, es pues necesario y suficiente que la relación (4) se cumpla para todo $t \in I$ y todos los $M, N \in \mathcal{M}_t$; de donde el resultado.]]

Concepto de punto fijo. Inmovilidad

Mantengamos las notaciones generales de la definición XII.2.1.

a) Se dice que un punto A de \mathcal{E} es un **punto fijo** del sólido en movimiento si existe un punto μ de \mathcal{M} que verifique

$$(\forall t \in I) \quad \varphi(t, \mu) = A.$$

Se tiene entonces:

$$(\forall t \in I) \quad \vec{V}_t(A) = 0.$$

b) El movimiento definido por la aplicación φ se dice que es la **inmovilidad** si todas las funciones $\varphi_\mu : t \mapsto \varphi_\mu(t)$ se reducen a constantes.

Estas definiciones se extienden a sistemas materiales en movimiento cualesquiera (no necesariamente sólidos). Un punto fijo es la posición de una partícula inmóvil perteneciente al sistema; se dice que el sistema es *inmóvil* si son inmóviles todas sus partículas.

§ XII.3 ESPACIOS MÓVILES

Hemos visto que, sin restringir la generalidad, el movimiento de un sólido en \mathcal{E} se podía definir siempre dando una aplicación

$$\varphi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$$

tal que

- i) \mathcal{M} sea una parte de un espacio afín euclídeo \mathcal{S} de dimensión 3;
- ii) para cada $t \in I$ la aplicación $\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mu \mapsto \varphi(t, \mu)$ conserva las distancias.

Vamos a limitarnos ahora al caso en que \mathcal{M} es el espacio \mathcal{S} entero. Veremos en el § 4 que nos podremos limitar a este caso, siempre que el sólido en movimiento no se reduzca a una «vara» (es decir, siempre que \mathcal{M} contenga por lo menos tres puntos no alineados).

Definición XII.3.1

Sea I un intervalo de \mathbf{R} y \mathcal{S} un espacio afín euclídeo de dimensión 3. Diremos que una aplicación $\varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ define un **espacio móvil** (o un **espacio sólido en movimiento**) si es de clase C^2 y verifica la condición siguiente,

(C) para cada $t \in I$, la aplicación

$$\Phi_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$$

es una **isometría de \mathcal{S} en \mathcal{E}** .

Por abuso de lenguaje, diremos que φ define un «movimiento de \mathcal{S} en \mathcal{E} » y hablaremos del «espacio móvil \mathcal{S} ». Los movimientos puntuales $\varphi_\mu : I \rightarrow \mathcal{E}$, $t \mapsto \varphi(t, \mu)$ se dirá que son **movimientos puntuales ligados al espacio móvil \mathcal{S}** , o, simplemente, *movimientos de los puntos de \mathcal{S}* .

Observaciones

1. Para que una aplicación $\varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ que verifique la condición (C) sea de clase C^2 , es necesario y suficiente que para cada $\mu \in \mathcal{S}$, el movimiento puntual $\varphi_\mu : t \mapsto \varphi(t, \mu)$ sea de clase C^2 (es un corolario de la proposición XII.4.1; véase también la observación de la página 699).

2. Según el estudio hecho en el § 1, existen una infinidad de aplicaciones que definen el mismo movimiento que φ y que verifican la condición (C). Son todas las aplicaciones de la forma $\mathcal{S}' \times I \rightarrow \mathcal{E}$, $(t, \mu') \mapsto \Phi_t(\theta(\mu'))$ donde \mathcal{S}' designa un espacio afín euclídeo cualquiera de dimensión 3 y $\theta : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ una isometría cualquiera; el paso de φ a φ' corresponde a un «cambio de modelo». Cambiando de notaciones, estableceremos

Definición XII.3.2

Designemos por I un intervalo de \mathbf{R} , por \mathcal{S}, \mathcal{T} dos espacios afines euclídeos de dimensión 3 y por $\varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$, $\psi : I \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$ dos aplicaciones que definen **espacios móviles**. Diremos que las aplicaciones φ, ψ definen **el mismo movimiento del espacio sólido** si existe una isometría θ de \mathcal{T} en \mathcal{S} que verifica

$$(1) \quad (\forall t \in I, \forall \lambda \in \mathcal{T}) \quad \psi(t, \lambda) = \varphi(t, \theta(\lambda)).$$

Si se designan por $\Phi_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ y $\Psi_t : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$ las isometrías definidas por

$$\Phi_t(\mu) = \varphi(t, \mu) \quad \Psi_t(\lambda) = \psi(t, \lambda),$$

la relación (1) equivale a

$$(1') \quad (\forall t \in I) \quad \Psi_t = \Phi_t \circ \theta.$$

Veremos en el § 10 que la existencia de una tal isometría θ equivale a decir que el movimiento relativo de \mathcal{T} respecto a \mathcal{S} es la **inmovilidad**. Podremos pues traducir su existencia diciendo que el espacio \mathcal{T} es **inmóvil** (o *fijo*) respecto a \mathcal{S} , o que se halla **ligado a \mathcal{S}** .

Observación. La existencia de una isometría θ que verifica (1) define una *relación de equivalencia* entre las aplicaciones φ de la forma considerada, cuando el intervalo de tiempo I es fijo: Se podrá decir pues que cada aplicación φ es una representación (o una realización) del «movimiento de espacio sólido» que define. Pero, salvo que se imponga al espacio \mathcal{S} la condición de pertenecer a un *conjunto* dado de espacios euclídeos, no se podrá hablar de «clases de equivalencia» de espacios móviles (véase la nota de la página 684), ya que los espacios euclídeos de dimensión 3 no constituyen un conjunto.

Isometrías asociadas a un espacio móvil

En particular (véase p. 685), podemos limitarnos siempre al caso en que $\mathcal{S} = \mathcal{E}$ y en que, para un valor t_0 de I , se tiene $\varphi(t_0, \mu) = \mu$ para todo $\mu \in \mathcal{S}$. Esta observación es fundamental para todo lo que va a seguir.

Es sin embargo interesante, si no se quiere perder la idea intuitiva de movimiento, mantener una distinción entre «el espacio móvil \mathcal{S} » y «el espacio fijo \mathcal{E} ».

Veremos más adelante (§ 7) en qué forma se puede también materializar el movimiento de un espacio sólido por medio de un *sistema de referencia móvil indeformable*.

Mantengamos las notaciones de la definición XII.3.1 y apliquemos a este caso el estudio hecho en el § 2. Se tiene aquí $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ y, en cada instante, la posición ocupada por «el sólido \mathcal{S} » es el espacio \mathcal{E} entero. Para cada par (t, u) de puntos de I , la aplicación $\Phi_u \circ \Phi_t^{-1}$ es una isometría de \mathcal{E} en \mathcal{E} que designaremos por $D_{t,u}$. Se tiene el

Teorema XII.3.1

§ Las isometrías $D_{t,u}$ asociadas a un espacio móvil son desplazamientos.

Demostración. Nos basta con demostrar que las isometrías $D_{t,u}$ son directas, es decir de determinante $+1$; para ello, basta demostrar que (si $t \in I$ se fija arbitrariamente) la función numérica $\delta_t : u \mapsto \det(D_{t,u})$ es *continua*. En efecto, esta función está definida en el intervalo I ; puede tomar solamente los valores $+1$ o -1 y verifica $\delta_t(t) = +1$ (ya que $D_{t,t}$ es la aplicación idéntica de \mathcal{E}), y si es continua, se reduce a la constante $+1$.

Para establecer su continuidad, tomemos arbitrariamente cuatro puntos *no coplanarios* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de \mathcal{S} ; entonces, para cada $\tau \in I$, los puntos $\Phi_\tau(\alpha_i)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) son *no coplanarios* (ya que Φ_τ es una isometría); obtenemos una base $(\vec{e}_i(\tau))_{1 \leq i \leq 3}$ de \mathcal{E} poniendo:

$$\vec{e}_i(\tau) = \overrightarrow{\Phi_\tau(\alpha_0) \Phi_\tau(\alpha_i)} = \overrightarrow{\varphi(\tau, \alpha_0) \varphi(\tau, \alpha_i)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Para cada par $(t, u) \in I \times I$, la parte lineal $\vec{D}_{t,u}$ de $D_{t,u}$ verifica

$$\vec{D}_{t,u}(\vec{e}_i(t)) = \vec{e}_i(u) \quad (i = 1, 2, 3);$$

el número $\delta_t(u) = \det(D_{t,u})$ es pues igual al determinante de los vectores $\vec{e}_1(u), \vec{e}_2(u), \vec{e}_3(u)$ en la base $(\vec{e}_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$. Resulta de ahí inmediatamente que la función $\delta_t : u \mapsto \delta_t(u)$ es continua en I .]

● Cuando se da un espacio móvil en \mathcal{E} queda pues determinada una familia

$$\mathcal{D} = (D_{t,u})_{(t,u) \in I \times I}$$

de desplazamientos de \mathcal{E} .

Observación. La demostración anterior equivale a considerar el sistema de referencia móvil (que se dice *ligado* a \mathcal{S})

$$\rho : t \mapsto (\varphi(t, \alpha_0), \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)),$$

y a rehacer, en este caso particular, la demostración del teorema general X.2.1.

Veremos en efecto, en el § 6, que el estudio de un movimiento de espacio sólido se reduce al de un sistema de referencia móvil de esta forma.

Propiedades de la familia de desplazamientos $(D_{t,u})_{(t,u) \in I \times I}$

Consideremos siempre el espacio móvil definido por una aplicación $\varphi : \mathcal{S} \times I \rightarrow \mathcal{E}$ que verifica las condiciones de la definición XII.3.1 y sea $(D_{t,u})_{(t,u) \in I \times I}$ la familia de movimientos asociados. Se tiene evidentemente

$$(\forall t_0 \in J, \forall t \in J) \quad \Phi_t = D_{t_0,t} \circ \Phi_{t_0}$$

y, para todos los $u, v, t \in I$,

$$D_{t,t} = \text{Id}_{\mathcal{E}}, \quad D_{u,t} = (D_{t,u})^{-1}; \quad D_{u,v} \circ D_{t,u} = D_{tv}.$$

Resulta de ahí que:

- a) La aplicación $\varphi : (t, \mu) \mapsto \Phi_t(\mu) = \varphi(t, \mu)$ queda definida cuando se dan la familia $\mathcal{D} = (D_{t,u})_{t,u \in I}$ y la aplicación Φ_t para un valor particular t_0 de t .
- b) Para que dos aplicaciones

$$\varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \psi : I \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$$

definan el mismo movimiento (véase Def. XII.3.2) es necesario y suficiente que las familias $(D_{t,u})$ de desplazamientos asociados sean las mismas.

Demostración. Para todo $t \in I$ definamos las isometrías $\Phi_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ y $\Psi_t : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$ por

$$\Phi_t(\mu) = \varphi(t, \mu), \quad \Psi_t(\lambda) = \psi(t, \lambda).$$

- a) Si φ y ψ definen el mismo movimiento, existe una biyección $\theta : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ que verifica

$$(\forall t \in I, \forall \lambda \in \mathcal{T}) \quad \psi(t, \lambda) = \varphi(t, \theta(\lambda)),$$

o sea

$$(\forall t \in I) \quad \Psi_t = \Phi_t \circ \theta,$$

de donde, para todos los $u, t \in I$,

$$\Psi_u \circ \Psi_t^{-1} = \Phi_u \circ \theta \circ \theta^{-1} \circ \Phi_t^{-1} = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}.$$

b) Inversamente, supongamos que para todos los $u, t \in I$, se tiene

$$\Psi_u \circ \Psi_t^{-1} = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}.$$

Al ser fijo el punto $t_0 \in I$, pongamos $\theta = \Phi_{t_0}^{-1} \circ \Psi_{t_0}$. Para todo $t \in I$, se tiene entonces

$$\Psi_t \circ \Psi_{t_0}^{-1} = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1},$$

o sea $\Psi_t = \Phi_t \circ \theta$; las aplicaciones φ y ψ definen pues el mismo movimiento.]]

En consecuencia, *el movimiento de un espacio sólido queda totalmente determinado cuando se da la familia $(D_{t,u})_{t,u \in I}$ de desplazamientos asociados.*

Recíproco. A la inversa, supongamos dada una familia $\mathcal{D} = (D_{t,u})_{t,u \in I}$ de desplazamientos de \mathcal{E} que verifican

$$(2) \quad (\forall u, v, t \in I) \quad D_{u,v} \circ D_{t,u} = D_{t,v},$$

fijemos un punto $t_0 \in I$ y, para todo $t \in I$, pongamos

$$(\forall \mu \in \mathcal{E}) \quad \varphi(t, \mu) = \Phi_t(\mu) = D_{t_0,t}(\mu).$$

Si la aplicación $\varphi : I \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ así obtenida es de clase C^2 , define un espacio móvil, y se tiene

$$(\forall t, u \in I) \quad \Phi_u \circ \Phi_t^{-1} = D_{t_0,u} \circ D_{t,t_0} = D_{t,u};$$

la familia $(D_{t,u})$ es pues la familia de desplazamientos asociada al espacio móvil definido por φ .

Con ciertas condiciones de regularidad toda familia $(D_{t,u})_{t,u \in I}$ de desplazamientos de \mathcal{E} que verifique (2) se halla asociada a un movimiento de espacio sólido.

Se puede demostrar que estas condiciones de regularidad quedan verificadas si (y solamente si) la aplicación $I \times I \rightarrow A(\mathcal{E})$, $(t, u) \mapsto D_{tu}$ (donde $A(\mathcal{E})$ designa el espacio afín constituido por las aplicaciones afines de \mathcal{E} en \mathcal{E}), es de clase C^2 (véase ejercicio I.25).

§ XII.4 ESPACIO MÓVIL LIGADO A UN SÓLIDO EN MOVIMIENTO

Sigamos designando por \mathcal{S} un espacio afín euclídeo de dimensión 3 y volvamos al caso general del movimiento de un sólido definido mediante una aplicación de la forma

$$(1) \quad \varphi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu)$$

(donde \mathcal{M} designa una parte de \mathcal{S}) tal que, para cada $t \in I$, la aplicación

$$\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$$

conserva las distancias.

Se ve fácilmente que la dimensión del subespacio afín de \mathcal{E} engendrado por el conjunto $\mathcal{M}_t = \Phi_t(\mathcal{M})$ es igual a la del subespacio afín de \mathcal{S} engendrado por \mathcal{M} . Es una consecuencia del teorema de prolongación de las isometrías (tomo 1, teorema XIII.11.4). A esta dimensión se le dará el nombre de **rango del sólido en movimiento**, y no depende del modelo utilizado para definir este movimiento.

Vamos a ver que si este rango es ≥ 2 el movimiento del sólido considerado se prolonga de manera única, a un movimiento de espacio sólido. Empezaremos por el caso en que este sólido es de rango 3, estableciendo la proposición

XII.4.1 Sea \mathcal{M} una parte de \mathcal{S} que contiene por lo menos cuatro puntos no coplanarios $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, y sea $\varphi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu)$ una aplicación tal que, para cada $t \in I$, la aplicación

$$\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$$

conserva las distancias.

Existe entonces una aplicación única $\bar{\varphi} : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ que prolonga a φ y es tal que, para todo $t \in I$, la aplicación $\bar{\Phi}_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, \mu \mapsto \bar{\varphi}(t, \mu)$ es una isometría. Además, si cada una de las funciones $\varphi_\mu : I \rightarrow \mathcal{E}, t \mapsto \varphi(t, \mu)$ (donde $\mu \in \mathcal{M}$) es de clase C^2 , entonces $\bar{\varphi}$ es de clase C^2 en $I \times \mathcal{S}$.

Demostración

a) Apliquemos el teorema de prolongación de las isometrías últimamente referido: para cada $t \in I$, existe una isometría única $\bar{\Phi}_t$ de \mathcal{S} sobre \mathcal{E} que prolonga a Φ_t , lo cual demuestra la existencia y unicidad de la aplicación buscada

$$\bar{\varphi} : (t, \mu) \mapsto \bar{\Phi}_t(\mu).$$

b) Designemos por $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ las coordenadas baricéntricas de un punto cualquiera μ de \mathcal{S} en el sistema de referencia afín $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Al ser la aplicación $\bar{\Phi}_t$ afín, se tiene

$$\bar{\Phi}_t(\mu) = \mu_1 \cdot \Phi_t(\alpha) + \mu_2 \cdot \Phi_t(\beta) + \mu_3 \cdot \Phi_t(\gamma) + \mu_4 \cdot \Phi_t(\delta),$$

o sea

$$(1) \quad \bar{\varphi}(t, \mu) = \mu_1 \cdot \varphi(t, \alpha) + \mu_2 \cdot \varphi(t, \beta) + \mu_3 \cdot \varphi(t, \gamma) + \mu_4 \cdot \varphi(t, \delta).$$

Ahora bien, las coordenadas baricéntricas $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ de μ son funciones de clase C^∞ de μ (ya que son funciones afines de μ). Si las funciones $\varphi_\mu : t \mapsto \varphi(t, \mu)$ ($\mu \in \mathcal{M}$) son de clase C^2 , la relación (1) demuestra que la aplicación $\bar{\varphi} : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ es también de clase C^2 ; de donde el resultado.]

Se dirá que el espacio móvil definido por la aplicación φ está ligado al sólido en movimiento definido por la aplicación φ .

De un modo intuitivo, podemos decir que un espacio móvil queda determinado cuando se dan los movimientos de cuatro puntos no coplanarios $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de este espacio.

Caso de un sólido de rango 2

Vamos a ver que un sólido de rango 2 se puede considerar, de dos maneras distintas, como «una parte» de un espacio móvil, pero que estos dos «espacios móviles» tienen *el mismo movimiento*. Se tiene en efecto

XII.4.2 Sea \mathcal{M} una parte de \mathcal{S} que engendra un plano afín \mathcal{P} y sea $\varphi: I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ una aplicación tal que

- a) para cada $t \in I$, la aplicación $\Phi_t: \mu \mapsto \mathcal{E}$, $\mu \mapsto \varphi(t, \mu)$ conserva las distancias.
- b) para cada $\mu \in \mathcal{M}$, la aplicación $\varphi_\mu: t \mapsto \varphi(t, \mu)$ es de clase C^2 .

Existen entonces dos aplicaciones de clase C^2 de $I \times \mathcal{S}$ en \mathcal{E} , que prolongan a φ y que definen espacios móviles. Además, si $\bar{\varphi}$ es una de ellas, la otra es la aplicación $(t, \mu) \mapsto \bar{\varphi}(t, \theta(\mu))$, donde θ designa la simetría respecto al plano \mathcal{P} . Estas dos aplicaciones definen el mismo movimiento.

Demostración

a) Veamos en primer lugar que existe una aplicación $\bar{\varphi}: I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ que verifica las condiciones impuestas.

Por hipótesis, \mathcal{M} contiene por lo menos tres puntos no alineados α, β, γ . Orientemos \mathcal{S} y \mathcal{E} de un modo cualquiera y definamos un punto δ de \mathcal{S} por $\overrightarrow{\alpha\delta} = \overrightarrow{\alpha\beta} \wedge \overrightarrow{\alpha\gamma}$. Entonces los puntos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ no son coplanarios, y nos volvemos a las hipótesis de XII.4.1 poniendo, para todo $t \in I$:

$$\varphi(t, \delta) = \Phi_t(\delta) = \Phi_t(\alpha) + \overrightarrow{(\Phi_t(\alpha) \Phi_t(\beta))} \wedge \overrightarrow{(\Phi_t(\alpha) \Phi_t(\gamma))}$$

(ya que se obtiene así un movimiento de clase C^2 de $\mathcal{M} \cup \{\delta\}$ en \mathcal{E}). La relación (1) define entonces la aplicación $\bar{\varphi}$ buscada.

b) Sea ψ otra aplicación de clase C^2 que verifica las mismas condiciones. Para cada $t \in I$, designemos por $\bar{\Phi}_t$ y Ψ_t las isometrías de \mathcal{S} en \mathcal{E} definidas por

$$(\forall \mu \in \mathcal{S}) \quad \bar{\Phi}_t(\mu) = \bar{\varphi}(t, \mu), \quad \Psi_t(\mu) = \psi(t, \mu).$$

Según el estudio hecho en el § 3, se tiene, para todos los puntos $t, t_0 \in I$,

$$\bar{\Phi}_t \circ \bar{\Phi}_{t_0}^{-1} = \Psi_t \circ \Psi_{t_0}^{-1} = D_{t, t_0},$$

donde D_{t, t_0} designa el único desplazamiento de \mathcal{E} que verifica $D_{t, t_0}[\varphi(t_0, \mu)] = \varphi(t, \mu)$ para todo $\mu \in \mathcal{M}$. Fijando el punto t_0 , se ve que existe una isometría σ de \mathcal{S} , independiente de t , tal que se tiene

$$(2) \quad (\forall t \in I) \quad \Psi_t = \bar{\Phi}_t \circ \sigma;$$

esta isometría tiene que dejar invariante a cada punto μ de \mathcal{M} . Se trata pues de la *identidad* o de la *simetría* respecto al plano \mathcal{P} ; de donde el resultado anunciado, ya que la relación (2) equivale a

$$(\forall t \in I, \forall \mu \in \mathcal{S}) \quad \psi(t, \mu) = \bar{\varphi}(t, \sigma(\mu)).$$

De un modo intuitivo se puede decir que *el movimiento de un sólido queda determinado cuando se dan los movimientos de tres puntos no alineados de este sólido*. En consecuencia, se tiene el

Corolario *Un sólido en movimiento, que admite tres puntos fijos no alineados, es inmóvil.*

Observemos a este respecto que *los puntos fijos de un espacio móvil en \mathcal{E} constituyen una subvariedad afín de \mathcal{E} .*

Observación. Se demuestra fácilmente que el movimiento de un sólido *de rango 1* (realizado materialmente por una «vara») queda determinado cuando se dan movimientos de dos de sus puntos. Pero no siempre es posible prolongar este movimiento en un movimiento del espacio entero.

Se observará que un sólido *de rango cero* se reduce a una partícula en movimiento.

§ XII.5 CAMPO DE VELOCIDADES Y ROTACIÓN INSTANTÁNEA DE UN ESPACIO MÓVIL

Según el teorema XII.2.1, el campo de velocidades de un espacio móvil en un instante dado t es un *campo equiproyectivo* definido en todo \mathcal{E} , designado por

$$\vec{V}_t : M \mapsto \vec{V}_t(M).$$

Para interpretar este hecho, *elijamos una orientación en \mathcal{E}* ; al ser el campo \vec{V}_t un *torsor*, existe un vector único $\vec{\Omega}(t)$ de E tal que, para todos los puntos A, M , de \mathcal{E} , se tiene

$$(1) \quad \vec{V}_t(M) = \vec{V}_t(A) + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{AM}.$$

Definición XII.5.1

- a) El vector $\vec{\Omega}(t)$ de E definido por (1) recibe el nombre de **vector rotación instantánea** del espacio móvil considerado en el instante t , y es el vector del torsor \vec{V}_t constituido por el campo de las velocidades en el instante t en el espacio orientado \mathcal{E} .
- b) Si el vector $\vec{\Omega}(t)$ es no nulo, el eje central Δ_t del torsor \vec{V}_t recibe el nombre de **eje instantáneo de rotación y de deslizamiento** (o más brevemente, **eje helicoidal** ⁽¹⁾) del espacio móvil en el instante t .

El campo de velocidades de un espacio móvil en el instante t queda determinado cuando se da su valor en un punto de \mathcal{E} y el vector rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$; es uniforme si, y solamente si, $\vec{\Omega}(t) = 0$.

⁽¹⁾ El término de eje helicoidal se justificará más adelante (§ 8).

Observación. Al cambiar la orientación elegida en \mathcal{E} por su opuesta, la función vectorial $I \rightarrow E, t \mapsto \vec{\Omega}(t)$ queda cambiada por su opuesta. Por el contrario, el eje helicoidal Δ_t no depende de esta orientación. La recta Δ_t es el conjunto de los puntos M de \mathcal{E} en que el vector velocidad $\vec{V}_t(M)$ es colineal con $\vec{\Omega}(t)$.

● Por convenio, cada vez que hablemos de rotación instantánea de un espacio móvil en \mathcal{E} , el espacio \mathcal{E} se supondrá *orientado*.

Concepto de punto t -coincidente

Se podría caer en la tentación de decir que el vector $\vec{V}_t(M)$ es la velocidad del punto M en el instante t , pero ello no tendría sentido, ya que M es un punto de \mathcal{E} y no es un «punto móvil».

Recordemos aquí (véase § 1) que $\vec{V}_t(M)$ es la velocidad en el instante t del movimiento puntual $\varphi_\mu : I \rightarrow \mathcal{E}, \tau \mapsto \varphi(\tau, \mu)$, donde μ está definido por $\varphi(t, \mu) = M$ (con las mismas notaciones de la definición XII.3.1). Se dice que el punto μ en \mathcal{S} que verifica $\varphi(t, \mu) = M$ es el **t -coincidente de M** ; en términos más explícitos, es el punto de \mathcal{S} cuya posición en el instante t es M ; si se sigue designando por Φ_t la isometría de \mathcal{S} en \mathcal{E} definida por $\Phi_t(\mu) = \varphi(t, \mu)$, se tiene

$$\mu = \Phi_t^{-1}(M).$$

El movimiento puntual $\varphi_\mu : \tau \mapsto \varphi(\tau, \mu)$ recibe entonces el nombre de *movimiento puntual ligado a \mathcal{S} que pasa por M en el instante t* .

● Se observará que (si M es fijo) el punto t -coincidente μ y el movimiento puntual φ_μ dependen de t .

Con estas definiciones, el vector $\vec{V}_t(M)$ es la velocidad, en el instante t , del movimiento puntual φ_μ que pasa por M en el instante t . Para abreviar, se puede decir que $\vec{V}_t(M)$ es la velocidad, en el instante t , del t -coincidente de M .

Análogamente, el valor del campo de las aceleraciones en el punto M , es decir, $\vec{\Gamma}_t(M)$, es la aceleración en el instante t del t -coincidente de M .

Se observará que el campo de las aceleraciones no es en general un campo equiproyectivo (véase § 7).

La determinación efectiva del campo de velocidades y del campo de aceleraciones se hace, en general, con ayuda de un sistema de referencia móvil *ortonormal* (véase § 7).

Movimiento y derivada de un vector ligado al espacio móvil

Sea S el espacio vectorial euclídeo asociado al espacio afín \mathcal{S} . Vamos a ver que cuando se da un movimiento $\varphi : \mathcal{S} \times I \rightarrow \mathcal{E}$ de \mathcal{S} en \mathcal{E} queda determinado un

movimiento $f: S \times I \rightarrow E$ de S en E (estando dotados los espacios vectoriales E , S de su estructura afín natural).

Designemos en efecto por Φ_t la isometría de \mathcal{S} en \mathcal{E} definida por

$$(\forall \mu \in \mathcal{S}) \quad \Phi_t(\mu) = \varphi(t, \mu);$$

y, para todo $t \in I$, sea F_t la parte lineal de Φ . Obtenemos un **movimiento de S en E** poniendo

$$(2) \quad (\forall t \in I, \forall \vec{w} \in S) \quad f(t, \vec{w}) = F_t(\vec{w}).$$

Diremos que este movimiento es el *movimiento del espacio vectorial S asociado al movimiento del espacio afín \mathcal{S}* .

En efecto, si φ es de clase C^2 en $I \times \mathcal{S}$, resulta fácil ver que f es también de clase C^2 en $I \times S$.

Se puede interpretar, por otra parte, este movimiento f asociando a cada vector \vec{w} de S , un par (μ, ν) de puntos de \mathcal{S} que verifican $\overrightarrow{\mu\nu} = \vec{w}$. La función $f_w: I \rightarrow E$, $t \mapsto f(t, w)$ que define el movimiento del vector \vec{w} , verifica:

$$(\forall t \in I) \quad f_w(t) = F_t(\vec{w}) = F_t(\overrightarrow{\mu\nu}) = \overrightarrow{\Phi_t(\mu)\Phi_t(\nu)} = \overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)}.$$

Intuitivamente, el vector $\overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)}$ es la posición en el instante t del vector $\overrightarrow{\mu\nu}$ ligado al espacio \mathcal{S} .

Definición XII.5.2

⎧ Para cada vector $\vec{w} \in S$ y para cada instante $t \in I$, el vector $\frac{d}{dt}f_w(t)$ recibe
⎩ el nombre de **derivada** en el instante t del vector \vec{w} ligado al espacio móvil S .

Con las notaciones anteriores, se tiene:

$$\frac{d}{dt}f_w(t) = \frac{d}{dt}\varphi_\nu(t) - \frac{d}{dt}\varphi_\mu(t) = \vec{V}_t(N) - \vec{V}_t(M)$$

con $M = \varphi_\mu(t)$ y $N = \varphi_\nu(t)$. Si $\vec{\Omega}(t)$ designa la rotación instantánea del espacio móvil \mathcal{S} en el instante t , se tiene

$$(3) \quad \frac{d}{dt}f_w(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{MN}.$$

Ahora bien, el vector \overrightarrow{MN} no es sino el t -coincidente del vector \vec{w} en el movimiento f en el instante t . La relación (3) demuestra, pues, que el campo de velocidades del movimiento de S en el instante t es el tursor definido en E por

$$\vec{X} \mapsto \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{X}.$$

Observación. Si \vec{w} es el vector nulo de S , se tiene $f_w(t) = F_t(0) = 0$ para todo $t \in I$. El movimiento de S en E admite al origen O como *punto fijo*; el campo de sus velocidades es un *deslizante*.

§ XII.6 RELACIONES CON EL CONCEPTO DE SISTEMA DE REFERENCIA MÓVIL

Desde el punto de vista físico, sólo se puede estudiar el movimiento de un sólido a través de procedimientos de referencia que pueden ser muy variados (goniómetros, radar, cámaras, etc.). Desde un punto de vista matemático, la referencia consistirá en utilizar un *sistema móvil indeformable* ligado al sólido en movimiento y en definir el movimiento de este sistema de referencia respecto a un sistema de referencia fijo.

Vamos a ver como la utilización de tales sistemas de referencia móviles es sumamente cómoda para los cálculos efectivos ⁽¹⁾ y permite también proporcionar una visión más concreta del movimiento de un sólido al materializar este sólido con ayuda de un sistema de referencia ortonormal. Empezaremos por el caso en que este sólido es un *espacio móvil*.

Sistemas de referencia móviles ligados a un espacio móvil

Sigamos designando por \mathcal{S} un espacio afín euclídeo de dimensión 3, por I un intervalo de \mathbf{R} y consideremos una aplicación $\varphi : \mathcal{S} \times I \rightarrow \mathcal{E}$ (no supuesta a priori de clase C^2) tal que, para cada $t \in I$, la aplicación

$$\Phi_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu)$$

sea una *isometría*.

Sea $\mathcal{R} = (\alpha; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia fijo de \mathcal{S} y, para cada $t \in I$, designemos por F_t la *parte lineal* de Φ_t . Pongamos

⁽¹⁾ Un espacio móvil perfectamente transparente se prestaría mal para el cálculo; los sistemas de referencia móviles que vamos a introducir se pueden considerar como «esqueletos», o «armaduras rígidas» del espacio en movimiento.

$$(1) \quad (\forall t \in I) \quad A(t) = \Phi_t(\alpha) = \varphi(\alpha, t);$$

$$\vec{I}(t) = F_t(\vec{i}), \quad \vec{J}(t) = F_t(\vec{j}), \quad \vec{K}(t) = F_t(\vec{k}).$$

Entonces la aplicación

$$t \mapsto \rho(t) = (A(t); \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$$

define un *sistema de referencia móvil* en \mathcal{E} ; si los movimientos puntuales $t \mapsto \varphi(\mu, t)$ son todos de clase C^2 , lo mismo ocurre con la función $A : I \rightarrow \mathcal{E}$ y con las funciones $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K} : I \rightarrow E$ (en efecto, las funciones $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ son las que definen el movimiento de los vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ligados a \mathcal{S} , véase § 5).

Haciendo variar el sistema de referencia \mathcal{R} se obtiene de este modo una familia de sistemas de referencia móviles de clase C^2 a los que se da el nombre de **sistemas de referencia móviles ligados a \mathcal{S}** .

Observación. La hipótesis única de que los movimientos $\varphi_\mu : t \mapsto \varphi_\mu(t)$ son de clase C^2 implica que los sistemas de referencia móviles ligados a \mathcal{S} son de clase C^2 . El estudio que sigue permite deducir que la aplicación $\varphi : (t, \mu) \rightarrow \varphi(t, \mu)$ es ella misma de clase C^2 en $I \times \mathcal{E}$ (lo cual resultaba ya de XII.4.1).

Por otra parte, la isometría Φ_t es la que lleva el sistema de referencia fijo \mathcal{R} sobre el sistema de referencia $\rho(t)$, y puesto que el sistema de referencia ρ es de clase C^2 , se deduce que para t_0 fijo en I , la aplicación $t \mapsto D_{t_0, t} = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$ es de clase C^2 en I (en el sentido definido en el ejercicio I.25). En particular, la función numérica $t \mapsto \det(D_{t_0, t})$ es de clase C^2 en I . En efecto, $\det(D_{t_0, t})$ no es sino el determinante de los vectores $\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)$, en la base $(\vec{I}(t_0), \vec{J}(t_0), \vec{K}(t_0))$. (Recordemos que la continuidad de esta función constituía el punto esencial de la demostración del teorema XII.3.1.)

Propiedades

En lo que sigue, supondremos que la aplicación $\varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ define un *espacio móvil*.

1. *Todo sistema de referencia móvil ligado a \mathcal{S} es indeformable.*

Demostración. Con las notaciones anteriores, el sistema de referencia $\rho(t)$ se deduce de \mathcal{R} por la isometría Φ_t . Para todos los instantes $u, t \in I$, el sistema de referencia $\rho(u)$ se deduce de $\rho(t)$ por el desplazamiento $D_{tu} = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}$ (véase página 690). El sistema de referencia móvil ρ es pues *indeformable* (véase § X.2).

En particular, si \mathcal{R} es *ortonormal* el sistema de referencia móvil ρ es *ortonormal*.

2. *Si $\rho = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ es un sistema de referencia móvil cualquiera ligado a \mathcal{S} , los movimientos puntuales ligados a \mathcal{S} son los de la forma*

$$(2) \quad t \mapsto M(t) = A(t) + x \vec{I}(t) + y \vec{J}(t) + z \vec{K}(t),$$

donde x, y, z designan constantes reales arbitrarias.

Demostración. Supongamos que ρ sea el sistema de referencia móvil definido por (1). Entonces, el punto $M(t) = A(t) + x\vec{I}(t) + y\vec{J}(t) + z\vec{K}(t)$ es la imagen, por la isometría Φ_t , del punto $\mu = \alpha + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de \mathcal{S} ; se tiene pues

$$M(t) = \Phi_t(\mu) = \varphi(t, \mu),$$

lo cual demuestra que (2) define el movimiento de «la partícula» μ de \mathcal{S} ; de donde el resultado.]

Igualmente se vería que los movimientos de los *vectores ligados* a \mathcal{S} se definen por las aplicaciones de la forma

$$(3) \quad t \mapsto \vec{W}(t) = X \vec{I}(t) + Y \vec{J}(t) + Z \vec{K}(t),$$

donde X, Y, Z designan las constantes arbitrarias.

En otros términos, existe identidad entre el concepto de punto [resp. vector] ligado a \mathcal{S} y el concepto de movimiento puntual ligado a ρ [resp. de función vectorial ligada a ρ]. De ahí se deduce

3. *En cada instante, la rotación instantánea de un sistema de referencia móvil ligado a \mathcal{S} es igual a la rotación instantánea del movimiento de \mathcal{S} .*

En efecto, la rotación instantánea del movimiento de \mathcal{S} verifica, para toda función vectorial \vec{W} de la forma (3),

$$\frac{d\vec{W}}{dt}(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{W}(t).$$

De ahí resulta que $\vec{\Omega}(t)$ es la rotación instantánea del sistema de referencia móvil ρ en el instante t (véase § X.4).

Observaciones

1. Sea $\rho_0 = (A_0; \vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ un sistema de referencia móvil particular ligado a \mathcal{S} . Para que un sistema de referencia móvil $\rho = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ esté ligado a \mathcal{S} , es necesario y suficiente que el sistema de referencia móvil ρ sea *fijo respecto a* ρ_0 ; en otros términos, es necesario y suficiente que las coordenadas del punto $A(t)$ y las componentes de los vectores $\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)$ en el sistema de referencia $\rho_0(t)$ sean *constantes*.

Cuando se conoce un sistema de referencia móvil particular ligado a \mathcal{S} se pueden obtener, por tanto, todos los demás sistemas de referencia móviles ligados a \mathcal{S} .

Espacios móviles ligados a un sistema de referencia móvil indeformable

Inversamente, vamos a ver que *todo sistema de referencia móvil indeformable ρ de \mathcal{E} , clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} , puede ser considerado (de una infinidad de maneras) como ligado a un espacio móvil.*

Para cada $t \in I$ pongamos en efecto $\rho(t) = (A(t); \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$, y fijemos un punto t_0 de I . Pongamos

$$\alpha = A(t_0), \quad \vec{i} = \vec{I}(t_0), \quad \vec{j} = \vec{J}(t_0), \quad \vec{k} = \vec{K}(t_0),$$

y definamos el movimiento de una partícula $\mu = \alpha + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de \mathcal{E} mediante la aplicación

$$(3) \quad \varphi_\mu : I \rightarrow \mathcal{E}, \quad t \mapsto \varphi(t, \mu) = A(t) + x\vec{I}(t) + y\vec{J}(t) + z\vec{K}(t).$$

Entonces la aplicación $\varphi : I \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $(t, \mu) \mapsto \varphi_\mu(t)$ es de clase C^2 ; puesto que el sistema de referencia ρ es indeformable, las aplicaciones

$$\Phi_t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \mu \mapsto \varphi_\mu(t) = \varphi(t, \mu)$$

son isometrías (véase p. 623). Por lo tanto φ define un *espacio móvil* (o, con más precisión, un movimiento de \mathcal{E} en \mathcal{E}); la isometría Φ_t es la que lleva a $\rho(t_0)$ sobre $\rho(t)$, y por lo tanto ρ es un sistema de referencia móvil ligado al espacio móvil definido por φ .

Observaciones

1. Se obtienen todos los espacios móviles a los cuales ρ está ligado considerando un espacio afín euclídeo cualquiera \mathcal{S} de dimensión 3, y una isometría cualquiera θ de \mathcal{S} en \mathcal{E} . Las aplicaciones de la forma

$$\psi : I \times \mathcal{S} \mapsto \mathcal{E}, \quad (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \theta(\mu))$$

definen espacios móviles a los que está ligado ρ , y resulta fácil ver que éstos son los únicos.

En la práctica, *dar un espacio móvil de clase C^2 equivale a dar un sistema de referencia móvil indeformable ligado a este espacio*; pero no hay que olvidar que al dar este sistema de referencia móvil el espacio móvil queda sólo determinado salvo por un «cambio de modelo».

En lo que sigue se estudiará el movimiento de un espacio móvil con ayuda de un sistema de referencia móvil *ortonormal* ligado a este espacio.

Sistemas de referencia móviles ligados a un sólido en movimiento

Consideremos un sólido en movimiento de rango ≥ 2 (véase p.692). Vamos a ver que no es necesario pasar por el intermedio de un «espacio móvil» ligado a este sólido (véase p. 698) para definir sistemas de referencia móviles indeformables ligados a este sólido ⁽¹⁾.

Supongamos en efecto que el movimiento de este sólido esté definido por una aplicación de la forma

$$\varphi: I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E} \quad (\mathcal{M} \subset \mathcal{S}),$$

tal que, para cada $t \in I$, la aplicación $\Phi_t: \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$ conserve las distancias.

a) Si \mathcal{M} contiene por lo menos cuatro puntos no coplanarios $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, podemos definir un sistema de referencia móvil ρ ligado a este sólido poniendo

$$(4) \quad (\forall t \in I) \quad \rho(t) = (A(t); \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)),$$

con

$$\begin{aligned} A(t) &= \varphi_\alpha(t), \quad \vec{I}(t) = \overrightarrow{\varphi_\alpha(t)\varphi_\beta(t)}, \\ \vec{J}(t) &= \overrightarrow{\varphi_\alpha(t)\varphi_\gamma(t)}, \quad \vec{K}(t) = \overrightarrow{\varphi_\alpha(t)\varphi_\delta(t)}. \end{aligned}$$

b) Si el sólido es de rango 2, entonces \mathcal{M} contiene por lo menos tres puntos no alineados α, β, γ ; al orientar \mathcal{E} , la relación (4) permite todavía definir un sistema de referencia móvil ligado al sólido, estando las funciones $\vec{A}, \vec{I}, \vec{J}$ definidas como anteriormente, pero con $\vec{K}(t) = \vec{I}(t) \wedge \vec{J}(t)$.

(Los sistemas de referencia móviles así definidos son los que nos han servido implícitamente para establecer las proposiciones XII.3.1, XII.4.1 y XII.4.2.)

§ XII.7 MOVIMIENTO DEFINIDO POR UN SISTEMA DE REFERENCIA ORTONORMAL MÓVIL

En este § consideramos un espacio móvil \mathcal{S} cuyo movimiento está definido dando un *sistema de referencia ortonormal móvil* de clase C^2 (ligado a \mathcal{S}), o sea

$$(1) \quad \rho: t \mapsto (A(t); \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)).$$

(El estudio hecho en el § anterior nos ha demostrado que nos podíamos limitar siempre a este caso.)

⁽¹⁾ Si (como hizo Newton) se contempla el caer de una manzana, resulta indudablemente más fácil imaginar un «sistema de referencia móvil» ligado a esta manzana que un «espacio afín euclídeo» arrastrado en su caída.

● Para simplificar, supondremos que el espacio \mathcal{E} está orientado de tal modo que el sistema de referencia móvil ρ sea **directo**.

Al aplicar las fórmulas (4) del § X.3 se ve que la rotación instantánea del movimiento de \mathcal{S} está definida por

$$(2) \quad \vec{\Omega}(t) = p(t) \vec{I}(t) + q(t) \vec{J}(t) + r(t) \vec{K}(t),$$

con

$$(3) \quad \begin{aligned} p(t) &= \frac{d\vec{J}}{dt} \cdot \vec{K}(t) = - \vec{J}(t) \cdot \frac{d\vec{K}}{dt}, \\ q(t) &= \frac{d\vec{K}}{dt} \cdot \vec{I}(t) = - \vec{K}(t) \cdot \frac{d\vec{I}}{dt}, \\ r(t) &= \frac{d\vec{I}}{dt} \cdot \vec{J}(t) = - \vec{I}(t) \cdot \frac{d\vec{J}}{dt}. \end{aligned}$$

Eligiendo adecuadamente el sistema de referencia ortonormal ρ ligado a \mathcal{S} , las fórmulas (3) permiten muchas veces un cálculo rápido de $\vec{\Omega}(t)$. Pero no hay que olvidar que muchas veces se puede también determinar $\vec{\Omega}(t)$ por el método de *suma de los vectores rotaciones* (véase § X.6) o de *composición de movimientos* (véase p. 722).

Determinación del eje instantáneo de rotación y de deslizamiento

El campo de velocidades del espacio móvil \mathcal{S} en el instante t está definido al dar el vector $\vec{\Omega}(t)$ y su valor en el punto $A(t)$, o sea: $\vec{V}_A(t) = dA/dt$. Lo mismo que en el § X.3 designaremos por $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$, las componentes del vector dA/dt en el sistema de referencia $\rho(t)$.

El eje instantáneo de rotación y de deslizamiento de \mathcal{S} en el instante t , que designamos Δ_t , admite pues la parametrización $\lambda \mapsto M_\lambda$ definida por

$$\overrightarrow{A(t)M_\lambda} = \lambda \vec{\Omega}(t) + \frac{\vec{\Omega}(t) \wedge A'(t)}{\|\vec{\Omega}(t)\|^2}.$$

En el sistema de referencia $\rho(t)$ la recta Δ_t se halla definida por las ecuaciones cartesianas:

$$\frac{\xi(t) + q(t)z - r(t)y}{p(t)} = \frac{\eta(t) + r(t)x - p(t)y}{q(t)} = \frac{\zeta(t) + p(t)y - q(t)z}{r(t)}.$$

Observación. Si el espacio móvil admite un punto fijo A , es posible elegir el sistema de referencia móvil ρ de modo que se tenga $A(t) = A$ para todo $t \in I$. Se tiene entonces $\vec{V}_A(t) = 0$, y el eje instantáneo Δ_t pasa por A . Las ecuaciones de Δ_t en el sistema de referencia $\rho(t)$ se reducen entonces a

$$\frac{x}{p(t)} = \frac{y}{q(t)} = \frac{z}{r(t)}.$$

Campo de aceleraciones

El sistema de referencia móvil ρ nos va a permitir la determinación fácil del campo $\vec{\Gamma}_t$ de aceleraciones en el instante t .

Por definición, el vector $\vec{\Gamma}_t(M)$ es la aceleración, en el instante t , del punto t -coincidente de M . Si se designan por x, y, z las coordenadas de M en el sistema de referencia $\rho(t)$, el movimiento del t -coincidente de M está definido por la aplicación

$$I \rightarrow \mathcal{E}, \quad \tau \mapsto \varphi(\tau) = A(\tau) + x \vec{I}(\tau) + y \vec{J}(\tau) + z \vec{K}(\tau).$$

Se tiene pues

$$\vec{\Gamma}_t(M) = \varphi''(t) = \frac{d^2 A}{dt^2} + x \frac{d^2 \vec{I}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{J}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{K}}{dt^2}.$$

Ahora bien, las relaciones

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{I}(t), \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{J}(t), \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{K}(t)$$

implican

$$\frac{d^2 \vec{I}}{dt^2} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{I}(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge (\vec{\Omega}(t) \wedge \vec{I}(t)),$$

y relaciones análogas para $d^2 \vec{J}/dt^2$ y $d^2 \vec{K}/dt^2$. De ahí se deduce, agrupando términos

$$(3) \quad \vec{\Gamma}_t(M) = \frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{A(t)M} + \vec{\Omega}(t) \wedge (\vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{A(t)M}).$$

Se observará que en general el campo \vec{T}_t no es un tórsor (solamente lo es si $\vec{\Omega}(t) = 0$).

§ XII.8 EJEMPLOS FUNDAMENTALES DE MOVIMIENTO

- En este § se supondrá el espacio \mathcal{E} orientado.

Traslación

Volvamos a las notaciones del § 1 y consideremos una familia $(\varphi_\mu)_{\mu \in \mathcal{M}}$ de movimientos puntuales en \mathcal{E} , que definen el *movimiento de un sistema material* en un intervalo de tiempo I .

Se dice que este movimiento es un **movimiento de traslación** si, para todos los $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, el vector $\overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)}$ es independiente de t .

Equivale esto a decir que los movimientos de las distintas partículas que componen el sistema se deducen unos de otros por traslaciones fijas de \mathcal{E} .

Resulta inmediatamente que este movimiento es el de un sólido; en efecto, para todos los $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, la distancia

$$d[\varphi_\mu(t), \varphi_\nu(t)] = \| \overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)} \|$$

es constante.

Se tiene inmediatamente

XII.8.1 Para que el movimiento de un sistema material sea un **movimiento de traslación**, es necesario y suficiente que en cada instante t el campo \vec{V}_t de sus velocidades sea **uniforme**.

Demostración. En cada instante t , se tiene

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)} = \vec{V}_t[\varphi_\nu(t)] - \vec{V}_t[\varphi_\mu(t)].$$

Para que el movimiento sea una traslación es necesario y suficiente que para todo $t \in I$ y todos los $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, se tenga: $\vec{V}_t[\varphi_\nu(t)] = \vec{V}_t[\varphi_\mu(t)]$, de donde el resultado.]

El estudio del campo de aceleraciones lleva al siguiente resultado:

XII.8.2 Para que el movimiento de un sistema sea un **movimiento de traslación** es necesario que en cada instante t el campo \vec{T}_t de las aceleraciones sea constante; esta condición es **suficiente** si el sistema considerado es **sólido**.

Demostración. Por derivación se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)} = \vec{\Gamma}_t(\varphi_\nu(t)) - \vec{\Gamma}_t(\varphi_\mu(t)),$$

lo cual demuestra inmediatamente que la condición enunciada es necesaria. Inversamente, si tal condición se cumple, se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)} = 0,$$

para todo $t \in I$ y todos los $\mu, \nu \in \mathcal{M}$. Al ser fijos los puntos μ, ν de \mathcal{M} , existen por lo tanto dos vectores constantes \vec{i}, \vec{j} que verifican

$$(\forall t \in I) \quad \overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)} = t\vec{i} + \vec{j},$$

y si el sistema es sólido, se tiene

$$\| \overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)} \|^2 = \| t\vec{i} + \vec{j} \|^2 = \text{Cte},$$

o sea

$$t^2 \|\vec{i}\|^2 + 2t\vec{i} \cdot \vec{j} + \|\vec{j}\|^2 = \text{Cte},$$

lo cual sólo es posible si $\vec{i} = 0$, de donde $\overrightarrow{\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)} = \text{Cte}$; el movimiento es pues una traslación.]]

Se tiene finalmente:

XII.8.3 *Para que el movimiento de un espacio móvil sea un movimiento de traslación, es necesario y suficiente que su **rotación instantánea** $\vec{\Omega}(t)$ sea nula en cada instante t .*

Demostración. Para que el campo de velocidades en el instante t sea uniforme, es necesario y suficiente que se tenga $\vec{\Omega}(t) = 0$; de donde el resultado, habida cuenta de XII.8.1.]]

Observación. Para que el movimiento de un espacio móvil sea un movimiento de traslación, es necesario y suficiente que el espacio vectorial asociado sea *inmóvil* o, lo que es lo mismo, *es necesario y suficiente que todos los vectores ligados a este espacio móvil sean constantes*.

Los sistemas de referencia móviles ligados a un movimiento de traslación son de la forma

$$\rho : t \mapsto (A(t); \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}),$$

donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ designa una base fija de \mathcal{E} .

Traslaciones rectilíneas o uniformes

Volvamos al caso de un sólido cualquiera animado de un movimiento de traslación. Si el movimiento de uno de los puntos de este sólido es rectilíneo [resp. uniforme] lo mismo ocurre con todos los demás (ya que los movimientos de los distintos puntos del sólido se deducen unos de otros por traslaciones fijas). El movimiento del sólido recibe entonces el nombre de *movimiento de traslación rectilínea* [resp. uniforme]. En el caso de un movimiento de traslación rectilínea, las trayectorias de los distintos puntos son *segmentos de recta paralelos*. Por ejemplo, el movimiento de un ascensor es rectilíneo.

Los **movimientos de traslación rectilínea y uniforme** son los movimientos de la forma

$$\varphi_\mu : t \mapsto \varphi_\mu(t_0) + v(t - t_0) \vec{k}$$

donde \vec{k} designa un vector unitario fijo y t_0 una constante. Se tiene, fácilmente

XII.8.4. *Para que el movimiento de un sistema material sea un **movimiento de traslación rectilínea y uniforme**, es necesario y suficiente que el campo de sus velocidades sea a la vez **uniforme e independiente del tiempo**, es decir de la forma*

$$M \mapsto \vec{V}_i(M) = \vec{W},$$

donde \vec{W} designa un vector fijo.

La importancia de los movimientos de traslación rectilínea no nos ha de hacer olvidar que existen movimientos de traslación *no rectilíneos*: por ejemplo, el movimiento de las bielas de una locomotora o el de una «gran rueda de ferias».

Rotaciones

Definición XII.8.1

- a) *El movimiento de un **espacio móvil** recibe el nombre de **movimiento de rotación** si admite dos puntos fijos (en cuyo caso admite una recta de puntos fijos).*

- || b) El movimiento de un **sólido** recibe el nombre de **movimiento de rotación** si existe un espacio móvil, animado de un movimiento de rotación, al cual esté ligado este sólido.

Nos podemos limitar al caso de un espacio móvil \mathcal{S} . Si A, B designan dos puntos fijos de este espacio, podemos elegir un sistema de referencia ortonormal móvil *directo* $\rho = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ ligado a \mathcal{S} , de origen fijo A y tal que \vec{k} sea el vector fijo $\vec{k} = \overrightarrow{AB} / \|\overrightarrow{AB}\|$ (véase la figura 1).

Si $\vec{\Omega}(t)$ designa la rotación instantánea de \mathcal{S} , la relación

$$\vec{\Omega}(t) \wedge \vec{k} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

demuestra que el vector $\vec{\Omega}(t)$ es colineal con el vector fijo \vec{k} , por lo tanto de la forma $\vec{\Omega}(t) = \omega(t) \vec{k}$, donde ω designa una función numérica. El número $\omega(t)$ recibe el nombre de **velocidad angular** del movimiento en el instante t .

Designemos por $t \mapsto M(t)$ un movimiento puntual ligado a \mathcal{S} . Su velocidad en el instante t es

$$(2) \quad \frac{dM}{dt} = \vec{V}_t(M) = \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{AM}(t) = \omega(t) \vec{k} \wedge \overrightarrow{AM}(t).$$

Elijamos dos vectores fijos \vec{i}, \vec{j} , de \mathcal{E} tales que el sistema de referencia $\mathcal{R} = (A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sea ortonormal y directo. Si $(x(t), y(t), z(t))$ designan las coordenadas del punto $M(t)$ en este sistema de referencia, la relación (2) se traduce en las ecuaciones diferenciales

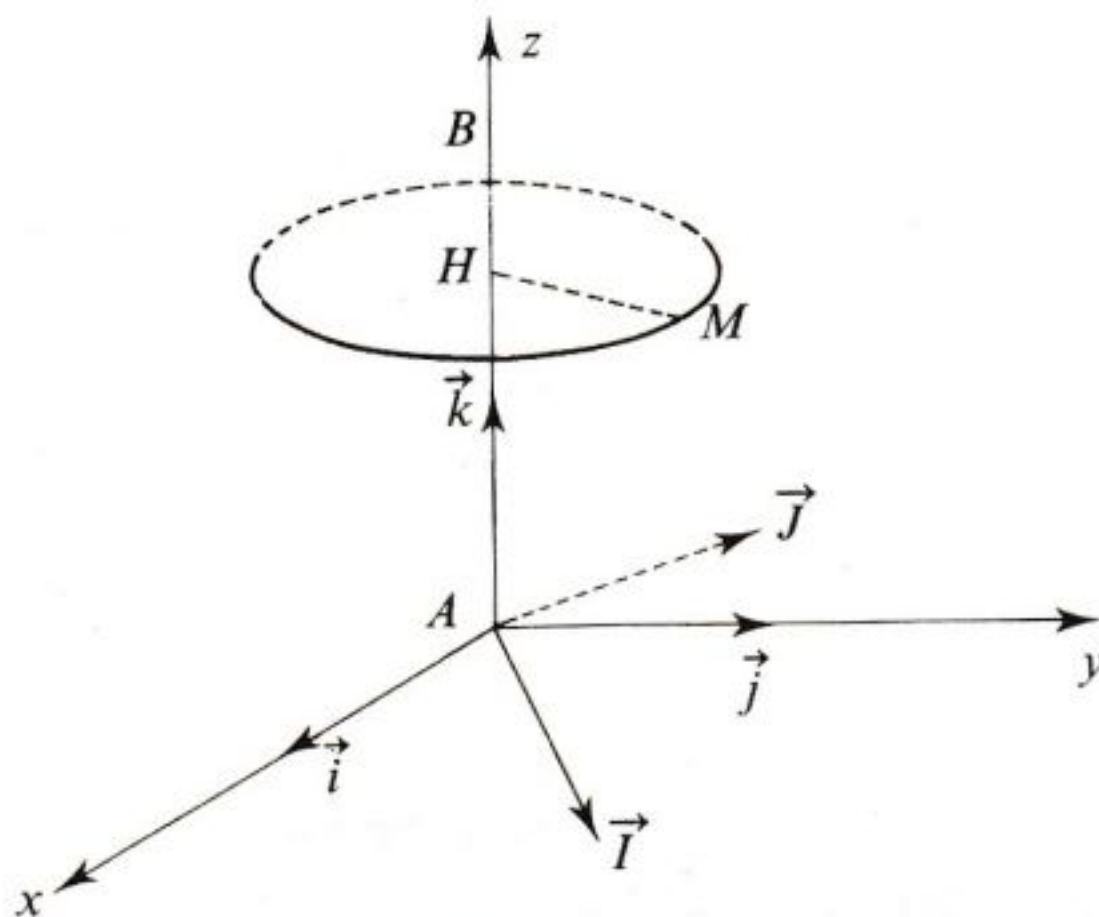


Figura 1.

$$(3) \quad x'(t) = -\omega(t)y(t), \quad y'(t) = \omega(t)x(t), \quad z'(t) = 0.$$

Designemos por $\theta : t \mapsto \theta(t)$ una primitiva cualquiera de la función ω . Se ve entonces fácilmente que las soluciones de (3) son de la forma

$$(4) \quad x(t) = R \cos(\theta(t) - \theta_0); \quad y(t) = R \sin(\theta(t) - \theta_0); \quad z(t) = z_0,$$

donde R, θ_0, z_0 designan constantes arbitrarias.

Nos encontramos de nuevo con el hecho de que los puntos de la recta (A, \vec{k}) son puntos fijos de \mathcal{S} ; se ve seguidamente que los movimientos de los puntos de \mathcal{S} no situados sobre esta recta son *movimientos circulares* de la misma velocidad angular $\omega(t)$: Sus trayectorias son *circunferencias* de eje (A, \vec{k}) .

El movimiento de rotación se denomina *uniforme* si su velocidad angular ω es constante. Los movimientos puntuales ligados a \mathcal{S} son entonces movimientos *circulares uniformes*.

En el caso general, el campo de aceleraciones $\vec{\Gamma}_t$ se halla definido por

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \vec{\Gamma}_t(M) = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\Omega}(t) \wedge (\vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{AM})$$

(véase fórmula (3), p. 704), o sea, designando por H la proyección de M sobre la recta AB ,

$$\vec{\Gamma}_t(M) = \omega'(t) \vec{k} \wedge \overrightarrow{AM} - \omega^2(t) \overrightarrow{HM}.$$

(Esta fórmula se podría también deducir del estudio del movimiento circular hecho en el § XI.4.)

Movimiento helicoidal uniforme

Definición XII.8.2.

Sea \mathcal{S} un espacio móvil en \mathcal{E} . Se dice que el movimiento de φ es un **movimiento helicoidal uniforme** si existe un sistema de referencia ortonormal fijo $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} y un sistema de referencia ortonormal móvil $\rho = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ ligado a \mathcal{S} , tales que en cada instante t , se tenga (véase la figura 2)

$$(5) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{OA}(t) &= vt \vec{k}, \quad \vec{K}(t) = \vec{k} \\ \vec{I}(t) &= \vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t, \quad \vec{J}(t) = -\vec{i} \sin \omega t + \vec{j} \cos \omega t \end{aligned}$$

§ donde ω y v designan constantes numéricas no nulas.

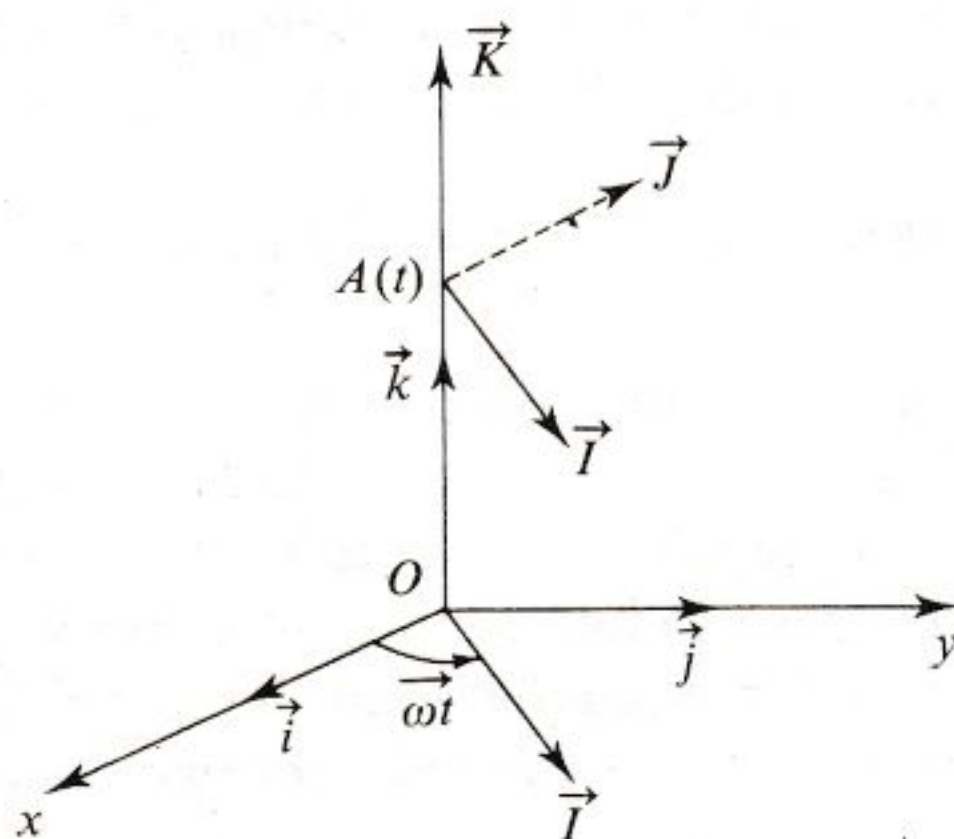


Figura 2.

Cambiando si es preciso \vec{k} por $-\vec{k}$ (y \vec{K} por $-\vec{K}$) nos podemos limitar siempre al caso en que el sistema de referencia \mathcal{R} es *directo*. Se puede decir entonces que el sistema de referencia $\rho(t)$ se deduce de \mathcal{R} por el **desplazamiento helicoidal** compuesto por la *traslación* de vector $vt\vec{k}$ y por la *rotación de ángulo ωt* alrededor del eje $\vec{\Delta} = (O, \vec{k})$.

Los movimientos puntuales ligados a \mathcal{S} son de la forma

$$t \mapsto M(t) = A(t) + a\vec{I}(t) + b\vec{J}(t) + c\vec{k} \quad (a, b, c = \text{Cte}).$$

Poniendo $a = r \cos \psi$, $b = r \sin \psi$, se ve que las coordenadas de $M(t)$ en el sistema de referencia fijo \mathcal{R} son

$$(6) \quad x(t) = r \cos(\omega t + \psi), \quad y(t) = r \sin(\omega t + \psi), \quad z(t) = vt + c.$$

Para $r \neq 0$, el movimiento definido por (6) es un *movimiento helicoidal uniforme* (véase curso del terminal C). Su trayectoria es una **hélice circular** de eje $\Delta = (O, \vec{k})$ y de paso v .

Para $r = 0$ las relaciones (6) definen un movimiento uniforme sobre la recta (O, \vec{k}) .

Existe, pues, una recta D de \mathcal{S} cuya «posición» en cada instante es la recta Δ de \mathcal{E} (en otros términos, con las notaciones del § 3, se tiene $\Phi_t(D) = \Delta$). Por abuso de lenguaje, se dice que la recta D de \mathcal{S} *se desliza* sobre Δ .

Las expresiones de las funciones $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ hacen ver inmediatamente que la rota-

ción instantánea de \mathcal{S} es constante e igual a $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$; el campo de velocidades en el instante t se halla definido por

$$\vec{V}_t(M) = \vec{V}_t(A(t)) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{A(t)M} = v\vec{k} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

Este campo es pues independiente de t ; en cada instante, el eje instantáneo de rotación y de deslizamiento es la recta Δ (denominada eje del movimiento helicoidal).

El campo de aceleraciones \vec{I}_t es el mismo que en el movimiento circular uniforme de velocidad angular ω alrededor del eje (O, \vec{k}) , o sea

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \vec{I}_t(M) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega^2 \overrightarrow{HM},$$

donde H designa la proyección ortogonal de M sobre Δ .

Observación. Se puede definir un concepto más general de movimiento helicoidal (no necesariamente uniforme).

Movimientos elementales

Diremos que el movimiento de un sólido \mathcal{S} en \mathcal{E} es *elemental* si se puede definir mediante un sistema de referencia móvil de la forma (5). El sistema de referencia fijo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ se supone siempre ortonormal, pero las constantes numéricas ω, v no están sujetas a ser no nulas. Se ve inmediatamente que

- a) si $\omega = v = 0$, \mathcal{S} es *inmóvil*;
- b) si $\omega = 0$, con $v \neq 0$, el movimiento de \mathcal{S} es un movimiento de *traslación rectilínea uniforme*, cuyo vector velocidad es $v\vec{k}$;
- c) si $v = 0$, con $\omega \neq 0$ el movimiento de \mathcal{S} es un movimiento de *rotación uniforme* alrededor de la recta $\Delta = (O, \vec{k})$; su rotación instantánea es el vector $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$;
- d) si $v \neq 0$ y $\omega \neq 0$, por definición, el movimiento de \mathcal{S} es un *movimiento helicoidal uniforme*.

El caso b) nos proporciona (al variar v y \vec{k}) el movimiento rectilíneo uniforme más general.

El caso c) nos proporciona (cuando varían ω y \vec{k}) el movimiento de rotación uniforme más general.

En esta discusión, los movimientos particulares constituidos por la inmovilidad, las traslaciones rectilíneas uniformes y las rotaciones uniformes, aparecen como *movimientos helicoidales degenerados*.

En conclusión, los únicos movimientos elementales son: el movimiento helicoidal uniforme propiamente dicho y los movimientos helicoidales uniformes degenerados (inmovilidad, traslación rectilínea uniforme, rotación uniforme).

Movimiento elemental tangente, en un instante dado, a un movimiento dado

Definición XII.8.2

$\left. \begin{array}{l} \text{Se dice que los movimientos de dos espacios móviles son tangentes en un} \\ \text{instante } t \text{ si tienen, en el instante } t, \text{ el mismo campo de velocidades.} \end{array} \right\}$

El estudio que antecede nos permite establecer

XII.8.1 *En cada instante existe un movimiento elemental único tangente al movimiento de un espacio móvil dado \mathcal{S} .*

Demostración. Designemos por \vec{V}_t el torsor constituido por el campo de velocidades de \mathcal{S} en el instante t .

- a) Si el campo \vec{V}_t es nulo, el movimiento de \mathcal{S} es tangente a «la inmovilidad».
- b) Si el campo \vec{V}_t es uniforme, pero no nulo, o sea $\vec{V}_t = \vec{K}$, el movimiento de \mathcal{S} es tangente a una traslación rectilínea uniforme de vector velocidad \vec{K} .
- c) Si el campo \vec{V}_t no es uniforme, es de la forma

$$M \mapsto \vec{V}_t(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

donde A designa un punto cualquiera de \mathcal{E} y $\vec{\Omega}$ el vector rotación instantánea de \mathcal{S} en el instante t . Tomando A sobre el eje helicoidal Δ del movimiento de \mathcal{S} en el instante t , se ve que este campo es de la forma

$$M \mapsto \lambda \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}.$$

- Si $\lambda = 0$, el movimiento de \mathcal{S} es tangente a un movimiento de rotación uniforme de eje Δ .

- Si $\lambda \neq 0$, el movimiento de \mathcal{S} es tangente a un movimiento helicoidal uniforme de eje Δ .

Hemos demostrado así la existencia, en cada caso, de un movimiento elemental tangente al movimiento de \mathcal{S} ; se comprueba fácilmente que este movimiento es único.]]

Observaciones

1. Dos movimientos tangentes en un instante dado t tienen la misma rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$; si $\vec{\Omega}(t) \neq 0$, estos dos movimientos tienen, en el instante t , el mismo eje instantáneo de rotación y de deslizamiento.

Por el contrario, tales movimientos no tienen necesariamente el mismo campo de aceleraciones en el instante t .

2. Entiéndase bien que el movimiento elemental tangente en el instante t a un movimiento dado de espacio móvil depende en general de t .

Concepto de movimiento estacionario

Definición XII.8.3

$\} \text{ Se dice que el movimiento de un sistema material es estacionario si el campo de sus velocidades es independiente del tiempo.}$

Pongámonos en el caso en que, en cada instante, el sistema material considerado ocupa todo el espacio \mathcal{E} . Para que el movimiento de este sistema sea un *movimiento estacionario de espacio sólido*, es necesario y suficiente que el campo de sus velocidades (que entonces se halla definido en todas partes de \mathcal{E}) sea un *torsor fijo* de \mathcal{E} .

Se ve entonces fácilmente que *los únicos movimientos estacionarios de espacios sólidos son los movimientos elementales definidos anteriormente*.

Demostración. Al ser estacionarios los movimientos elementales, nos basta demostrar que no existe otro movimiento estacionario de espacio móvil.

Supongamos pues dado un espacio móvil \mathcal{S} cuyo campo de velocidades sea un torsor fijo τ de \mathcal{E} . Si τ es un campo uniforme, sabemos ya que el movimiento de \mathcal{S} es la inmovilidad, o un movimiento de traslación rectilínea uniforme.

Si el campo τ no es uniforme, es de la forma $\tau : M \mapsto v\vec{k} + \omega\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM}$, donde O designa un punto de su eje central Δ y \vec{k} un vector director unitario de este eje (las constantes ω, v verifican $\omega \neq 0$).

Los movimientos puntuales $t \mapsto M(t)$ ligados a \mathcal{S} verifican la ecuación diferencial

$$(7) \quad \frac{dM}{dt} = \tau(M(t)) = v\vec{k} + \omega\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM}(t).$$

Para integrar este sistema, tomemos dos vectores \vec{i}, \vec{j} , tales que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sea una base ortonormal directa de \mathcal{E} . En el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la ecuación diferencial (1) se traduce en el sistema diferencial

$$(8) \quad x'(t) = -\omega y(t), \quad y'(t) = \omega x(t), \quad z'(t) = v.$$

Se ve inmediatamente que las soluciones de (8) son las ternas (x, y, z) de funciones de la forma

$$(9) \quad x(t) = r \cos \omega(t - t_0), \quad y(t) = r \sin \omega(t - t_0), \quad z(t) = vt + z_0.$$

De aquí se deduce que el movimiento de \mathcal{S} es un movimiento de *rotación uniforme* de eje Δ si $v = 0$, y un movimiento *helicoidal uniforme* de eje Δ si $v \neq 0$, de donde el resultado.]]

§ XII.9 MOVIMIENTO PUNTUAL RELATIVO

Los movimientos que podemos observar se hallan casi siempre referidos a un sistema ligado a nuestro globo terrestre; ahora bien, un tal sistema de referencia no es fijo, sino que está en movimiento respecto a las estrellas. Esto nos lleva al problema matemático siguiente:

Problema del movimiento relativo

Se supone dado un *sistema de referencia móvil* de \mathcal{E}

$$t \mapsto \rho(t) = (A(t); \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$$

de clase C^2 en un intervalo I de \mathbb{R} y se define un *movimiento puntual* $M: I \rightarrow \mathcal{E}$ dando, en cada instante t , las coordenadas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ del punto $M(t)$ en el sistema de referencia $\rho(t)$.

Nos proponemos determinar la velocidad y la aceleración de este movimiento por medio de las derivadas de las funciones x , y , z (supuestas estas funciones de clase C^2 en I).

La solución de este problema no ofrece dificultad. Para todo $t \in I$ se tiene, en efecto,

$$(1) \quad M(t) = A(t) + x(t) \vec{I}(t) + y(t) \vec{J}(t) + z(t) \vec{K}(t),$$

de donde, derivando,

$$\frac{dM}{dt} = \vec{V}_e(t) + \vec{V}_r(t),$$

con

$$\vec{V}_e(t) = \frac{dA}{dt} + x(t) \frac{d\vec{I}}{dt} + y(t) \frac{d\vec{J}}{dt} + z(t) \frac{d\vec{K}}{dt},$$

y

$$(2) \quad \vec{V}_r(t) = x'(t) \vec{I}(t) + y'(t) \vec{J}(t) + z'(t) \vec{K}(t).$$

Designemos por $\vec{\Omega}(t)$ la rotación instantánea del sistema de referencia móvil ρ en el instante t . Se tiene

$$\vec{V}_e(t) = \frac{dA}{dt} + \vec{\Omega}(t) \wedge [x(t) \vec{I}(t) + y(t) \vec{J}(t) + z(t) \vec{K}(t)]$$

o sea

(3)

$$\vec{V}_e(t) = \frac{dA}{dt} + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{A(t)M(t)}.$$

Para interpretar el segundo miembro de (3), consideremos un *espacio móvil* \mathcal{S} al cual esté ligado el sistema de referencia móvil ρ . Entonces $\vec{V}_e(t)$ es el valor, en el punto $M(t)$, del campo de velocidades de \mathcal{S} en el instante t ; en otros términos, $\vec{V}_e(t)$ es la velocidad del t -coincidente del punto $M(t)$. Establecemos la siguiente

Definición XII.9.1

El vector $\vec{V}_e(t)$ recibe el nombre de **velocidad de arrastre** del movimiento puntual M en el instante t ; el vector $\vec{V}_r(t)$ definido por (2) recibe el nombre de **velocidad relativa** en el mismo instante; para distinguirlos de los anteriores el (verdadero) vector velocidad del movimiento en este instante, o sea dM/dt , recibe el nombre de **velocidad absoluta** y se designa por $\vec{V}_a(t)$.

Con estas notaciones, se tiene en cada instante t , la relación fundamental

(4)

$$\vec{V}_a(t) = \vec{V}_e(t) + \vec{V}_r(t).$$

Observación. La fórmula (3) muestra que el vector $\vec{V}_e(t)$ depende solamente del movimiento definido por el sistema de referencia móvil ρ , y no se altera si se sustituye por otro sistema de referencia móvil ρ_1 ligado a \mathcal{S} (es decir fijo respecto a ρ). El vector $\vec{V}_a(t)$ depende solamente del movimiento de M . El vector $\vec{V}_r(t)$ depende por lo tanto sólo del movimiento de M y del movimiento de \mathcal{S} ; por otra parte, se podría comprobar esto por medio de un cambio de sistema de referencia. En seguida encontraremos de nuevo estos resultados mediante una definición intrínseca de \vec{V}_r y \vec{V}_e .

Desde un punto de vista intuitivo \vec{V}_r es la velocidad de M respecto al sistema de referencia ρ ; \vec{V}_e es la velocidad que tendría M en el instante t si estuviera ligado al sistema de referencia ρ .

Aceleraciones

Al derivar nuevamente (1), se obtiene

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \vec{\Gamma}_e(t) + \vec{\Gamma}_r(t) + \vec{\Gamma}_c(t),$$

con

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_e(t) &= \frac{d^2 A}{dt^2} + x(t) \frac{d^2 \vec{I}}{dt^2} + y(t) \frac{d^2 \vec{J}}{dt^2} + z(t) \frac{d^2 \vec{K}}{dt^2}, \\
 \vec{r}_r(t) &= x''(t) \vec{I}(t) + y''(t) \vec{J}(t) + z''(t) \vec{K}(t), \\
 \vec{r}_c(t) &= 2 \left(x'(t) \frac{d\vec{I}}{dt} + y'(t) \frac{d\vec{J}}{dt} + z'(t) \frac{d\vec{K}}{dt} \right).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

a) El vector $\vec{r}_e(t)$ es evidentemente la aceleración del t -coincidente del punto $M(t)$ en el movimiento de \mathcal{S} . Es el valor en el punto $M(t)$ del campo de aceleraciones en el instante t , o sea, según la relación (3) del § 7,

$$\vec{r}_e(t) = \frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{A(t)M(t)} + \vec{\Omega}(t) \wedge (\vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{A(t)M(t)}).$$

Este vector recibe el nombre de **aceleración de arrastre** del movimiento M en el instante t . Intuitivamente, es la aceleración que tendría la partícula M si estuviera ligada a \mathcal{S} y ocupara la misma posición en el instante t .

b) El vector $\vec{r}_r(t)$ definido por (5) recibe el nombre de **aceleración relativa** del movimiento M en el instante t . Es la aceleración «aparente» de M para un observador ligado al sólido \mathcal{S} .

c) El vector $\vec{r}_c(t)$ recibe el nombre de **aceleración complementaria**, o **aceleración de Coriolis** del movimiento de M en el instante t . Introduciendo el vector rotación $\vec{\Omega}(t)$, se obtiene

$$\vec{r}_c(t) = 2 \vec{\Omega}(t) \wedge (x'(t) \vec{I}(t) + y'(t) \vec{J}(t) + z'(t) \vec{K}(t))$$

o sea, por comparación con (2)

$$\boxed{\vec{r}_c(t) = 2 \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{V}_r(t)}$$

d) Finalmente, el vector $d^2 M/dt^2$ (que es la verdadera aceleración del movimiento de M en el instante t) recibe el nombre de **aceleración absoluta** del movimiento en este instante.

Se tiene pues, en cada instante:

$$\boxed{\vec{r}_a(t) = \vec{r}_e(t) + \vec{r}_r(t) + 2 \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{V}_r(t)}
 \tag{6}$$

Se demostraría fácilmente que los vectores $\vec{r}_e(t)$ y $\vec{r}_r(t)$ dependen solamente de los movimientos de M y de \mathcal{S} , y no del sistema de referencia ρ utilizado.

Observación. Un observador ligado al sólido \mathcal{S} que pretendiera aplicar al movimiento relativo las leyes fundamentales de la Dinámica, vería como éstas fallaban; se daría cuenta así de que el sólido \mathcal{S} no está fijo.

Sin embargo, si el sólido \mathcal{S} tiene un movimiento de traslación rectilínea uniforme, se tiene, en cada instante: $\vec{\Gamma}_e(t) = 0$ y $\vec{\Omega}(t) = 0$, de donde $\vec{\Gamma}_a(t) = \vec{\Gamma}_r(t)$. El movimiento del sólido \mathcal{S} resulta entonces imperceptible para un observador ligado a este sólido.

Definición intrínseca

Vamos a ver ahora en que modo se puede definir la velocidad relativa de M dando únicamente el movimiento de \mathcal{S} , con independencia del sistema de referencia móvil elegido ρ , ligado a \mathcal{S} .

Volvamos a las notaciones del § 3 y consideremos un espacio móvil definido por medio de una aplicación

$$\varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu)$$

tal que para cada $t \in I$, la aplicación $\Phi_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$ sea una isometría.

Designando como siempre por $M : t \mapsto M(t)$ un movimiento puntual en \mathcal{E} , pongamos, para todo $t \in I$, $m(t) = \Phi_t^{-1}(M(t))$. La aplicación $I \rightarrow \mathcal{S}, t \mapsto m(t)$ así obtenida define un movimiento puntual en \mathcal{S} , al cual llamaremos *movimiento relativo*, o *movimiento intermediario* de M . La trayectoria de este movimiento será denominada *trayectoria relativa* (o *intermediaria*) de M en \mathcal{S} .

Por construcción, se tiene $M(t) = \Phi_t(m(t) = \varphi(t, m(t)))$; de donde aplicando el teorema de derivación de funciones compuestas

$$(7) \quad \frac{dM}{dt} = \varphi'_t(t, m(t)) + \varphi'_\mu(t, m(t)) \cdot \frac{dm}{dt},$$

designando por φ'_t la derivada parcial de la función φ respecto a la variable de tiempo t y por φ'_μ su diferencial parcial respecto a la segunda variable.

Ahora bien, por ser la aplicación $\Phi_t : \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$ afín, su diferencial (respecto a la variable μ) es igual a su parte lineal, a la que, como de costumbre, designaremos por F_t . Se tiene pues

$$\varphi'_\mu(t, m(t)) = D\Phi_t = F_t,$$

o sea, cambiando de notaciones

$$\varphi'_\mu(t, m(t)) \cdot \frac{dm}{dt} = F_t \left(\frac{dm}{dt} \right).$$

Por otra parte, la aplicación $I \rightarrow \mathcal{E}$, $\tau \rightarrow \varphi(\tau, m(t))$ es la que define el movimiento del punto t -coincidente de $M(t)$. El vector $\varphi'_t(t, m(t))$ es pues igual a la velocidad de este movimiento en el instante t , y este es el vector al que hemos llamado velocidad de arrastre de M en el instante t , y hemos designado por $\vec{V}_e(t)$. La relación (7) se escribe pues

$$\frac{dM}{dt} = F_t \left(\frac{dm}{dt} \right) + \vec{V}_e(t);$$

de aquí deducimos, por comparación con (4),

$$\vec{V}_r(t) = F_t \left(\frac{dm}{dt} \right).$$

La velocidad relativa del movimiento de M en el instante t es pues la *imagen*, por la aplicación lineal $F_t = L(\Phi_t)$, de la velocidad del movimiento relativo en este instante.

● En otros términos, *la velocidad relativa de M en el instante t es la posición en \mathcal{E} de la velocidad del movimiento relativo de M en este instante.*

Observación. El movimiento relativo $t \mapsto m(t)$ depende esencialmente del «modelo» elegido para definir el espacio móvil \mathcal{S} ; queda solamente definido salvo una isometría.

Para dar una idea de lo que puede ser este movimiento relativo (que es ficticio) consideremos de nuevo el ejemplo del avión dado en el § 2. Si un cineasta quiere filmar una escena que se supone se desarrolla a bordo del avión en vuelo, construirá en sus estudios una maqueta del interior de un avión; en esta maqueta (inmóvil) hará representar a los actores la escena en cuestión: éstos realizan entonces *movimientos relativos* respecto al avión. Pero esta misma escena podría ser representada por otros actores en otra maqueta del avión: el movimiento relativo queda solamente definido salvo una isometría.

Los conceptos de movimiento relativo y de trayectoria relativa, aunque ficticios, son muy valiosos para el estudio de los sólidos en movimiento (véase el estudio de los axoides en el § 11, y del movimiento plano sobre plano en el § 12).

Derivada de una función vectorial

Volvamos a las notaciones del comienzo de este § y consideremos una función vectorial $\vec{W}: I \rightarrow E$ definida dando, en cada instante t , las componentes $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ del vector $\vec{W}(t)$ en la base $(\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$ de E . Se tiene entonces:

$$(\forall t \in I) \quad \vec{W}(t) = X(t) \vec{I}(t) + Y(t) \vec{J}(t) + Z(t) \vec{K}(t),$$

de donde, por derivación (si las funciones X, Y, Z son derivables),

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{W}'_e(t) + \vec{W}'_r(t),$$

con

$$\vec{W}'_r(t) = X'(t) \vec{I}(t) + Y'(t) \vec{J}(t) + Z'(t) \vec{K}(t)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{W}'_e(t) &= X(t) \frac{d\vec{I}}{dt} + Y(t) \frac{d\vec{J}}{dt} + Z(t) \frac{d\vec{K}}{dt} \\ &= \vec{\Omega}(t) \wedge (X(t) \vec{I}(t) + Y(t) \vec{J}(t) + Z(t) \vec{K}(t)) \end{aligned}$$

o sea

$$\vec{W}'_e(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{W}(t).$$

El vector $\vec{W}'_r(t)$ recibe el nombre de *derivada relativa* de la función vectorial \vec{W} en el instante t ; el vector $\vec{W}'_e(t)$ recibe el nombre de *derivada de arrastre* de esta función.

Si se considera el movimiento del espacio vectorial S asociado a \mathcal{S} , el vector $\vec{W}'_r(t)$ [resp. $\vec{W}'_e(t)$] no es sino la velocidad relativa [resp. de arrastre] en el instante t del movimiento puntual $t \mapsto \vec{W}(t)$.

Por esta razón, el vector $\vec{W}'(t) = d\vec{W}/dt$ se denomina a veces **derivada absoluta** de la función \vec{W} .

§ XII.10 MOVIMIENTO RELATIVO DE UN ESPACIO MÓVIL RESPECTO A OTRO

● En todo este §, designamos por $\mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ espacios afines euclídeos orientados de dimensión 3.

Movimiento compuesto

Designemos por I un intervalo de \mathbf{R} , por: $I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ una aplicación de clase C^2 que define un *movimiento de \mathcal{S} en \mathcal{E}* y por $\psi: I \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ una aplicación de clase C^2 que define un *movimiento de \mathcal{T} en \mathcal{S}* . Para cada $t \in I$, designemos por Φ_t la isometría de \mathcal{S} sobre \mathcal{E} definida por

$$(\forall \mu \in \mathcal{S}) \quad \Phi_t(\mu) = \varphi(t, \mu),$$

y sea Ψ_t la isometría de \mathcal{T} sobre \mathcal{S} definida por

$$(\forall \lambda \in \mathcal{T}) \quad \Psi_t(\lambda) = \psi(t, \lambda).$$

Entonces, la aplicación

$$(1) \quad \theta : I \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \lambda \mapsto \varphi(t, \psi(t, \lambda)) = \Phi_t \circ \Psi_t(\lambda)$$

define un movimiento de \mathcal{C} en \mathcal{E} , al que se le da el nombre de **compuesto** (o: *resultante*) de los movimientos dados.

En estas condiciones, el movimiento de \mathcal{S} en \mathcal{E} (definido por φ) recibe el nombre de *movimiento de arrastre*; el movimiento de \mathcal{C} en \mathcal{E} (definido por ψ) recibe el nombre de **movimiento relativo**. ||

● Para abreviar, designaremos por $\theta = \varphi \top \psi$ la aplicación definida por (1).

Si la isometría $\Psi_t : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ es independiente del tiempo, el espacio móvil \mathcal{C} se dice que es **fijo respecto a \mathcal{S}** o **ligado a \mathcal{S}** . Según el estudio hecho en el § 3, se ve que esto ocurre si, y solamente si, las aplicaciones φ y θ definen *el mismo movimiento*.

En otros términos, *dos espacios sólidos tienen el mismo movimiento si, y solamente si, el movimiento relativo de uno respecto al otro es la inmovilidad* (siendo esta relación evidentemente una relación de equivalencia).

Movimiento inverso

Sea

$$\varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu) = \Phi_t(\mu)$$

un movimiento de \mathcal{S} en \mathcal{E} y, para todo $t \in I$, designemos por $\Psi_t = \Phi_t^{-1}$ la isometría *recíproca* de Φ_t . El movimiento de \mathcal{E} en \mathcal{S} definido por la aplicación

$$\psi : I \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (t, M) \mapsto \Psi_t(M) = \Phi_t^{-1}(M)$$

recibe el nombre de **movimiento inverso** del movimiento definido por φ . Se ve inmediatamente que el compuesto de estos dos movimientos (tomados en un orden cualquiera) es la *inmovilidad*.

Campo de velocidades de un movimiento compuesto

Volvamos al caso general expuesto al comienzo de este §. El problema que nos proponemos, consiste en determinar el campo de velocidades del movimiento compuesto θ , conociendo el campo de velocidades del movimiento de arrastre φ , y el campo de velocidades del movimiento relativo ψ ; pero el campo de velocidades de ψ es un campo en \mathcal{E} , mientras que los campos de velocidades de φ y θ están definidos en \mathcal{E} . Esta comparación exige pues algunas precauciones.

Para cada $t \in I$, designaremos

- por $\vec{V}_{a,t}$ el campo de velocidades (llamadas **absolutas**) del movimiento compuesto definido por θ ;
- por $\vec{V}_{e,t}$ el campo de velocidades (llamadas **de arrastre**) del movimiento de arrastre definido por φ ;
- por \vec{W}_t el campo (definido en \mathcal{S}) de velocidades del *movimiento relativo* definido por ψ ; definiremos un campo $\vec{V}_{r,t}$ en \mathcal{E} asociando a cada punto M de \mathcal{S} , el vector $\vec{V}_{r,t}(M) = \Phi_t \circ W_t \circ \Phi_t^{-1}(M)$. El vector $\vec{V}_{r,t}(M)$ es la *posición en el instante t de la velocidad* del movimiento relativo del punto λ de \mathcal{T} definido por $\theta(t, \lambda) = M$ (punto t -coincidente de M en \mathcal{T}).

El campo $\vec{V}_{r,t}$ se denominará campo de **velocidades relativas**.

Los tres campos $\vec{V}_{a,t}$, $\vec{V}_{e,t}$ y $\vec{V}_{r,t}$ se hallan definidos en \mathcal{E} , y se tiene, por aplicación de los resultados del § anterior,

$$(2) \quad \boxed{(\forall t \in I) \quad \vec{V}_{a,t} = \vec{V}_{e,t} + \vec{V}_{r,t}}.$$

En efecto, si λ define un punto cualquiera de \mathcal{T} y si ponemos $M = \theta(t, \lambda)$, el vector $\vec{V}_{a,t}(M)$ no es sino la *velocidad absoluta* del movimiento

$$\theta_\lambda : t \mapsto \theta(t, \lambda);$$

el vector $\vec{V}_{r,t}(M)$ es la *velocidad relativa* de este movimiento respecto a \mathcal{S} y el vector $\vec{V}_{e,t}(M)$ es la *velocidad de arrastre* de este movimiento.

Extensión

Consideremos un número cualquiera $n \geq 2$ de espacios afines euclídeos de dimensión 3, sean éstos $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, y para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$, supongamos dado un movimiento de \mathcal{E}_i en \mathcal{E}_{i+1} mediante una aplicación

$$\varphi_i : I \times \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_{i+1}, (t, \mu) \mapsto \varphi_i(t, \mu) = \Phi_{i,t}(\mu).$$

El compuesto de estos movimientos es el movimiento de \mathcal{E}_1 en \mathcal{E}_n definido por la aplicación

$$\theta = \varphi_{n-1} \top \varphi_{n-2} \top \dots \top \varphi_1 : I \times \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_n, (t, \mu) \mapsto \Theta_t(\mu),$$

con,

$$\Theta_t = \Phi_{n-1,t} \circ \Phi_{n-2,t} \circ \dots \circ \Phi_{1,t},$$

para todo $t \in I$:

Para cada $i = 1, 2, \dots, n - 1$, designemos por $\vec{V}_{i,t}$ la posición en \mathcal{E}_n en el instante t , del campo de velocidades del movimiento de \mathcal{E}_i en \mathcal{E}_{i+1} definido por φ_i (es decir, la imagen de este campo por la parte lineal de la isometría

$$\Phi_{n-1,t} \circ \Phi_{n-2,t} \circ \dots \circ \Phi_{i+1,t}).$$

El campo \vec{V}_t de velocidades del movimiento compuesto viene entonces dado por

$$\vec{V}_t = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{V}_{i,t}.$$

De aquí resulta inmediatamente que la rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$ del movimiento compuesto θ es

$$(3) \quad \vec{\Omega}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\Omega}_i(t),$$

designando por $\vec{\Omega}_{i,t}$ la posición en \mathcal{E}_n , en el instante t , de la rotación instantánea del movimiento de \mathcal{E}_i en \mathcal{E}_{i+1} .

La relación (3) resulta a veces muy cómoda para determinar la rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$ de un movimiento, pues basta considerar este movimiento como el compuesto de movimientos simples.

● En la práctica, la determinación de los vectores $\vec{\Omega}_i(t)$ no presenta dificultad, aunque su definición sea aparentemente complicada; ya que, en general, todos estos movimientos quedan definidos al dar para cada $i = 1, 2, \dots, n - 1$, un sistema de referencia móvil ρ_i de \mathcal{E}_n ligado a \mathcal{E}_i . Para determinar el vector $\vec{\Omega}_i(t)$, basta pues conocer las componentes, en el sistema de referencia $\rho_{i+1}(t)$, de la rotación instantánea del movimiento de ρ_i respecto a ρ_{i+1} , lo cual es fácil.

Estudio de un ejemplo

Problema: Sea $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal directo fijo de \mathcal{E} . Se define un sistema de referencia móvil ortonormal $\rho = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dependiente del parámetro real t por medio de las relaciones siguientes que definen dos bases ortonormales móviles intermedias $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ y $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t, & \vec{v} &= -\vec{i} \sin t + \vec{j} \cos t, & \vec{w} &= \vec{k} \\ \vec{u}_1 &= \vec{u}, & \vec{v}_1 &= \vec{v} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta, & \vec{w}_1 &= -\vec{v} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \\ \vec{OA} &= a\vec{u}, & \vec{I} &= \vec{u}_1 \cos \varphi + \vec{v}_1 \sin \varphi, & \vec{J} &= -\vec{u}_1 \sin \varphi + \vec{v}_1 \cos \varphi, & \vec{K} &= \vec{w}_1. \end{aligned}$$

En estas relaciones, a designa una constante y θ, φ dos funciones de clase C^2 de la variable t .

Se pide expresar la rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$ del sistema de referencia $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ en cada uno de los cuatro sistemas de referencia y después determinar el eje instantáneo Δ_t en el sistema fijo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ y en el sistema de referencia móvil $(A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

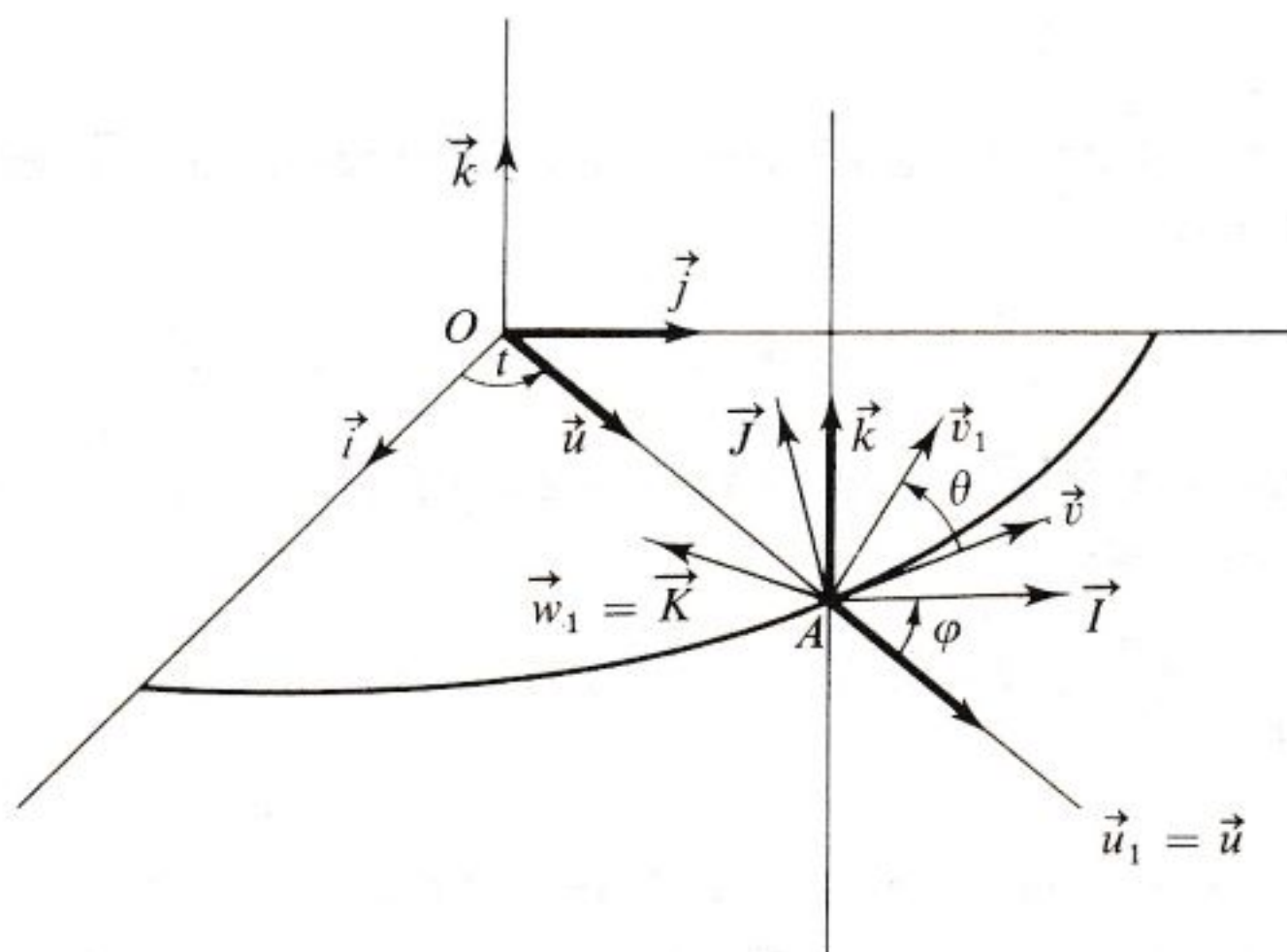


Figura 3.

Solución.

Designemos por σ y σ_1 los sistemas de referencia móviles intermedios definidos por

$$\sigma = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \quad \sigma_1 = (A; \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1).$$

- La rotación del movimiento de σ respecto a \mathcal{R} es el vector \vec{k} .
- La rotación del movimiento de σ_1 respecto a σ es el vector $\theta'(t) \vec{u}$.
- La rotación del movimiento ρ respecto a σ_1 es el vector $\varphi'(t) \vec{K}$.

La rotación del movimiento de ρ respecto a \mathcal{R} es pues el vector

$$\vec{\Omega}(t) = \vec{k} + \theta'(t) \vec{u} + \varphi'(t) \vec{K}.$$

(Se podría encontrar de nuevo la expresión de $\vec{\Omega}$ considerando momentáneamente las variables t, θ, φ como independientes y aplicando el principio de la suma de vectores rotaciones dado en el § X.6.)

Utilizando $\vec{k} = \sin \theta \vec{v}_1 + \cos \theta \vec{K}$, se deduce en primer lugar

$$(1) \quad \vec{\Omega} = \theta' \vec{u}_1 + \sin \theta \vec{v}_1 + (\varphi' + \cos \theta) \vec{w}_1.$$

Seguidamente, de $\vec{u} = \vec{I} \cos \varphi - \vec{J} \sin \varphi$ y $\vec{v}_1 = \vec{I} \sin \varphi + \vec{J} \cos \varphi$, se deduce

$$(2) \quad \vec{\Omega} = (\theta' \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \vec{I} + (\sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi) \vec{J} + (\varphi' + \cos \theta) \vec{K}.$$

De $\vec{K} = -\vec{v} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta$, se obtiene inmediatamente la expresión de $\vec{\Omega}$ en la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, que es:

$$(3) \quad \vec{\Omega} = \theta' \vec{u} - \varphi' \sin \theta \vec{v} + (1 + \varphi' \cos \theta) \vec{w}.$$

Finalmente, la expresión de \vec{u} y \vec{v} en función de \vec{i} y \vec{j} proporciona la expresión de $\vec{\Omega}$ en la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, que es

$$(4) \quad \vec{\Omega} = (\theta' \cos t + \varphi' \sin \theta \sin t) \vec{i} + (\theta' \sin t - \varphi' \sin \theta \cos t) \vec{j} + (1 + \varphi' \cos \theta) \vec{k}.$$

b) Escribimos: $E = \|\vec{\Omega}\|^2 = \theta'^2 + \varphi'^2 + 2\varphi' \cos \theta + 1$.

Situémonos en un intervalo I de \mathbf{R} en el que E no se anule. Entonces, para cada $t \in I$, el eje instantáneo Δ_t queda definido paramétricamente por

$$\lambda \mapsto M_\lambda, \quad \text{donde} \quad \overrightarrow{AM_\lambda} = \lambda \vec{\Omega} + \frac{\vec{\Omega} \wedge \frac{dA}{dt}}{E}.$$

Se tiene

$$\frac{dA}{dt} = a\vec{v}, \quad \text{de donde} \quad \overrightarrow{AM_\lambda} = \lambda \vec{\Omega} + \frac{a\vec{\Omega} \wedge \vec{v}}{E}.$$

Un cálculo inmediato da: $\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -(1 + \varphi' \cos \theta) \vec{u} + \theta' \vec{k}$.

Parametrización de Δ_t en $(A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

Las componentes de $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ son, en este sistema de referencia,

$$-(1 + \varphi' \cos \theta) \cos \varphi + \theta' \sin \theta \sin \varphi,$$

$$(1 + \varphi' \cos \theta) \sin \varphi + \theta' \sin \theta \cos \varphi, \quad \theta' \cos \theta.$$

De donde resulta la parametrización de Δ_t :

$$X = \lambda(\theta' \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) + \frac{a}{E}(\theta' \sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi(1 + \varphi' \cos \theta))$$

$$Y = \lambda(-\theta' \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi) + \frac{a}{E}(\theta' \sin \theta \cos \varphi + (1 + \varphi' \cos \theta) \sin \varphi)$$

$$Z = \lambda(\varphi' + \cos \theta) + \frac{a}{E} \theta' \cos \theta.$$

Parametrización de Δ_t en $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Las componentes de Δ_t en este sistema de referencia son

$$-\cos t(1 + \varphi' \cos \theta), \quad -\sin t(1 + \varphi' \cos \theta), \quad \theta'.$$

Por otra parte

$$\overrightarrow{OM}_\lambda = \overrightarrow{AM}_\lambda + a(\vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t).$$

De donde resulta la parametrización de Δ_t :

$$x = a \cos t - \frac{a}{E} \cos t(1 + \varphi' \cos \theta) + \lambda(\theta' \cos t + \varphi' \sin \theta \sin t)$$

$$y = a \sin t - \frac{a}{E} \sin t(1 + \varphi' \cos \theta) + \lambda(\theta' \sin t - \varphi' \sin \theta \cos t)$$

$$z = \frac{a}{E} \theta' + \lambda(1 + \varphi' \cos \theta).$$

§ XII.11 AXOIDES

En todo este § suponemos dados dos espacios euclídeos *orientados* \mathcal{S} , \mathcal{E} de dimensión 3 y un movimiento de \mathcal{S} en \mathcal{E} , definido por la aplicación

$$\varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu) = \Phi_t(\mu).$$

Supondremos que la rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$ de este movimiento no se anula nunca; designaremos por Δ_t el eje instantáneo de rotación y de deslizamiento de \mathcal{S} sobre \mathcal{E} en el instante t , que es una recta de \mathcal{E} , definida para cada $t \in I$.

Axoide absoluto

Designemos por $A : t \mapsto A(t)$ un movimiento puntual cualquiera ligado a \mathcal{S} . Entonces la recta Δ_t admite la parametrización

$$(1) \quad \lambda \mapsto P(t, \lambda) = A(t) + \lambda \vec{\Omega}(t) + \frac{1}{\|\vec{\Omega}(t)\|^2} \vec{\Omega}(t) \wedge \frac{dA}{dt} \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

La hoja reglada \mathcal{A} de \mathcal{E} definida por la parametrización

$$(2) \quad P : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (u, \lambda) \mapsto P(u, \lambda)$$

recibe el nombre de **axoide absoluto** del movimiento de \mathcal{S} sobre \mathcal{E} . Intuitivamente, es la superficie de \mathcal{E} engendrada por el eje instantáneo Δ_t cuando t varía en I .

Esta hoja no depende evidentemente de la elección del movimiento puntual A ligado a \mathcal{S} ; la sustitución del movimiento puntual A por otro movimiento puntual B ligado a \mathcal{S} equivaldría a hacer el cambio de parámetros $(u, \lambda) \mapsto (u, \lambda')$ definido por

$$\lambda' = \lambda + \frac{\vec{\Omega}(u) \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\vec{\Omega}(u)\|^2}.$$

Axoide relativo

Por hipótesis, para cada $t \in I$, la aplicación

$$\Phi_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \mu \mapsto \varphi(t, \mu)$$

es una isometría. Designemos por $\delta_t = \Phi_t^{-1}(\Delta_t)$ la imagen recíproca de Δ_t en esta isometría; δ_t es una recta de \mathcal{S} definida por la parametrización

$$\lambda \mapsto \Phi_t^{-1}(P(t, \lambda)) \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Al variar t , esta recta engendra en \mathcal{S} una hoja reglada Σ , que llamaremos *superficie intermedia*, definida por la parametrización

$$(3) \quad g : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{S} \quad (u, \lambda) \mapsto \Phi_u^{-1}(P(u, \lambda)).$$

Finalmente, para cada $t \in I$, la imagen de Σ por la isometría Φ_t es una hoja reglada de \mathcal{E} , que designaremos por Σ_t y que recibe el nombre de **axoide relativo** en el instante t .

Para cada par $(t, u) \in I \times I$, sigamos designando por $D_{u,t}$ el *desplazamiento* de \mathcal{E} definido por $D_{u,t} = \Phi_t \circ \Phi_u^{-1}$. Se ve entonces que el *axoide relativo en el instante t* se halla definido por la parametrización

$$(4) \quad Q_t : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, (u, \lambda) \mapsto \Phi_t \circ \Phi_u^{-1}(P(u, \lambda)) = D_{u,t}(P(u, \lambda)).$$

Para todos los instantes $t_0, t \in I$, se ve inmediatamente que el axoide Σ_t se deduce de Σ_{t_0} por el movimiento $D_{t_0,t}$ (puesto que se tiene: $D_{u,t} = D_{t_0,t} \circ D_{u,t_0}$).

Desde un punto de vista físico, se puede considerar la superficie Σ como un sólido ligado a \mathcal{S} ; Σ_t es la posición de este sólido en el instante t : es por otra parte por la realización material de \mathcal{A} y de Σ que se realiza efectivamente el movimiento de \mathcal{S} en \mathcal{E} : un estudio cinemático más profundo permite establecer que Σ rueda y se desliza sin pivotar sobre \mathcal{A} : es la teoría de los engranajes.

Posición relativa de los axoides absoluto y relativo

El *axoide absoluto* \mathcal{A} se halla definido por la parametrización

$$P : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, (t, \lambda) \mapsto P(t, \lambda)$$

definida por (1). La *superficie intermedia* Σ se halla definida por la parametrización $g : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que, para todos los $(u, \lambda) \in I \times \mathbf{R}$ se tiene

$$P(u, \lambda) = \Phi_u(g(u, \lambda));$$

el *axoide relativo* Σ_t en el instante t se halla definido por la parametrización

$$(4') \quad Q_t : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, (u, \lambda) \mapsto Q_t(u, \lambda) = \Phi_t(g(u, \lambda)).$$

Para $u = t$, se tiene pues

$$(\forall \lambda \in \mathbf{R}) \quad Q_t(t, \lambda) = P(t, \lambda);$$

ello demuestra que las hojas \mathcal{A} y Σ_t tienen en común la generatriz Δ_t .

Por otra parte, para cada $(u, \lambda) \in I \times \mathbf{R}$, el vector $\frac{\partial}{\partial u} Q_t(u, \lambda)$ se deduce del vector $g'_u(u, \lambda)$ por la aplicación lineal F_t (parte lineal de Φ_t). Es pues la posición, en el instante t , de la velocidad del movimiento relativo $u \mapsto g(u, \lambda)$; para $u = t$, este vector es igual a la *velocidad relativa* del movimiento puntual compuesto

$$t \mapsto P(t, \lambda) = \Phi_t(g(t, \lambda)):$$

la *velocidad absoluta* de este mismo movimiento en el instante t es el vector $\frac{\partial}{\partial t} P(t, \lambda)$, tangente al axoide absoluto en el punto $P(t, \lambda)$. Ahora bien la *velocidad de arrastre* del movimiento puntual $t \mapsto P(t, \lambda)$ en el instante t es el vector $\vec{V}_t(P(t, \lambda))$, el cual, por definición, es colineal con Δ_t (ya que $P(t, \lambda) \in \Delta_t$). Al ser el vector

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \lambda) - \left[\frac{\partial}{\partial u} Q_t(u, \lambda) \right]_{u=t} = \vec{V}_t(P(t, \lambda))$$

colineal con la generatriz Δ_t , podemos enunciar:

En todo punto de la generatriz Δ_t en que una de las hojas regladas \mathcal{A} o Σ_t admite un plano tangente, la otra admite también un plano tangente, y tales planos tangentes se confunden.

En efecto, el plano tangente a Σ_t [resp. \mathcal{A}] en el punto $Q_t(t, \lambda) = P(t, \lambda)$ es (si existe) el plano que pasa por Δ_t y es paralelo al vector $\frac{\partial}{\partial u} Q_t(u, \lambda)_{u=t}$ [resp. $\frac{\partial}{\partial t} P(t, \lambda)$].

Para abreviar, se dice que *los axoides \mathcal{A} y Σ_t son tangentes a lo largo de la generatriz Δ_t* ; pero no hay que olvidar que pueden existir puntos de Σ_t en que estas superficies no admitan plano tangente (por ejemplo, si son conos o superficies desarrollables).

Determinación práctica de los axoides

Destaquemos en primer lugar que las hojas axoides \mathcal{A} y Σ_t dependen solamente del *movimiento* definido por la aplicación φ y no del «modelo» elegido. En efecto, el eje instantáneo Δ_t depende sólo del movimiento de \mathcal{S} y permanece invariante cuando se sustituye \mathcal{S} por otro espacio móvil \mathcal{S}' ligado a \mathcal{S} . Por otra parte los desplazamientos $D_{t,u}$ sólo dependen ellos mismos del movimiento definido por φ (véase § 3). La fórmula (4) hace ver que Σ_t depende solamente del espacio móvil considerado.

En la práctica, el movimiento considerado se definirá dando un sistema de referencia móvil $\rho = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de \mathcal{E} ligado a \mathcal{S} . Para cada valor de $t \in I$, se determinan las componentes del vector $\vec{\Omega}(t)$ en el sistema de referencia móvil $\rho(t)$, y utilizando la relación (1) se deduce una parametrización de la recta Δ_t en este sistema de referencia. Esta parametrización es de la forma

$$(5) \quad \lambda \mapsto P(t, \lambda) = A(t) + f(t, \lambda) \vec{I}(t) + g(t, \lambda) \vec{J}(t) + h(t, \lambda) \vec{K}(t),$$

designando por f, g, h funciones numéricas de clase C^1 en $I \times \mathbb{R}$, afines respecto a la segunda variable λ .

Para tener el *axoide absoluto* \mathcal{A} , basta expresar las coordenadas del punto $P(t, \lambda)$ en un sistema de referencia fijo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} . Se obtiene así un sistema de ecuaciones paramétricas de \mathcal{A} ; al eliminar las variables t, λ entre estas ecuaciones se obtiene una *ecuación cartesiana* de \mathcal{A} (siempre que tal eliminación sea posible).

Para tener una parametrización del *axoide relativo* Σ_t en el sistema de referencia $\rho(t)$ basta observar que $D_{u,t}$ es la aplicación de \mathcal{E} en \mathcal{E} definida por

$$A(u) + x\vec{I}(u) + y\vec{J}(u) + z\vec{K}(u) \rightarrow A(t) + x\vec{I}(t) + y\vec{J}(t) + z\vec{K}(t).$$

El punto $Q_t(u, \lambda) = D_{u,t}(P(u, \lambda))$ se halla pues definido por

$$(6) \quad Q_t(u, \lambda) = A(t) + f(u, \lambda)\vec{I}(t) + g(u, \lambda)\vec{J}(t) + h(u, \lambda)\vec{K}(t).$$

Las ecuaciones paramétricas Σ_t en el sistema de referencia $\rho(t)$ son simplemente

$$(7) \quad X = f(u, \lambda) \quad Y = g(u, \lambda) \quad Z = h(u, \lambda) \quad (u \in I, \lambda \in \mathbf{R}).$$

Intuitivamente, se obtiene Σ_t «congelando» los valores de $A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ en el instante t y dando a las funciones f, g, h todos los valores posibles.

Al eliminar las variables λ y u entre las relaciones (7) se obtendrá (cuando sea posible la eliminación) una ecuación cartesiana de Σ_t en el sistema de referencia fijo $\rho(t)$.

Si se quisieran obtener las ecuaciones paramétricas de Σ_t en un sistema de referencia fijo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} , bastaría determinar las coordenadas del punto $Q_t(u, \lambda)$ en este sistema de referencia utilizando la relación (6).

§ XII.12 MOVIMIENTO DE PLANO SOBRE PLANO ⁽¹⁾

El caso de los «movimientos de plano sobre plano» es muy importante para las aplicaciones (teoría de engranajes). Vamos a dar aquí solamente algunas indicaciones con vistas a los ejercicios.

Definición XII.12.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sea } \mathcal{S} \text{ un espacio afín euclídeo de dimensión 3 y} \\ (1) \quad \varphi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \mu) \mapsto \varphi(t, \mu) = \Phi_t(\mu) \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Se podría establecer una teoría directa de los movimientos de espacios sólidos en dimensión 2. El punto de vista aquí adoptado permite utilizar los resultados obtenidos en dimensión 3.

} una aplicación que define un **espacio móvil**. Se dice que el movimiento de \mathcal{S} en \mathcal{E} definido por (1) es de **plano sobre plano** si existe un plano afín $\bar{\omega}$ de \mathcal{S} y un plano afín \mathcal{P} de \mathcal{E} tales que en cada instante $t \in I$, se tenga $\Phi_t(\bar{\omega}) = \mathcal{P}$.

Si estas condiciones se cumplen se dice también que el plano $\bar{\omega}$ se desliza sobre \mathcal{P} .

Observación. Sea \mathcal{T} otro espacio afín euclídeo de dimensión 3 y sea $\theta : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ una isometría fija. Se ve inmediatamente que el movimiento de \mathcal{T} en \mathcal{E} definido por la aplicación

$$\psi : I \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (t, \lambda) \mapsto \Phi_t \circ \theta(\lambda) = \varphi(t, \theta(\lambda)),$$

es también un movimiento de *plano sobre plano*, y que existe un plano afín π de \mathcal{T} que se desliza sobre \mathcal{P} . Podemos pues enunciar:

Si dos espacios móviles \mathcal{S} , \mathcal{T} están ligados y si el movimiento de \mathcal{S} en \mathcal{E} es de plano sobre plano, ocurre lo mismo con el movimiento de \mathcal{T} en \mathcal{E} .

En otros términos, el concepto de «movimiento de plano sobre plano» no depende del modelo elegido para definir el movimiento.

Propiedades geométricas

Mantengamos las notaciones de la definición XII.12.1 y designemos siempre por $D_{t,u}$ el *desplazamiento* de \mathcal{E} definido por $D_{t,u} = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}$. Se ve inmediatamente que los desplazamientos $D_{t,u}$ dejan al plano \mathcal{P} invariante; por continuidad (véase ejercicio 17), se deduce que son *traslaciones* de vector paralelo a \mathcal{P} , o *rotaciones* de eje perpendicular a \mathcal{P} . Estos desplazamientos dejan invariante a todo plano \mathcal{P}' paralelo a \mathcal{P} .

Si $\bar{\omega}'$ designa un plano de \mathcal{S} paralelo a $\bar{\omega}$, el plano $\Phi_t(\bar{\omega}')$ es paralelo a \mathcal{P} (ya que las imágenes de dos planos paralelos por una isometría son planos paralelos). Por otra parte, el plano $\Phi_u(\bar{\omega}')$ se deduce de $\Phi_t(\bar{\omega}')$ por el desplazamiento $D_{t,u}$; se tiene pues $\Phi_u(\bar{\omega}') = \Phi_t(\bar{\omega}')$ para todos los $u, t \in I$. En otros términos, *la imagen por Φ_t de un plano cualquiera $\bar{\omega}'$ paralelo a $\bar{\omega}$ es un plano \mathcal{P}' paralelo a \mathcal{P} e independiente de t .*

Todos los planos ligados a \mathcal{S} y paralelos a $\bar{\omega}$ se deslizan sobre planos fijos de \mathcal{E} paralelos a \mathcal{P} .

En consecuencia, *las trayectorias de los movimientos puntuales ligados a \mathcal{S} son planas y están contenidas en planos fijos paralelos a \mathcal{P} .*

Propiedades cinemáticas. Centro instantáneo de rotación

En lo que sigue, se supondrá al espacio \mathcal{E} *orientado*.

XII.12.1 En un movimiento de plano sobre plano, el campo de velocidades es, en cada instante, un **torsor elemental**; con las notaciones anteriores, su vector rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$ es **nulo u ortogonal a \mathcal{P}** .

Demostración. Designemos por $\Phi_\mu : t \mapsto (t, \mu)$ un movimiento puntual cualquiera ligado a \mathcal{S} . Al estar su trayectoria contenida en un plano paralelo a \mathcal{P} , su velocidad en cada instante es nula o paralela a \mathcal{P} . Si se designa por \vec{k} un vector fijo ortogonal a \mathcal{P} , se ve que el campo de velocidades en cada instante t , verifica

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad \vec{V}_t(M) \cdot \vec{k} = 0.$$

Según el estudio hecho en la página 293, se deduce que el torsor \vec{V}_t es *elemental*; si no es un par, su vector $\vec{\Omega}(t)$ es paralelo a \vec{k} , de donde el resultado.]

Colorario 1

En cada instante t en que su rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$ es **no nula**, el campo de velocidades de un movimiento de plano sobre plano es de la forma

$$(2) \quad M \mapsto \vec{V}_t(M) = \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{AM},$$

donde A designa un punto cualquiera de su **eje central** Δ_t .

En efecto, si $\vec{\Omega}(t) \neq 0$, el torsor \vec{V}_t es un deslizante, de vector resultante $\vec{\Omega}(t)$.]

Colorario 2

En cada instante t , el movimiento elemental tangente a un movimiento de plano sobre plano es una **traslación** (eventualmente, la inmovilidad) o una **rotación de eje Δ_t perpendicular a \mathcal{P}** .

Por esta razón, la recta Δ_t (cuando existe) será llamada simplemente *eje instantáneo de rotación* del movimiento.

En cada instante t en que se tenga $\vec{\Omega}(t) \neq 0$, la recta Δ_t corta al plano \mathcal{P} en un punto I_t que es el único punto M de \mathcal{P} que verifica $\vec{V}_t(M) = 0$. Este punto I_t recibe el nombre de **centro instantáneo de rotación** del movimiento de $\bar{\omega}$ en \mathcal{P} .

De un modo más general, si $\bar{\omega}'$ es un plano fijo de \mathcal{S} paralelo a $\bar{\omega}$ y deslizante sobre el plano \mathcal{P}' de \mathcal{E} , el centro instantáneo de rotación del movimiento de ω en \mathcal{P}' es el punto de intersección I_t de Δ_t con \mathcal{P}' . El eje instantáneo de rotación

Δ_t es pues el lugar de los centros instantáneos de rotación de los movimientos de los planos paralelos a ϖ .

Determinación de un movimiento de plano sobre plano mediante un sistema de referencia móvil

Consideremos el movimiento de plano sobre plano de la definición XII.12.1 y tomemos un sistema de referencia ortonormal $(\alpha; \vec{u}, \vec{v})$ de ϖ . Completémoslo en un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = (\alpha; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de \mathcal{S} (véase la figura 4); para todo $t \in I$, sea $\rho(t) = (A(t); \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)) = \Phi_t(\mathcal{R})$ el sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E} definido por $A(t) = \varphi(t, \alpha) = \Phi_t(\alpha)$, $\vec{I}(t) = F_t(\vec{u})$, $\vec{J}(t) = F_t(\vec{v})$, $\vec{K}(t) = F_t(\vec{w})$, designando por F_t la parte lineal de Φ_t . La aplicación $t \mapsto \rho(t)$ define un sistema de referencia ortonormal móvil de \mathcal{E} ligado a \mathcal{S} ; para cada $t \in I$ el vector $\vec{K}(t)$ es unitario y ortogonal a \mathcal{P} . La función continua $t \mapsto \vec{K}(t)$ es pues constante, o sea $\vec{K}(t) = \vec{k}$, y con esto queda reducido todo al estudio del sistema de referencia móvil ortonormal $(A; \vec{I}, \vec{J})$ del plano \mathcal{P} .

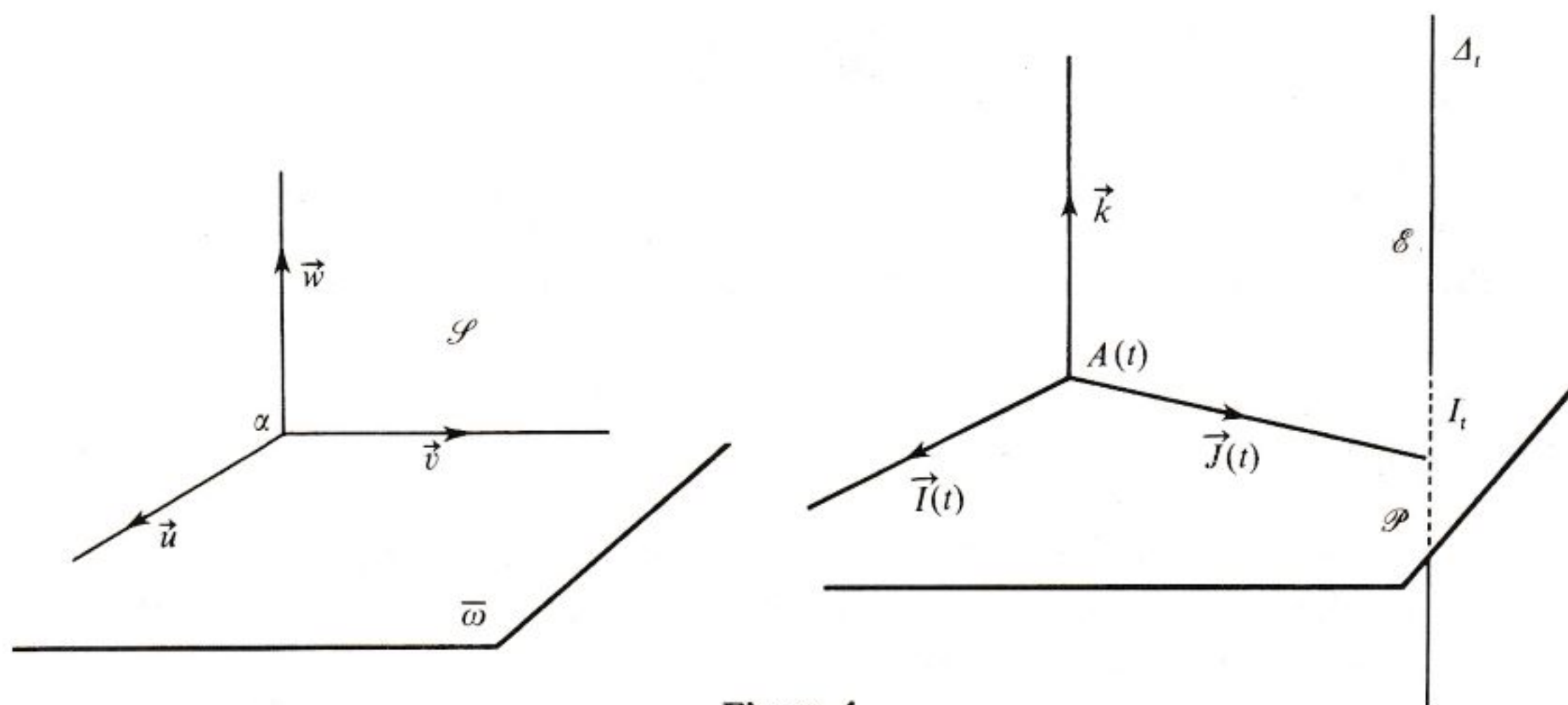


Figura 4.

A la inversa, supongamos dado un sistema de referencia ortonormal móvil $(A; \vec{I}, \vec{J})$ de \mathcal{P} , de clase C^2 en I . Lo podemos completar de dos maneras en un sistema de referencia ortonormal móvil $\rho = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ de \mathcal{E} por medio de un vector unitario fijo \vec{k} ortogonal a \mathcal{P} . Se pasa de uno de estos sistemas de referencia móviles al otro cambiando \vec{k} por $-\vec{k}$; estos dos sistemas de referencia están *ligados* y definen por lo tanto el mismo movimiento de espacio sólido, y se ve fácil-

mente que este movimiento es de *plano sobre plano*. Para tener una representación del mismo basta con elegir en \mathcal{S} un sistema de referencia ortonormal fijo cualquiera $\mathcal{R} = (\alpha; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ y poner

$$(\forall t \in I, \forall \mu \in \mathcal{S}) \quad \varphi(t, \mu) = \Phi_t(\mu),$$

designando por Φ_t la isometría de \mathcal{S} en \mathcal{E} que lleva a \mathcal{R} sobre $\rho(t)$ el plano $\omega = (\alpha; \vec{v}, \vec{w})$ de \mathcal{S} verifica entonces $\Phi_t(\omega) = \mathcal{P}$ para todo $t \in I$.

● Vamos a interesarnos ahora únicamente por el movimiento de ϖ en \mathcal{P} ; supondremos conocido un *sistema de referencia móvil ortonormal* $(A; \vec{I}, \vec{J})$ de \mathcal{P} ligado a ϖ .

Determinación del centro instantáneo de rotación

Una vez dado el sistema de referencia ortonormal móvil $(A; \vec{I}, \vec{J})$, podemos elegir siempre el vector unitario \vec{k} , ortogonal a \mathcal{P} , de modo que el sistema de referencia móvil $(A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ de \mathcal{E} sea *directo*.

Tomemos seguidamente un sistema de referencia ortonormal fijo $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{P} tal que el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sea directo. Si el sistema de referencia móvil dado es de clase C^2 , sabemos (véase p. 635) que existe entonces una función numérica θ , de clase C^2 en I , que verifica

$$(3) \quad (\forall t \in I) \quad \vec{I}(t) = \vec{i} \cos \theta(t) + \vec{j} \sin \theta(t), \quad \vec{J}(t) = -\vec{i} \sin \theta(t) + \vec{j} \cos \theta(t).$$

Si el plano \mathcal{P} está orientado de modo que el sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sea directo, la relación (3) equivale a

$$(\forall t \in I) \quad (\vec{i}, \vec{I}(t)) = \theta(t) \pmod{2\pi}.$$

Se tiene entonces

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \theta'(t) \vec{J}(t) = \theta'(t) \vec{k} \wedge \vec{I}(t); \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = -\theta'(t) \vec{I}(t) = \theta'(t) \vec{k} \wedge \vec{J}(t);$$

de donde se obtiene el vector **rotación instantánea**:

$$(4) \quad \boxed{\vec{\Omega}(t) = \theta'(t) \vec{k}}$$

El número $\omega(t) = \theta'(t)$ recibe el nombre de **velocidad angular** (en el instante t) del movimiento de ϖ sobre \mathcal{P} .

Para que el **centro instantáneo de rotación** I_t exista, es necesario y suficiente que se tenga $\theta'(t) \neq 0$; es entonces el único punto de \mathcal{P} en que el campo de velocidades se anula. Está definido pues por la condición

$$(5) \quad \frac{dA}{dt} + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{A(t)I_t} = 0.$$

Pongamos

$$\frac{dA}{dt} = \xi(t) \vec{I}(t) + \eta(t) \vec{J}(t)$$

y designemos por $X(t), Y(t)$ las coordenadas del punto I_t en el sistema de referencia

$$(A(t); \vec{I}(t), \vec{J}(t));$$

teniendo en cuenta (4), la relación (5) equivale entonces a

$$\xi(t) - \theta'(t) Y(t) = 0 \quad \eta(t) + \theta'(t) X(t) = 0,$$

de donde

$$I_t = A_t + \frac{1}{\theta'(t)} (-\eta(t) \vec{I}(t) + \xi(t) \vec{J}(t))$$

Base y rodante

Supongamos que se tenga $\theta'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La aplicación $I \rightarrow \mathcal{P}$, $t \mapsto I_t$ define entonces un arco geométrico \mathcal{B} de clase C^1 que recibe el nombre de **base** del movimiento considerado.

Si el movimiento se realiza por medio de la aplicación φ de la definición XII.12.1, la aplicación

$$g : I \rightarrow \overline{\omega}, \quad u \mapsto \Phi_u^{-1}(I_u)$$

define un arco geométrico γ de clase C^1 del plano $\overline{\omega}$, que no es sino la *trayectoria relativa* del punto I_t .

Finalmente, para cada $t \in I$, la imagen $\mathcal{R}_t = \Phi_t(\gamma)$ de γ por la isometría Φ_t es un arco de \mathcal{P} denominado **rodante** (en el instante t) del movimiento considerado. Este arco \mathcal{R}_t se halla definido por la parametrización

$$h_t : I \rightarrow \mathcal{P}, \quad u \mapsto \Phi_t \circ \Phi_u^{-1}(I_u) = D_{t,u}(I_u).$$

Esta parametrización muestra que la rodante, lo mismo que la base, no dependen del modelo elegido para definir el movimiento.

En cada instante t , la base \mathcal{B} y la rodante \mathcal{R}_t tienen en común el punto I_t . Vamos a ver que estos arcos son, en general *tangentes* en el punto I_t .

Para cada $u \in I$, el vector $\frac{d}{du} h_t(u)$ se deduce de $g'(u)$ por la aplicación lineal F_t (parte lineal de Φ_t). Para $u = t$, el vector $\frac{d}{du} (h_t(u))$ es pues la posición, en el instante t , del vector $g'(t)$; en otros términos, es la *velocidad relativa* $\vec{V}_r(t)$ del movimiento puntual $t \mapsto \Phi_t(g(t)) = I_t$; el vector $\frac{d}{dt} (I_t)$ es igual a la *velocidad absoluta* de este mismo movimiento, o sea

$$\vec{V}_a(t) = \vec{V}_r(t) + \vec{V}_e(t), \text{ donde } \vec{V}_e(t) = \vec{V}_t(I_t)$$

designa la *velocidad de arrastre* del punto I_t . Pero, por definición de I_t , se tiene $\vec{V}_t(I_t) = 0$, de donde

$$(6) \quad \left[\frac{d}{du} (h_t(u)) \right]_{u=t} = F_t(g'(t)) = \frac{dI_t}{dt}.$$

Si el vector $\frac{dI_t}{dt}$ es no nulo, esta relación prueba que la rodante \mathcal{R}_t y la base \mathcal{B} son *tangentes en el punto* I_t .

Además, al ser F_t una isometría vectorial, se tiene, para todo $t \in I$:

$$(7) \quad \left\| \frac{d}{dt} (I_t) \right\| = \| g'(t) \|.$$

Orientemos los arcos \mathcal{B} y γ en el sentido de las t *crecientes* y fijemos un punto t_0 de I . De la relación (7) se deduce que la abscisa curvilínea de I_t en \mathcal{B} , contada a partir del punto I_{t_0} , es igual a la abscisa curvilínea σ del punto $g(t)$ sobre γ contada a partir del punto $g(t_0)$. Pero, puesto que \mathcal{R}_t se deduce de \mathcal{R} por la isometría Φ_t , σ es también la abscisa curvilínea del punto $I_t = \Phi_t(g(t))$ sobre el arco \mathcal{R}_t , contada a partir del punto

$$I'_{t_0} = \Phi_t(g(t_0)) = h_t(t_0).$$

Se tiene pues, en cada instante t , la igualdad $\overline{I_{t_0} I_t} = \overline{I'_{t_0} I_t}$; se traduce este hecho diciendo que la rodante \mathcal{R}_t rueda sin deslizamiento sobre la base \mathcal{B} (véase la figura 5).

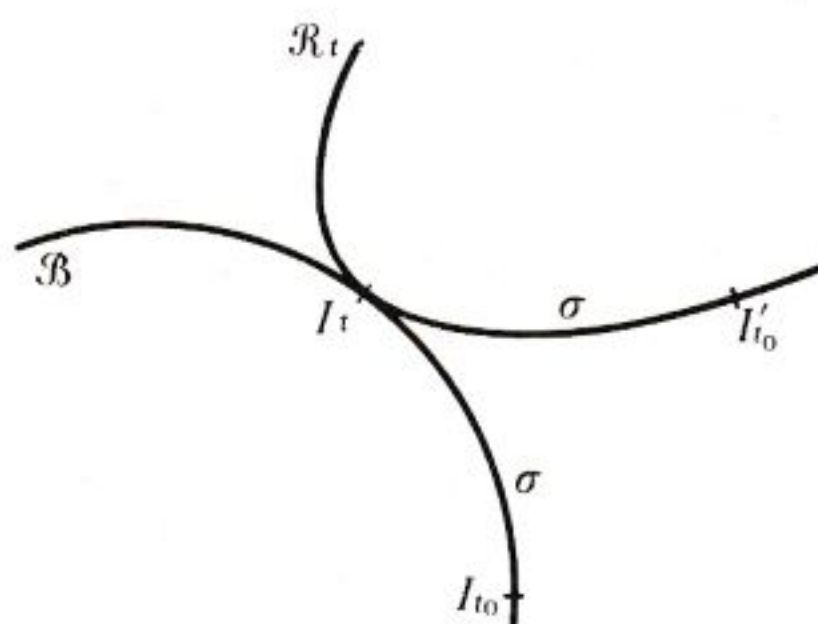


Figura 5.

Observación. Refiriéndonos al § 11, se ve que el *axoide absoluto* del movimiento considerado es el cilindro que admite a \mathcal{B} como sección recta; de igual modo el *axoide relativo* en el instante t es el cilindro que admite a la rodante \mathcal{R}_t como sección recta. Se verifica en este caso que los axoides son tangentes a lo largo del eje instantáneo Δ_t .

En la práctica, se realiza un movimiento de plano sobre plano mediante engranajes que materializan la base \mathcal{B} y el arco λ ; se hace rodar a λ sobre $\mathcal{B} : \mathcal{R}_t$ es la posición del engranaje γ en el instante t .

Ejemplos

1. Supongamos que la base \mathcal{B} sea una circunferencia de centro O y de radio R , y que la rodante \mathcal{R}_t sea una circunferencia de centro A_t y de radio r tangente exteriormente a \mathcal{B} (véase la figura 6). Designemos por $\varphi(t)$ la determinación continua del ángulo $(\overrightarrow{OI_{t_0}}, \overrightarrow{OI_t})$ que se anula para $t = t_0$, y por $\psi(t)$ la determinación continua del ángulo $(\overrightarrow{A_t I'_{t_0}}, \overrightarrow{A_t I_t})$ que se anula para $t = t_0$. Se tiene

$$\sigma = R\varphi(t) = -2\psi(t);$$

el ángulo del vector $\overrightarrow{A_t I'_{t_0}}$ (ligado al plano móvil ω) con el vector fijo $\overrightarrow{OI_{t_0}}$ es igual a $\theta(t) \pmod{2\pi}$, con $\theta(t) = \varphi(t) - \psi(t) + \pi$.

El caso del movimiento **epicicloidal** (estudiado en el § VII.6) es aquél en que se tiene $\varphi'(t) = \text{Cte} = \omega$, de donde $\psi'(t) = -\frac{R}{r}\omega$ y $\theta'(t) = 1 + \frac{R}{r}\omega$. El punto I'_{t_0} describe entonces una *epicicloide* que admite a I_{t_0} como punto de retroceso.

Del mismo modo se estudiaría el caso de un movimiento **hipocicloidal** (caso en que la rodante es un círculo interior a la circunferencia de base \mathcal{B}).

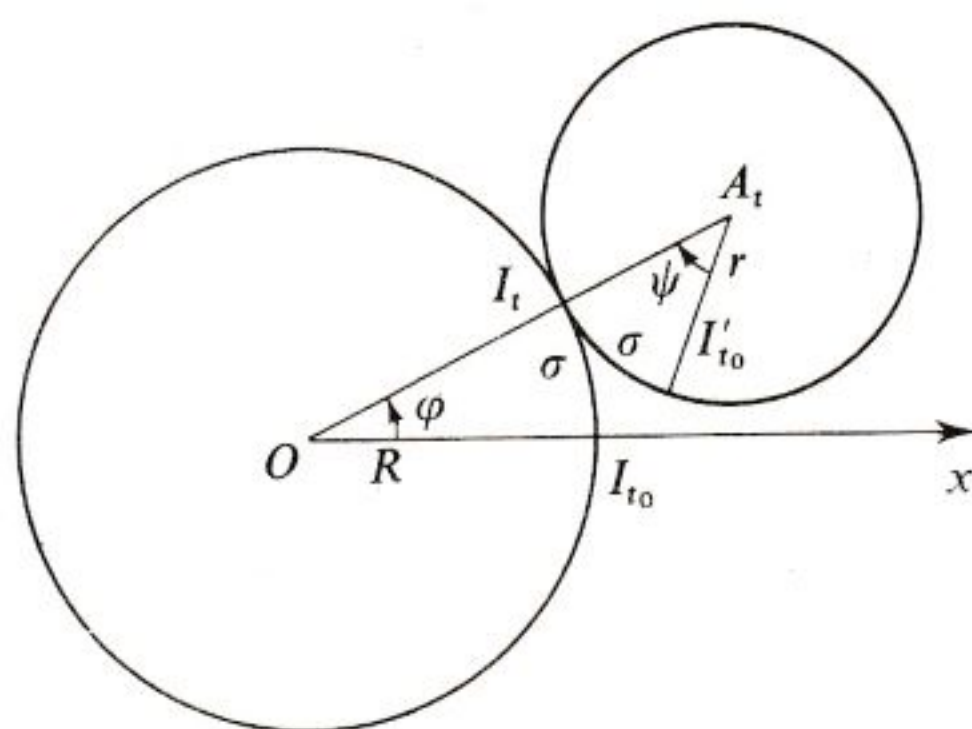


Figura 6.

2. Supongamos que la base \mathcal{B} sea una recta, que tomamos como eje de las x , con el punto I_{t_0} como origen. Si la rodante \mathcal{R}_t es una circunferencia de radio r y de centro A_t (véase la figura 7), designemos por $\psi(t)$ la determinación continua del ángulo $(\overrightarrow{A_t I'_{t_0}}, \overrightarrow{A_t I_t})$ que se anula para $t = t_0$.

Se tiene aquí $\sigma = \overline{I_{t_0} I_t} = -r\psi(t)$; la velocidad angular del movimiento es $-\psi'(t)$. Si esta velocidad angular es constante, se tiene un movimiento **cicloidal**. El punto I'_{t_0} describe entonces una *cicloide recta* que tiene a I_{t_0} como punto de retroceso.

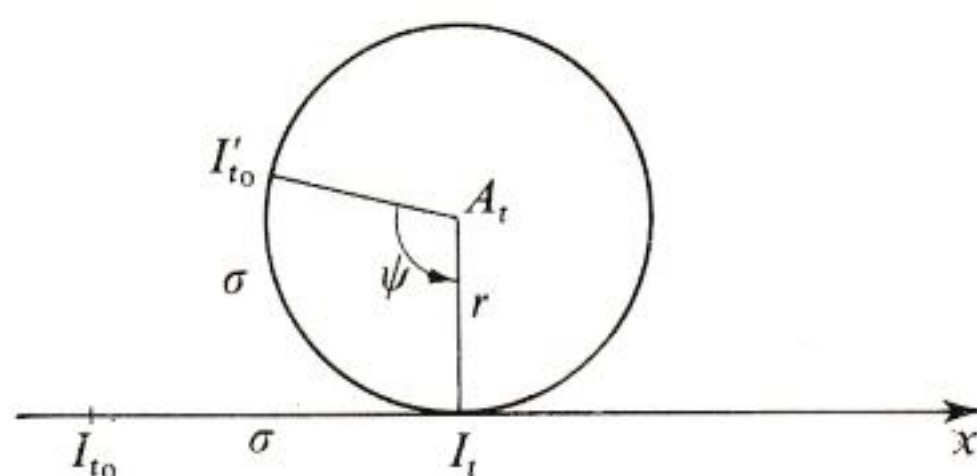


Figura 7.

Ejercicios⁽¹⁾

La resolución de algunos de los ejercicios propuestos a continuación requiere la integración de ecuaciones diferenciales elementales. Las técnicas corrientes de integración se exponen en el tomo 4, capítulos I a III.

CAPÍTULO I

1. (Existencia de subespacios suplementarios)

Sea K un cuerpo conmutativo cualquiera.

Se designa por E un K -espacio vectorial y por X un subespacio vectorial de E distinto de E . Sea \mathcal{F} el conjunto de los subespacios vectoriales L de E tales que $L \cap X = \{0\}$. Se considera en \mathcal{F} la relación de orden parcial definida por la inclusión $L \subset M$.

a) Demostrar que toda parte totalmente ordenada de \mathcal{F} admite una cota superior (véase tomo 1, páp. 33).

b) Demostrar que todo elemento maximal de \mathcal{F} es un subespacio suplementario de X (véase tomo 1, p. 35).

c) La existencia de un subespacio suplementario de X resulta entonces del axioma de Zorn: si \mathcal{F} es un conjunto ordenado tal que toda parte totalmente ordenada de \mathcal{F} admite una cota superior, entonces \mathcal{F} admite por lo menos un elemento maximal, véase [...].

Complementos sobre espacios vectoriales. Grupo lineal

En los ejercicios 2 a 19 que siguen, E designa un K -espacio vectorial de dimensión finita n , donde K es un cuerpo conmutativo cualquiera.

(¹) Las cuestiones difíciles se señalan por un *. La abreviatura G.E. significa «grandes écoles». (N. del T.: equivalentes en España a las Escuelas Superiores de Ingeniería o de Arquitectura.)

2. El grupo $GL_K(E)$ ¿es un sistema generador del espacio vectorial $\mathcal{L}_K(E)$? Estudiar el caso en que el cuerpo K es finito.

3. Se supone a K finito. Sea $(H_i)_{i \in I}$ una familia de hiperplanos de E , tal que

$$\bigcup_{i \in I} H_i = E$$

Demostrar que $\text{card}(I) \geq 1 + \text{card}(K)$.

4. Se supone $n = 2$ y $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Demostrar que el grupo $GL_K(E)$ es isomorfo con \mathfrak{S}_3 .

5. Se supone $n = 2$ y $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

a) Demostrar que $\text{card}(GL_K(E)) = 48$ y que E contiene 4 rectas vectoriales. Se designará por Δ el conjunto de estas rectas.

b) A cada $u \in GL_K(E)$ se asocia el elemento $\varphi(u)$ de \mathfrak{S}_Δ igual a la permutación de Δ inducida por u .

Demostrar que φ es un homomorfismo de grupos suprayectivo y determinar $\text{Ker}(\varphi)$. Se pondrá $H = \text{Ker}(\varphi)$.

c) Demostrar que H es un subgrupo distinguido de $SL_K(E)$ y que el cociente $SL_K(E)/H$ es isomorfo al subgrupo *alterno* de \mathfrak{S}_Δ .

d) Demostrar que \mathfrak{S}_4 no contiene ningún subgrupo distinguido de cardinal 2 y deducir de ahí que $SL_K(E)$ no es isomorfo con \mathfrak{S}_4 .

e) Demostrar que $SL_K(E)$ es el único subgrupo de índice 2 de $GL_K(E)$.

6. Se supone $n \geq 2$. Demostrar que dos transvecciones τ_1 y τ_2 cualesquiera son conjugadas en $GL_K(E)$, (es decir son tales que existe un $\sigma \in GL_K(E)$ con $\tau_2 = \sigma \tau_1 \sigma^{-1}$).

7. Se supone $n \geq 2$. Hallar una condición necesaria y suficiente para que dos dilataciones δ_1, δ_2 sean conjugadas en $GL_K(E)$ (véase el ejercicio anterior).

8. Se supone a K finito, de cardinal q y $n \geq 2$.

¿Cuántas transvecciones y cuántas dilataciones hay en $GL_K(E)$?

9. Se supone a K de característica nula y se designa por p_1, p_2, \dots, p_m , proyecciones en E , tales que

$$(1) \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = \text{Id}_E.$$

Para todo i ($1 \leq i \leq m$) se designa por d_i la dimensión de $\text{Im}(p_i)$.

a) Calcular $\sum_{i=1}^n d_i$ (se podrá calcular la traza de cada miembro en (1)).

b) Deducir de aquí que las p_i conmutan dos a dos y que E es suma directa interna de las $\text{Im}(p_i)$. (Finalmente, las p_i son los proyectores naturales asociados a esta suma directa.)

10. Se supone K infinito. Demostrar que para todo $u \in \mathcal{L}_K(E)$, existe $v \in GL_K(E)$ y $w \in GL_K(E)$ tales que $u = v - w$.

*11. Se supone K finito y $n \geq 2$. Demostrar que la conclusión del ejercicio anterior sigue siendo válida. (Método posible: demostrar en primer lugar que existen $\alpha, \beta \in GL_K(E)$ tales que $\text{Id}_E = \alpha + \beta$. Seguidamente, sustituyendo u por $s_1 \circ u \circ s_2$, donde s_1 y s_2 han sido elegidos convenientemente en $GL_K(E)$ pasar al caso en que E es suma directa interna de $\text{Ker}(u)$ en $\text{Im}(u)$).

12. Sea $u \in \mathcal{L}_K(E)$. Demostrar que existe $v \in GL_K(E)$ tal que $u \circ v \circ u = u$ y que entonces $u \circ v$ y $v \circ u$ son proyectores.

13. Deducir del ejercicio anterior que si $u_1 \in \mathcal{L}_K(E)$ y $u_2 \in \mathcal{L}_K(E)$ los polinomios caracterís-

tivos $P_{u_2 u_1}(X)$ y $P_{u_1 u_2}(X)$ son iguales. (Método: demostrar en primer lugar que cuando uno de los u_i es invertible o cuando uno de los u_i es un proyector, el aserto se cumple.)

***14. (Generación de los grupos $SL_K(E)$ y $GL_K(E)$)**

Se designa por $M_n(K)$ la K -álgebra de las matrices cuadradas de orden n ($n \geq 2$) en K . Para todo $\lambda \in K$, se designa por D_λ la matriz diagonal:

$$D_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Las matrices de la base canónica de $M_n(K)$ se designan por $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. (E_{ij} es pues la matriz $[a_{kl}]$ tal que $a_{ij} = 1$ y $a_{kl} = 0$ si $(k, l) \neq (i, j)$). Finalmente, para todo $A \in M_n(K)$ se designa por $C_i(A)$ las columnas de A y por $L_j(A)$ las filas de A .

a) Sea $i \neq j$ ($i \in \mathbf{N}_n^*, j \in \mathbf{N}_n^*$), sea $A \in M_n(K)$ y $\lambda \in K$. Demostrar que $A(I_n + \lambda E_{ij})$ se deduce de A sumando $\lambda C_i(A)$ a $C_j(A)$ y que $(I_n + \lambda E_{ij})A$ se deduce de A sumando $\lambda L_j(A)$ a $L_i(A)$.

b) Por recurrencia sobre n , deducir de aquí que si $A \in GL(n, K)$, A se puede poner en la forma

$$A = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \dots \mathcal{E}_k D_\lambda \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 \dots \mathcal{F}_l$$

donde las \mathcal{E}_i y las \mathcal{F}_j son matrices de la forma

$$I_n + \mu E_{ij} \quad (\mu \in K, i \neq j) \quad \text{y donde } \lambda = \det(A).$$

(Si $A = [a_{ij}]$, se manipularán las filas y columnas de A según operaciones del tipo descrito en a), hasta obtener una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{B} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad \text{con } B \in GL(n-1, K)$$

y después se aplicará la hipótesis de recurrencia a B .)

d) Deducir de aquí que $GL_K(E)$ es engendrado por la reunión del conjunto de las transvecciones y el conjunto de las dilataciones y que $SL_K(E)$ es engendrado por el conjunto de las transvecciones.

***15.** Deducir del ejercicio anterior que $GL_+(n, \mathbf{R})$ es una parte conexa de $M_n(\mathbf{R})$ y que $GL(n, \mathbf{C})$ es una parte conexa de $M_n(\mathbf{C})$.

***16.** Se supone $n \geq 2$ y K infinito. Se considera una aplicación $\varphi: GL(n, K) \rightarrow K^*$ tal que:

1. φ es un homomorfismo de grupos;
2. φ es una función polinomio respecto a los coeficientes a_{ij} de las matrices

$$A = [a_{ij}] \in GL(n, K).$$

a) Demostrar que existe un entero p tal que $\forall \lambda \in K, \varphi(D_\lambda) = \lambda^p$.

b) Sea $i \neq j$ ($i, j \in \mathbf{N}_n^*$). Para $\lambda \in K$ y $\mu \in K$, calcular la matriz $(I_n + \lambda E_{ij}) (I_n + \mu E_{ij})$. (Notaciones del ejercicio 14.)

Deducir de aquí ($\forall \lambda \in K$) $\varphi(I_n + \lambda E_{ij}) = 1$.

c) Deducir de a), b) y del ejercicio 14 que se tiene:

$$\forall A \in GL(n, K), \quad \varphi(A) = [\det(A)]^p.$$

d) Resolver las cuestiones anteriores suponiendo solamente que φ es racional respecto a los a_{ij} .
(E. N. S. Ulm, 1971, oral.)

17. Lo mismo que el ejercicio anterior con la hipótesis de que K es finito. Se admitirá que K^ es entonces un grupo cíclico y se demostrará que la conclusión del ejercicio anterior sigue siendo válida.

(E. N. S. Ulm, 1971, oral.)

(Nota. La hipótesis de ser φ polinomial se satisface en este caso de modo automático, y no será preciso utilizarla para tratar esta cuestión.)

18. Se supone $n \geq 2$ y $K = \mathbf{C}$. Sea \mathcal{F} una parte de $\mathcal{L}_K(E)$ que verifica la propiedad: los únicos subespacios F de E que verifican $(\forall u \in \mathcal{F}) u(F) \subset F$ son $\{0_E\}$ y E .

Demostrar que si $v \in \mathcal{L}_K(E)$ verifica $(\forall u \in \mathcal{F}) v \circ u = u \circ v$, entonces v es una homotecia.
(Escuela Politécnica.)

19. Sea p un proyector en E y $\varphi \in \mathcal{L}_K(E)$.

Demostrar la equivalencia de las dos proposiciones siguientes:

$$(1) \quad p \circ f = f \circ p$$

$\text{Im}(p)$ y $\text{Ker}(p)$ son estables en f .

(Escuela Politécnica.)

20. Se supone aquí $K = \mathbf{R}$ y se da una aplicación continua $f: \mathbf{R} \rightarrow GL(E)$ que es un homomorfismo del grupo aditivo \mathbf{R} en el grupo $GL(E)$, es decir que verifica

$$(\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in \mathbf{R}), \quad f(t+u) = f(t) \circ f(u).$$

a) Se pone $F(x) = \int_0^x f(u) du$ ($x \in \mathbf{R}$) lo que define, para todo real x , un elemento $F(x) \in \mathcal{L}(E)$.

Demostrar que para x no nulo y suficientemente pequeño, se tiene: $F(x) \in GL(E)$. Deducir de aquí, eligiendo $a \in \mathbf{R}^*$ tal que $F(a) \in GL(E)$ y calculando $\int_0^a f(t+u) du$ de dos maneras, que la aplicación f (considerando que toma sus valores en el \mathbf{R} -espacio vectorial $\mathcal{L}(E)$) es derivable.

b) Demostrar que al poner $\alpha = f'(0)$, se tiene:

$$(\forall t \in \mathbf{R}) \quad f'(t) = \alpha \circ [f(t)] = [f(t)] \circ \alpha.$$

Deducir de aquí que:

$$(\forall t \in \mathbf{R}) \quad f(t) = [\exp(t\alpha)] \circ [f(0)] = [f(0)] \circ [\exp(t\alpha)]$$

(se podrá observar que los endomorfismos $\exp(t\alpha)$ y $f(t)$ conmutan, e introducir la función auxiliar g definida por: $g(t) = [\exp(-t\alpha)] \circ [f(t)]$.)

21. Se supone aquí que K es cualquiera y que E es de dimensión cualquiera (no neces-

riamente finita). Sean f_1, f_2, \dots, f_p ($p \geq 1$) p formas lineales independientes en E , de núcleos respectivos H_1, H_2, \dots, H_p . Se designa por f la aplicación $E \rightarrow K^p$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$.

- Demostrar que $\text{Ker}(f) = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p$. Se pone $H = \text{Ker}(f)$.
- Demostrar que f es suprayectiva (se podrá estudiar el subespacio $(\text{Im}(f))^0$ del dual $(K^p)^*$ de K^p).
- Deducir de aquí que $\text{codim}(H) = p$.

Espacio afín, grupo afín y baricentro

En los ejercicios 22 a 37 que siguen, \mathcal{E} designa un espacio afín de dimensión finita $n \geq 2$ de espacio vectorial director E ; el cuerpo de base K se supone de característica distinta de 2, salvo que se diga expresamente lo contrario.

22. Se supone $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Demostrar que una aplicación cualquiera $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ verifica la condición (6) del enunciado del teorema I.8.6. Deducir de aquí que este teorema no es válido en este caso.

23. a) Se supone K de característica nula. Demostrar que si una biyección afín φ de \mathcal{E} es tal que $\varphi^p = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ para un entero $p \geq 1$, entonces φ admite por lo menos un punto fijo.

b) Demostrar que a) no se cumple si K no es de característica nula. (Tomar $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $n = 1$.)

24. (Espacio de las aplicaciones afines)

Nota. Este ejercicio no utiliza ninguna hipótesis acerca de las dimensiones de los espacios considerados, salvo a partir de c).

Sean \mathcal{E} y \mathcal{F} dos espacios afines, de espacios directores respectivos E y F .

Se designa por $A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ (resp. $A(\mathcal{E}, F)$) el conjunto de las aplicaciones afines de \mathcal{E} en \mathcal{F} (resp. en F).

a) Demostrar que $A(\mathcal{E}, F)$ se halla provisto de una estructura natural de espacio vectorial, deducida de la estructura de F .

b) Para todo elemento $f \in A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ y todo elemento $\alpha \in A(\mathcal{E}, F)$ se define

$$\alpha + f \in A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

poniendo:

$$(\forall x \in \mathcal{E}) \quad (\alpha + f)(x) = \alpha(x) + f(x).$$

Demostrar que de este modo se dota al conjunto $A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ de una estructura afín, de espacio director $A(\mathcal{E}, F)$.

c) Se suponen \mathcal{E} y \mathcal{F} de dimensiones finitas: $\dim(\mathcal{E}) = m$, $\dim(\mathcal{F}) = n$. ¿Cuál es entonces la dimensión de $A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$? (sol. $(m+1)n$). Demostrar que si se elige un sistema de referencia afín en cada uno de los espacios \mathcal{E} y \mathcal{F} , se puede definir de manera natural un sistema de referencia afín de $A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ asociado a estos sistemas.

25. Se toman las mismas notaciones del ejercicio 24, pero se supone $K = \mathbb{R}$ y \mathcal{E}, \mathcal{F} de dimensiones finitas, iguales respectivamente a n y p . Se dan dos sistemas de referencia afines respectivamente en \mathcal{E} y \mathcal{F} , pongamos $\mathcal{V} = (O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ y $\mathcal{V}' = (O'; \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_p)$.

a) Sea T un espacio topológico y $\alpha : T \rightarrow A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ una aplicación en el espacio afín $A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ de las aplicaciones afines de \mathcal{E} en \mathcal{F} .

Para todo $t \in T$, sean $M(t) = [\alpha_{ij}(t)]$ y $b(t) = [b_i(t)]$ la matriz (p, n) y la matriz $(p, 1)$ tales que la aplicación $\alpha(t)$ esté definida por $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y} = M(t) \cdot \mathcal{X} + b(t)$ (véanse notaciones del § I.12).

Demostrar que α es continua si, y solamente si, lo son cada una de las funciones numéricas α_{ij} , b_i .

b) Se supone que T es un abierto de un espacio vectorial normado. Demostrar que α es diferenciable si, y solamente si, lo son cada una de las funciones numéricas α_{ij} , b_i .

c) Demostrar que el grupo afín $\text{GA}(\mathcal{E})$ es un abierto del espacio afín $A(\mathcal{E}) = A(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

26. El cuerpo base K es \mathbf{R} . Se dan dos espacios afines \mathcal{E} y \mathcal{F} de dimensión finita. Sea $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación que verifica la propiedad siguiente.

Para todo $M \in \mathcal{E}$, existe un entorno $V(M)$ de M tal que la restricción de φ a $V(M)$ sea igual a la restricción de una aplicación afín φ_M de \mathcal{E} en \mathcal{F} .

a) Demostrar que la aplicación φ es afín.

Sugerencia: se observará que el conjunto de los $M \in \mathcal{E}$ para los cuales φ_M tiene un valor dado, es a la vez abierto y cerrado en \mathcal{E} , y se hará uso del hecho de ser \mathcal{E} conexo.

b) Se supone a K de característica $\neq 2$. Demostrar que toda biyección afín involutiva de \mathcal{E} distinta de la identidad es una simetría afín.

27. Establecer, si $n \geq 2$, que el grupo $\text{GA}(\mathcal{E})$ es engendrado por la unión del conjunto de las transvecciones afines con el conjunto de las dilataciones afines.

28. Generalización del ejercicio 23. Se supone que K es de característica nula. Sea Γ un subgrupo finito de $\text{GA}(\mathcal{E})$. Demostrar que existe un punto $a \in \mathcal{E}$ tal que

$$(\forall \varphi \in \Gamma), \quad \varphi(a) = a.$$

29. Sea P una parte finita de \mathcal{E} tal que la variedad afín engendrada por P sea \mathcal{E} . Demostrar que el subgrupo de $\text{GA}(\mathcal{E})$ formado por los $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ tales que $\varphi(P) = P$ es finito.

30. Sean M_1, M_2, \dots, M_{n+1} puntos de \mathcal{E} ($n = \dim(\mathcal{E})$) todos distintos. Sobre cada recta $(M_i M_{i+1})$, se toma un punto P_i , y sobre la recta $(M_1 M_{n+1})$, se toma un punto P . Sean v_1, \dots, v_n y v los escalares tales que

$$(\forall i), \quad \overrightarrow{P_i M_i} = v_i \overrightarrow{M_i M_{i+1}} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{P M_{n+1}} = v \overrightarrow{M_1 M_{n+1}}.$$

Demostrar que P_1, P_2, \dots, P_n, P pertenecen a un mismo hiperplano afín si, y solamente si, se tiene:

$$(v - 1) \prod_{i=1}^n (v_i + 1) = v \prod_{i=1}^n v_i.$$

31. Se supone aquí $K = \mathbf{R}$.

Sean $M_{1,1} \dots M_{1,p}$ puntos de \mathcal{E} ($p \geq 2$).

Para $i = 1, 2, \dots, p$, se designa por $M_{2,i}$ el isobaricentro de los $(M_{1,j})_{j \neq i}$. Por recurrencia, se define el isobaricentro $M_{k+1,i}$ de los $(M_{k,j})_{j \neq i}$ para todo $k \geq 1$. Demostrar que cada sucesión $(M_{k,i})_{k \in \mathbf{N}^*}$ es convergente; si P_i es su límite, comparar los P_i entre sí.

32. Se supone $n = 3$. Se da el nombre de *triplex* a todo sistema (D_1, D_2, D_3) de tres rectas afines no coplanarias dos a dos.

a) Si (D_1, D_2, D_3) y (D'_1, D'_2, D'_3) son dos triplex, demostrar que existe un $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ único tal que $\varphi(D_i) = D'_i$ para $i = 1, 2, 3$.

b) Sea Δ el conjunto reunión de tres rectas dadas no coplanarias dos a dos. Estudiar el subgrupo de $\text{GA}(\mathcal{E})$ constituido por las $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ tales que $\varphi(\Delta) = \Delta$.

33. Se supone aquí K finito, de cardinal q . Se utilizarán los resultados de la parte I del problema 8, página 582, tomo 1.

- a) Calcular $\text{card}(\text{GA}(\mathcal{E}))$.
- b) Sea p un entero, $1 \leq p \leq n$. Determinar el número de subespacios afines de dimensión p de \mathcal{E} .
- c) ¿Cuántas transvecciones afines hay en $\text{GA}(\mathcal{E})$? ¿Cuántas dilataciones afines? ¿Cuántas simetrías afines?
- d) Sea \mathcal{F} un subespacio afín de dimensión p de \mathcal{E} ($1 \leq p \leq n$). Calcular el número de elementos del subgrupo de $\text{GA}(\mathcal{E})$ constituido por las $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ tales que $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

34. («Teorema fundamental de la geometría afín»)

Nota. Las hipótesis que a continuación se utilizan no son necesariamente las mejores posibles. Para una reducción de tales hipótesis, ver por ejemplo [4] u [11].

I. Se supone el cuerpo base K distinto de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (lo cual implica, en particular, $\text{card}(K) \geq 3$). Sea \mathcal{E} un plano afín ($\dim(\mathcal{E}) = 2$) y $u: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una aplicación biyectiva tal que para toda recta afín \mathcal{D} , exista una recta afín \mathcal{D}' tal que $u(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$. Se pide establecer que u es, salvo por un automorfismo del cuerpo K , una aplicación afín (este enunciado se aclara en la cuestión b)).

a) Demostrar que si a, b y c son tres puntos no alineados de \mathcal{E} , entonces $u(a), u(b)$ y $u(c)$ no están alineados.

(Se razonará por reducción al absurdo, observando que \mathcal{E} no es reunión de dos rectas afines.)

b) Deducir de aquí que para toda recta afín \mathcal{D} , el conjunto $u(\mathcal{D})$ es una recta afín y que si las rectas afines \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 son paralelas, las rectas $u(\mathcal{D}_1)$ y $u(\mathcal{D}_2)$ lo son también.

c) Sea a un punto fijo de \mathcal{E} y $a' = u(a)$.

Para todo $t \in E$, se pone: $w(t) = \overrightarrow{a'u(a+t)}$.

Establecer que $w(t_1 + t_2) = w(t_1) + w(t_2)$ para $t_1 \in E$ y $t_2 \in E$. Se distinguirán cuatro casos:

1. Si t_1 y t_2 son linealmente independientes, se observará que $a + t_1 + t_2$ se deduce de $a + t_1$ y $a + t_2$ construyendo un paralelogramo simple, y se aplicará b).

2. Si t_1 y t_2 están ligados y si $t_1 + t_2 \neq 0$, $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$ nos veremos reducidos al caso 1, considerando $t_3 \in E$ independiente de t_1 .

3. Si $t_1 = 0$ o $t_2 = 0$, la propiedad es evidente.

4. Finalmente, si $t_1 \neq 0$ y $t_1 + t_2 = 0$ solamente se presenta dificultad si K no es de característica 2. Se pasa entonces al caso 2, cambiando de origen.

d) Sea $e_1 \in E$ ($e_1 \neq 0$); demostrar que existe una biyección única $\varphi_{e_1}: K \rightarrow K$, tal que $(\forall \lambda \in K) w(\lambda e_1) = \varphi_{e_1}(\lambda) w(e_1)$, y $\varphi_{e_1}(0) = 0$. Demostrar que φ_{e_1} no depende de e_1 (se establecerá en primer lugar, con ayuda de b), que si e_1 y e_2 son linealmente independientes, entonces $\varphi_{e_1} = \varphi_{e_2}$). En lo que sigue se designará por φ la biyección de K en K tal que $\varphi = \varphi_{e_1}$ para todo $e_1 \in E$, $e_1 \neq 0$.

e) Establecer que $\varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu)$ para todos los $\lambda, \mu \in K$.

Para ello, se tomará una base (e_1, e_2) de E y se demostrará que el punto $(\lambda + \mu)(e_1 + e_2) + a$ se obtiene mediante construcciones geométricas sencillas a partir de los puntos $\lambda e_1 + a$, $\mu e_1 + a$, $\lambda e_2 + a$, $\mu e_2 + a$ si $\lambda^2 \neq \mu^2$, a partir de $\lambda e_1 + a$ y de $-e_2 + a$ si $\lambda = -\mu$, y que la propiedad es evidente si $\lambda = \mu$.

f) Establecer del mismo modo:

$$(\forall \lambda \in K, \forall \mu \in K), \quad \varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda) \varphi(\mu).$$

[Si $\lambda = 0$ o $\mu = 0$, la propiedad resulta de que $\varphi(0) = 0$. Si $\lambda\mu \neq 0$, elegir una base (e_1, e_2)

de E y obtener el punto $\mu\lambda e_2 + a$ a partir de los puntos $\lambda e_1 + a$, $\mu e_1 + a$, $\lambda e_2 + a$ mediante construcciones geométricas sencillas.]

h) Queda de este modo demostrado que la aplicación w es una φ -colineación, es decir que verifica

$$(\forall t_1 \in E, \forall t_2 \in E), \quad w(t_1 + t_2) = w(t_1) + w(t_2)$$

y

$$(\forall t \in E, \forall \lambda \in K), \quad w(\lambda t) = \varphi(\lambda) w(t).$$

Establecer que el automorfismo φ del cuerpo K no depende de la elección del punto a .

i) Se supone $K = \mathbf{R}$. Demostrar que el único automorfismo de \mathbf{R} es la identidad. ¿Qué puede deducirse de aquí en cuanto a la aplicación u ?

II. Sea \mathcal{E} un espacio afín de dimensión $n \geq 2$, siendo el cuerpo base K distinto de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Sea $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una biyección tal que para toda recta \mathcal{D} , exista una recta \mathcal{D}' que verifique $u(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$.

a) Demostrar que si \mathcal{V} es una subvariedad lineal afín de E de dimensión p , el conjunto $u(\mathcal{V})$ está contenido en una subvariedad lineal afín de dimensión $\leq p$.

b) Deducir con ayuda de I), que existe un automorfismo φ del cuerpo K y una φ -colineación $w : E \rightarrow E$ tales que $(\forall t \in E, \forall a \in \mathcal{E}) \quad u(t + a) = w(t) + u(a)$.

c) Deducir de aquí que, si $K = \mathbf{R}$, toda biyección de \mathcal{E} que transforme a toda terna de puntos alineados en una terna de puntos alineados, es afín.

35. Se supone $n \geq 2$. Sean $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_p$ p rectas de \mathcal{E} y H un hiperplano vectorial de E tal que ninguna de las \mathcal{D}_i sea paralela a H . Se dan escalares fijos $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$ tales que $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$.

Un hiperplano variable \mathcal{H} se mantiene paralelo a H . Corta a cada \mathcal{D}_i en un punto único M_i .

Determinar el lugar del baricentro $\sum_{i=1}^p \alpha_i M_i$ al variar \mathcal{H} .

36. Sea $(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$ una base afín de \mathcal{E} . Para todo i , $1 \leq i \leq n+1$, se designa por \mathcal{H}_i el hiperplano afín que contiene a todos los $(A_j)_{j \neq i}$. Una recta afín \mathcal{D} que no sea paralela a ninguno de los \mathcal{H}_i , corta a cada \mathcal{H}_i en un punto (único) designado por B_i . Finalmente, M_i designa el punto medio de $(A_i B_i)$ ($1 \leq i \leq n+1$). Demostrar que existe un hiperplano afín que contiene a todos los M_i ($1 \leq i \leq n+1$).

37. Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} dos subvariedades lineales afines de \mathcal{E} , de espacios directores F y G ; se designa por \mathcal{H} la variedad lineal afín engendrada por $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.

a) Demostrar que si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es no vacío, se tiene

$$\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) + \dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}).$$

b) Demostrar que si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, se tiene:

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}) + 1 - \dim(F \cap G).$$

c) Deducir que si $F \cap G = \{0\}$ y si $\dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}) \geq n$, entonces $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es no vacío. (La parte a) proporciona entonces $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$).

Convexidad

En los ejercicios 38 a 44 que siguen, E designa un espacio vectorial normado, cuya norma se designa por $x \mapsto \|x\|$.

38. a) Sea C una parte convexa de E ; demostrar que la adherencia \bar{C} de C y el interior $\overset{\circ}{C}$ de C son conjuntos convexos.

b) Se supone ahora el interior de C no vacío: sea $O \in C$. Con ayuda de las rectas afines que pasan por O , caracterizar los puntos interiores y los puntos frontera de C . Deducir de aquí que $\bar{C} = \overset{\circ}{C}$ y que $\overset{\circ}{C} = \bar{C}$.

39. Sea U una parte abierta de E ; demostrar que la envoltura convexa de U es abierta.

40. Sea C una parte convexa de E no vacía que verifica las propiedades siguientes:

1. C es *simétrica*, es decir la relación $x \in C$ implica $-x \in C$.
2. Toda recta vectorial de E corta a C según un segmento acotado y no reducido a $\{0_E\}$.

Para todo $x \in E$, $x \neq 0_E$, se pone:

$$v(x) = \inf_{\substack{\lambda x \in C \\ \lambda \neq 0}} \frac{1}{|\lambda|}$$

a) Comprobar que si además se pone $v(0_E) = 0$, la aplicación v toma sus valores en \mathbf{R}_+ define sobre E una norma. (Esta norma recibe el nombre de *medida* de C : es independiente de la norma dada de E .)

b) Comparar v con la norma de E en la hipótesis adicional de que C tiene un interior no vacío.

41. (Lema de Kakutani)

Nota. En este ejercicio no interviene la estructura normada de E . Interviene únicamente la estructura afín real natural de E .

Sean C_1 y C_2 dos partes convexas no vacías disjuntas de E tales que $C_1 \cup C_2 \neq E$, y sea $x \in E \setminus (C_1 \cup C_2)$. Se designa por Γ_i la envoltura convexa de $\{x\} \cup C_i$ ($i = 1, 2$). Demostrar que uno por lo menos de los conjuntos $\Gamma_1 \cap C_2$ y $\Gamma_2 \cap C_1$ es vacío.

42. Se supone aquí $E = l^1(\mathbf{R})$ (espacio de las sucesiones $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de reales tales que la $\sum |x_n|$ converge) provisto de la norma definida por $\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$. Sea C el cono convexo constituido por los x para los cuales $(\forall n \in \mathbf{N}) x_n \geq 0$. Demostrar que C es cerrado, engendra a E , no admite ningún punto interior y no contiene ninguna recta vectorial de E .

43. Sea (X_n) una sucesión creciente de partes convexas de un espacio afín real A . Demostrar que el conjunto $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ es convexo.

44. Se supone a \mathbf{R}^2 dotado de su estructura euclídea canónica, se designa por \bar{D} el disco unidad cerrado de \mathbf{R}^2 y por S su circunferencia frontera.

Sea X un espacio topológico y E el \mathbf{R} -espacio vectorial de las aplicaciones continuas y acotadas de X en \mathbf{R}^2 , provisto de la norma definida por $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ ($f \in E$).

Finalmente sea B la bola unidad cerrada de E .

a) Un punto f de B se dice que es *extremal* si no existe ningún par $(f_1, f_2) \in B \times B$ tal que $f_1 \neq f_2$ y $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ (véase ejercicio 52). Demostrar que los puntos extremales de B son las aplicaciones continuas de X en S .

b) Sea L el conjunto de los puntos extremales de B y Γ la envoltura convexa de L . Demostrar que $B = \Gamma$.

En los ejercicios 45 a 55 que siguen, E designa un \mathbf{R} -espacio vectorial real de dimensión finita $n \geq 1$, al que se dota de su topología natural.

45. Sea C una parte convexa de E tal que la variedad afín engendrada por C sea E . Demostrar que C tiene por lo menos un punto interior.

46. Sean C_1 y C_2 dos partes convexas de E de interior vacío. Demostrar que el interior de $C_1 \cup C_2$ es vacío.

47. Sea C una parte convexa, cerrada y no acotada de E .

a) Demostrar que para todo $a \in C$, existe por lo menos una semirrecta de origen a contenida en C .

(Método posible: para todo entero $n \geq 1$, sea $x_n \in C$ un punto tal que $v(x_n - a) \geq n$, donde v designa una norma arbitrariamente fijada en E . Seguidamente, de la sucesión $y_n = a + \frac{x_n - a}{v(x_n - a)}$ extraer una sucesión convergente).

b) Para todo $a \in C$, sea Γ_a la reunión de las dos semirrectas de origen a contenidas en C . Demostrar que Γ_a es un cono cerrado convexo de vértice a ; demostrar que si $a \in C$ y $b \in C$, se pasa de Γ_a a Γ_b por la traslación de vector \overrightarrow{ab} .

48. (Teorema de Helly)

a) Sea r un entero $\geq n + 1$ y C_1, C_2, \dots, C_r conjuntos convexas tales que $r - 1$ cualesquiera de entre ellos tengan siempre una intersección no vacía. Demostrar que $\bigcap_{i=1}^r C_i$ es no vacío.

Método: Para todo i ($1 \leq i \leq r$), sea $x_i \in \bigcap_{j \neq i} C_j$. Demostrar que existen reales no todos nulos λ_i tales que $\sum \lambda_i = 0$ y $\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i = 0$; en la relación $\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i = 0$, agrupar entonces los x_i que corresponden a los $\lambda_i \geq 0$, y los que corresponden a los $\lambda_i < 0$.

b) Sea $(C_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos convexas compactos de E tales que $n + 1$ cualesquiera de entre ellos tengan siempre una intersección no vacía. Demostrar que $\bigcup_{i \in I} C_i$ es no vacío.

49. a) Sea p un entero $\geq n + 2$ y x_1, x_2, \dots, x_p puntos de E . Demostrar que existen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ reales no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^p \beta_i = 0$ y $\sum_{i=1}^p \beta_i x_i = 0$.

Sean entonces $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ reales ≥ 0 , tales que $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ y sea $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$. Establecer la existencia de k y de reales γ_i ($i \neq k, 1 \leq i \leq p$) tales que $\gamma_i \geq 0$ para todo i , y que verifican:

$$\sum_{i \neq k} \gamma_i = 1 \quad \text{y} \quad x = \sum \gamma_i x_i.$$

Para ello, si J designa el conjunto de los i tales que $\beta_i > 0$, se considerará un entero k tal que $\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \inf_{i \in J} \frac{\alpha_i}{\beta_i}$.

b) Sea C una parte cualquiera de E . Demostrar, con ayuda de a), que la envoltura convexa \hat{C} de C es el conjunto de los puntos de la forma $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ con

$$(\forall i \in \mathbf{N}), \quad 1 \leq i \leq n + 1, \quad x_i \in C, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

c) Demostrar que si C es una parte compacta de E , entonces \hat{C} es compacto.

d) Para $n = 2$, proporcionar un ejemplo de parte cerrada C de E , tal que \hat{C} no sea cerrada.

50. En este ejercicio, se fija en E una estructura euclídea arbitraria, y se designa por d la distancia asociada.

Si A es una parte no vacía cualquiera de E , se da el nombre de *hiperplano de apoyo* de A , a todo hiperplano afín H tal que $H \cap A$ sea no vacío y que A esté situado en uno de los semiespacios cerrados determinados por H .

a) Sea Γ una parte de E convexa, cerrada y no vacía. Demostrar que si $x \in E \setminus \Gamma$, existe $a \in \Gamma$ único tal que $d(x, a) = d(x, \Gamma)$. Demostrar que el hiperplano afín que pasa por a y es ortogonal a \overrightarrow{ax} es hiperplano de apoyo de Γ .

b) Sea Ω un abierto convexo no vacío de E y sea a un punto frontera de Ω .

i) Demostrar que para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, existe un hiperplano de apoyo H de $\overline{\Omega}$ tal que $d(a, H) \leq \varepsilon$.

ii) Sea S la esfera unidad de E . Para todo hiperplano afín H de E , sea N_H el conjunto de los dos vectores unitarios normales a H ($N_H \subset S$). A todo real $\varepsilon > 0$ se asocia el conjunto B_ε reunión de los N_H que corresponden a los hiperplanos de apoyo H de $\overline{\Omega}$ tales que $d(a, H) \leq \varepsilon$, y se pone $K_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon}$. Demostrar que cada K_ε es no vacío y que $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*} K_\varepsilon$ es no vacío.

iii) Si $\vec{v} \in \bigcap_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*} K_\varepsilon$, demostrar que el hiperplano que pasa por a y es ortogonal a \vec{v} es hiperplano de apoyo de $\overline{\Omega}$.

c) Sea Ω un abierto convexo no vacío de E y V una subvariedad afín no vacía de E , tal que $V \cap \Omega = \emptyset$. Deducir de lo que antecede que existe un hiperplano H que contiene a V y es tal que $H \cap \Omega = \emptyset$.

(Indicación: limitarse al caso en que V es un subespacio vectorial de E . Después, razonando en el espacio cociente E/V , limitarse al caso en que V queda reducida a un punto.)

51. Se da el nombre de *cono* a toda reunión de semirrectas vectoriales cerradas de origen O . En lo que sigue, se considera un cono convexo C cerrado.

a) Demostrar que la unión de las rectas vectoriales contenidas en C (si existen) es igual al mayor subespacio vectorial contenido en C .

b) El cono C se dice que es *saliente* si no contiene ninguna recta vectorial. Demostrar que si C es saliente, las relaciones

$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C, \dots, x_p \in C \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p x_i = 0$$

implican $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$. Recíproca

c) Se supone que C es saliente; se elige una norma cualquiera ν en E ; se designa por S la esfera unidad de E para esta norma y por K el conjunto $S \cap C$. Finalmente, sea \hat{K} la envoltura convexa de K : según el ejercicio 49, \hat{K} es compacto.

Utilizar b) para demostrar que $O \notin \hat{K}$.

d) Sea Γ el conjunto de los puntos λx , donde x recorre \hat{K} y donde λ recorre el intervalo $[1, +\infty[$ de \mathbf{R} . Demostrar que Γ es una parte convexa y cerrada de E y que $O \notin \Gamma$.

e) Aplicando el ejercicio 50 demostrar que existe un hiperplano afín H que *separa estrictamente* O y Γ , es decir tal que uno de los semiespacios abiertos de frontera H contiene a Γ y el otro contiene a O .

Demostrar finalmente que $H \cap C$ es compacto y que H corta a toda semirrecta vectorial contenida en C .

52. Un punto a de una parte convexa A de E se dice que es *extremal* (respecto a A) si no existen puntos x, y tales que $x \neq y$, $x \in A$, $y \in A$ y que a sea el punto medio de $[x, y]$.

a) Sea H un hiperplano de apoyo de A (véase ejercicio 50). Demostrar que todo punto extremal de $A \cap H$ es punto extremal de A .

b) Sea K una parte convexa, compacta y no vacía de E . Demostrar que para todo hiperplano afín H_0 , existe por lo menos un hiperplano de apoyo H de K paralelo a H_0 . [Si $f(x) = 0$ es una ecuación de H_0 , donde la función $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ es afín, se considerará $\sup_{x \in K} f(x)$ e $\inf_{x \in K} f(x)$.] Razonando por recurrencia sobre $n = \dim(E)$, deducir que todo hiperplano de apoyo H de K contiene por lo menos un punto extremal de K .

c) Supuesto fijo el convexo compacto no vacío K de E , se designa por $\mathcal{E}(K)$ el conjunto de sus puntos extremales y por L la envoltura convexa de $\mathcal{E}(K)$. Demostrar que $\bar{L} \subset K$. Seguidamente, si $x \in K \setminus \bar{L}$, demostrar, utilizando el ejercicio 50, que existe un hiperplano de apoyo H de K tal que $H \cap \bar{L} = \emptyset$; deducir finalmente que $\bar{L} = K$.

*53. (Poliedros convexos)

Sea $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ una familia finita de semiespacios cerrados de E . Demostrar que si $P = \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ es un conjunto acotado, se tiene necesariamente $\text{card}(I) \geq n + 1$. Si esto es así, el conjunto P (que es entonces compacto) recibe el nombre de poliedro convexo y la dimensión de la variedad afín engendrada por P se dice que es la *dimensión de P* .

a) Demostrar que la intersección de un poliedro convexo con toda variedad lineal afín de E es un poliedro convexo.

b) Demostrar que si x es un punto extremal de un poliedro convexo $P = \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ y si \mathcal{H}_i designa el hiperplano frontera de \mathcal{E}_i , existe entonces por lo menos una subfamilia formada por n de los \mathcal{H}_i cuya intersección es $\{x\}$. Deducir de aquí que el conjunto $\mathcal{E}(P)$ de los puntos extremales de P es finito. Aplicando el ejercicio anterior, deducir una generación «puntual» simple del poliedro P . (Los elementos de $\mathcal{E}(P)$ se dice que son *vértices* de P .)

c) Sea P un poliedro convexo: se da el nombre de *faceta* de P a todo poliedro intersección de P con uno de sus hiperplanos de apoyo. Demostrar que las facetas de dimensión 0 son los $\{x\}$, donde $x \in \mathcal{E}(P)$ (utilizar el ejercicio 52).

**d) Suponiendo que P es de dimensión n , se da el nombre de *cara* de P a toda faceta de dimensión $n - 1$. Establecer que el número de caras es finito y que la frontera de P es la reunión de sus caras. Demostrar finalmente, razonando por recurrencia sobre n y utilizando el ejercicio 52, que P es la intersección de los semiespacios cerrados que contienen a P y cuya frontera es uno de los hiperplanos que contienen a una cara.

*54. (Teorema de Hermann Weyl)

Este ejercicio completa al anterior y utiliza las notaciones y resultados del mismo.

Sea \mathcal{F} una parte finita de E y P su envoltura convexa.

a) Demostrar que el conjunto P es compacto, y que todo punto extremal de P pertenece a \mathcal{F} .

b) Se supone que O es punto interior de P . A todo hiperplano \mathcal{H} de E que no pasa por O , se asocia la única forma lineal $\varphi_{\mathcal{H}}$ tal que $\varphi_{\mathcal{H}}(x) = 1$ sea una ecuación de \mathcal{H} . Se designa por H_P el conjunto de los hiperplanos \mathcal{H} tales que P está contenido en uno de los semiespacios limitados por \mathcal{H} , y por P^* la unión del conjunto $\{\varphi_{\mathcal{H}}\}_{\mathcal{H} \in H_P}$ y de $\{O_{E^*}\}$, donde O_{E^*} designa la forma lineal nula en E .

Demostrar que P^* es una parte convexa y compacta de E^* .

**c) Establecer que $\varphi_{\mathcal{H}}$ es un punto extremal de P^* si, y solamente si, \mathcal{H} es un hiper-

plano de P tal que $P \cap \mathcal{H}$ engendra de modo afín a \mathcal{H} . Deducir de aquí, aplicando el resultado del ejercicio 53, que P es un poliedro convexo.

Nota. Los resultados establecidos en los ejercicios 51 a 53 figuraban en una primera redacción de los programas de 1973 de las clases preparatorias. Han sido suprimidos en la redacción definitiva.

55. Sea C una parte convexa compacta de E y $u : E \rightarrow E$ una aplicación afín tal que $u(C) \subset C$. Para todo entero $n \geq 1$, se define la aplicación $u_n : E \rightarrow E$ poniendo

$$(\forall x \in E) \quad u_n(x) = \frac{1}{n} [x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x)].$$

- Demostrar que $u_n(C) \subset C$.
- Demostrar que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} u_n(C) = K$ es no vacío.
- Demostrar que si $x \in K$, entonces $u(x) = x$.
- Sea $v : E \rightarrow E$ una aplicación afín tal que $v(C) \subset C$ y que $u \circ v = v \circ u$. Demostrar que para todo $x \in K$, se tiene: $v(x) = x$. (Véase problemas de análisis C 1 Dunod 1967, ejercicio II.5, y

Escuela Politécnica, Gran Oral, 1972.)

Nota. El resultado demostrado en este ejercicio es un caso particular del *teorema de Kakutani* sobre conjuntos convexos compactos de un \mathbf{R} -espacio vectorial topológico.

CAPÍTULO II

Geometría euclídea plana: ángulos y distancias

- Dos triángulos son tales que las perpendiculares trazadas desde los vértices del primero sobre los lados del segundo son concurrentes. Demostrar que las perpendiculares trazadas desde los vértices del segundo sobre los lados del primero son también concurrentes.
- En \mathcal{E}_2 se toma un sistema de referencia ortonormado $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Se da un triángulo mediante las ecuaciones de sus tres lados, sean estas:

$$ux + vy + h = 0, \quad u'x + v'y + h' = 0, \quad u''x + v''y + h'' = 0.$$

Calcular el área del triángulo en función de las cantidades $u, v, h, u', v', h', u'', v'', h''$.

- Se dan tres puntos no alineados A, B, C de \mathcal{E}_2 . Demostrar, por Geometría analítica, las propiedades siguientes:
 - Las alturas del triángulo (ABC) son concurrentes en un punto H (ortocentro de (ABC)).
 - Las bisectrices del triángulo (ABC) concurren tres a tres en cuatro puntos distintos de A, B, C . Entre estos cuatro puntos, uno sólo de ellos es interior al triángulo, y este punto es el punto común a las tres bisectrices interiores del triángulo.
 - El centro de la circunferencia que pasa por A, B, C , el ortocentro H y el centro de gravedad del triángulo (ABC) están sobre una recta Δ .
 - Los pies de las alturas, los puntos medios de los lados del triángulo (ABC) y los tres puntos medios de los segmentos AH, BH, CH están sobre una misma circunferencia, cuyo centro pertenece a Δ .

e) Las simétricas de las medianas del triángulo (ABC) respecto a las bisectrices interiores correspondientes (*) son concurrentes.

4. Sean A, B, C tres puntos no alineados de \mathcal{E}_2 . Se designa por α, β, γ respectivamente las bisectrices interiores del triángulo (ABC) trazadas desde A, B y C .

a) Sea M un punto de \mathcal{E}_2 distinto de A, B y C . Demostrar que las simétricas de las rectas AM, BM, CM respecto a las rectas α, β, γ respectivamente, son concurrentes.

b) Sean P, Q, R tres puntos de \mathcal{E}_2 , pertenecientes respectivamente a las rectas BC, CA, AB . Se designan respectivamente por p, q, r las simétricas de las rectas AP, BQ, CR respecto a α, β, γ . Demostrar que si P, Q, R están alineados, las rectas p, q, r cortan respectivamente a las rectas BC, CA, AB en puntos alineados.

5. Sean A, B, C, D cuatro puntos de \mathcal{E}_2 tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados.

Se supone que las rectas AB , y CD se cortan en un punto E y que las rectas BC y AD se cortan en un punto F .

Demostrar que los ortocentros de los triángulos ABF, ABD, DCF, BCE están alineados.

Geometría euclídea en dimensión 3: ángulos y distancias

En los ejercicios 6 a 14 el espacio \mathcal{E}_3 se halla provisto de un sistema de referencia ortonormado $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

6. Se da la recta D de ecuaciones $x + y + z - 1 = 0, x - y - 2z = 0$. Determinar la proyección ortogonal de D sobre el plano de ecuación

$$x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

7. Determinar la perpendicular común a las dos rectas D_1 y D_2 definidas respectivamente por

$$(x + z - 2 = 0, x + y - z - z = 0) \quad \text{y} \quad (2x - 1 = 0, y + 5z = 0).$$

a) Calcular la distancia más corta entre D_1 y D_2 .

b) Las mismas preguntas con $D_1(x - y - z - 1 = 0, 3x + y - z + 4 = 0)$ y $D_2(2x - 4y + z - 1 = 0, 3x - 2y + z - 2 = 0)$.

8. Determinar el ángulo de las dos rectas e intersección del cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con el plano de ecuación $2x + 3y - z = 0$.

9. Se da la recta Δ de ecuaciones $x = y = z$ y el plano P de ecuación

$$ux + vy + wz + h = 0.$$

a) Determinar un sistema de ecuaciones de la recta simétrica de Δ respecto a P .

b) Determinar una ecuación del transformado de P por la simetría de eje Δ .

c) Tratar el mismo problema sustituyendo la recta Δ por la recta D de ecuación

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

y P por el plano Q de ecuación $x + y + z = 0$.

(*) (Estas rectas reciben el nombre de *simedianas* del triángulo.)

10. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 los planos de ecuaciones respectivas

$$x + y = 1, \quad y + z = 1, \quad z + x = 1, \quad x + 3y + z = 0$$

y M el punto de coordenadas $(1, 1, a)$.

Determinar el conjunto de los valores de a tales que los simétricos de M respecto a los cuatro planos P_i sean coplanarios.

(E. P.)

11. Sean D, D' dos rectas no ortogonales y no coplanarias. Un punto M describe D . El plano ortogonal a D en M corta a D' en un punto M' . Sean P y P' los planos (M, D') y (M', D) respectivamente y sea α el ángulo de P y P' .

Demostrar que $MM'^2 \times \operatorname{tg}^2 \alpha$ no depende de M .

12. Sean A, B, C tres puntos no alineados de \mathcal{E}_2 y sea k un real. Determinar el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{E}_3$ tales que

$$[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}] = k.$$

13. Se da un tetraedro por las ecuaciones de sus cuatro caras; sean éstas

$$u_i x + v_i y + w_i z + h_i = 0 \quad (1 \leq i \leq 4).$$

Expresar el volumen del tetraedro en función de las cantidades u_i, v_i, w_i, h_i ($1 \leq i \leq 4$).

14. Sea q una forma cuadrática en E_3 y φ el operador de E_3 asociado a q . Se da un plano vectorial P y se designa por \vec{v} un vector unitario normal a P .

a) Si ψ designa el operador asociado a la restricción de q a P , demostrar la relación

$$\operatorname{Tr}(\psi) = \operatorname{Tr}(\varphi) - q(\vec{v}).$$

b) Se supone q no degenerada. Demostrar que el discriminante δ de la restricción de q a P viene dado por:

$$\delta = -\det(\varphi) \times [\varphi^{-1}(\vec{v}) \cdot \vec{v}].$$

c) (Generalización del ejercicio II.8).

Deducir de aquí que el ángulo θ de las rectas de intersección (supuestas reales) del plano de ecuación $ux + vy + wz = 0$ con el cono de ecuación

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0,$$

viene dado por

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{4AB}{C}, \quad \text{con:} \quad A = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$B = (b^2 - a'a'')u^2 + (b'^2 - a''a)v^2 + (b''^2 - aa')w^2 + 2(ab - b'b'')vw + \\ + 2(bb' - a'b')wu + 2(a''b'' - bb')uv,$$

$$C = (a' + a'')u^2 + (a'' + a)v^2 + (a + a')w^2 - 2bvw - 2b'wu - 2b''uv.$$

Ángulos y distancias en \mathcal{E}_3 y \mathcal{E}_n

15. Sea \mathcal{E}_n un espacio afín euclídeo de dimensión n , de espacio director E_n .

a) Se da la función

$$g : E_n \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto g(x) = \|x\|;$$

demostrar que g es dos veces diferenciable en el abierto $U = E_n \setminus \{0\}$. Determinar la diferencial $Dg_x(x \in E_n \setminus \{0\})$. Demostrar que la forma cuadrática q_x asociada a la diferencial segunda de g en x viene dada por

$$\forall h \in E_n \quad q_x(h) = \frac{1}{\|x\|^3} [\|h\|^2 \|x\|^2 - (h \cdot x)^2].$$

Cuando $n = 3$, dar una expresión simple $q_x(h)$ con ayuda del producto vectorial $x \wedge h$ (relativo a una orientación dada en \mathcal{E}_3).

b) Sean A_1, A_2, \dots, A_p puntos distintos *no alineados* de \mathcal{E}_n , con $p \geq 3$. Se define en \mathcal{E}_n la función $f : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathbf{R}$, $M \mapsto f(M) = \sum_{i=1}^p MA_i$. Demostrar que el conjunto de los reales $f(\mathcal{E}_n)$ admite un mínimo m .

c) Sea Ω un punto de \mathcal{E}_n tal que $f(\Omega) = m$. Demostrar que si Ω no es igual a ninguno de los A_i , se tiene

$$\sum_{i=1}^p \frac{\overrightarrow{\Omega A_i}}{\Omega A_i} = 0.$$

Sea $\Omega' \in \mathcal{E}_n \setminus \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$. Calcular en función de $S = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\Omega' A_i}$ y del vector $\overrightarrow{\Omega' \Omega}$, el vector $\sum_{i=1}^p \frac{\overrightarrow{\Omega' A_i}}{\Omega' A_i}$, y deducir que si $\Omega' \neq \Omega$ se tiene: $f(\Omega') > m$ y que f no admite extremo relativo en el punto Ω' . (En esta cuestión, se utilizará la diferencial de f .)

d) Se fija el entero i ($1 \leq i \leq p$), y se pone $\vec{V}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\overrightarrow{A_i A_j}}{A_i A_j}$.

Demostrar que si $\|\vec{V}_i\| \leq 1$, la función f admite en A_i un mínimo relativo estricto, y que si $\|\vec{V}_i\| > 1$, la función f no admite extremo relativo en A_i .

e) Hacer un estudio completo del caso $n = 2$, $p = 3$.

16. a) Se designa por E un espacio vectorial euclídeo, por L un subespacio vectorial de E y por \vec{u} un vector unitario no ortogonal a L .

A cada vector unitario \vec{v} de E se asocia el ángulo θ de los vectores \vec{u}, \vec{v} (definido por $\cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$ y $0 \leq \theta \leq \pi$). Demostrar que el mínimo θ_0 de θ se alcanza cuando \vec{v} tiene la misma dirección y el mismo sentido que la proyección de \vec{u} sobre L y que verifica $0 \leq \theta_0 < \pi/2$.

b) Sean L, M dos subespacios suplementarios de E . A cada par \vec{u}, \vec{v} de vectores unitarios de E tales que $\vec{u} \in L$ y $\vec{v} \in M$ se asocia el ángulo θ de estos vectores. Demostrar que existe un par (\vec{u}, \vec{v}) que realiza el mínimo θ_0 de θ , y que un par tal cumple las relaciones:

$$\vec{u} - \vec{v} \cos \theta_0 \in M^\perp, \quad \vec{v} - \vec{u} \cos \theta_0 \in L^\perp.$$

17. a) Sean $(\vec{U}_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $(\vec{V}_i)_{1 \leq i \leq n}$ dos sistemas de vectores del espacio vectorial euclídeo E_n . Cualquiera que sea la orientación elegida en E_n , demostrar que se tiene:

$$\det(\vec{U}_i, \vec{V}_j) = [\vec{U}_1, \dots, \vec{U}_n] \times [\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n].$$

(Utilizar una base ortonormal).

b) Deducir de ahí la expresión del producto mixto de n vectores \vec{V}_i definidos dando los números $\vec{V}_i \cdot \vec{e}_i$, donde (\vec{e}_i) designa una base cualquiera de E_n .

18. Sobre un mismo espacio vectorial E de dimensión n , se definen dos estructuras euclídeas orientadas $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$; demostrar que existe una constante numérica tal que los productos mixtos p, p' de n vectores cualesquiera en las estructuras $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ están ligados por la relación $p' = kp$.

19. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ cuatro vectores de un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión 3. Establecer la relación:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}.$$

Isometrías

En los ejercicios 20 a 27 que siguen, \mathcal{E}_n designa un espacio afín euclídeo, de espacio director E_n y de dimensión $n \geq 2$. Si A es una parte de \mathcal{E}_n , se designa por $\text{Is}_A(\mathcal{E}_n)$ (resp. $\text{Dep}_A(\mathcal{E}_n)$) el subgrupo de $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ (resp. de $\text{Dep}(\mathcal{E}_n)$) constituido por las isometrías (resp. los desplazamientos φ) tales que $\varphi(A) = A$.

20. Se supone aquí $n = 2$. Determinar los elementos de $\text{Is}_A(\mathcal{E}_n)$ y de $\text{Dep}_A(\mathcal{E}_n)$ en los casos siguientes:

- a) A es la reunión de dos rectas distintas.
- b) A es una cónica propia con centro.
- c) A es una parábola.

d) A es el conjunto de los puntos $\{O + m\vec{i} + n\vec{j}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$ donde $(O; \vec{i}, \vec{j})$ es un sistema de referencia afín cualquiera de \mathcal{E}_2 (Se distinguirán varios casos, de acuerdo con la forma de este sistema de referencia.)

21. Se supone $n = 3$. Determinar los elementos de $\text{Is}_A(\mathcal{E}_n)$ y de $\text{Dep}_A(\mathcal{E}_n)$ en los casos siguientes:

- a) A es la reunión de dos rectas no coplanarias.
- b) A es la reunión de dos rectas concurrentes.
- c) A es el conjunto de los puntos $\{O + m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{Z}\}$, donde $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es un sistema de referencia afín cualquiera de \mathcal{E}_3 . (Se distinguirán varios casos, según la forma de este sistema de referencia.)

22. a) Sea α un endomorfismo de E_n . Demostrar que el endomorfismo $\exp(\alpha)$ es ortogonal si, y solamente si, el endomorfismo α es antisimétrico, o sea verifica $\alpha + {}^t\alpha = 0$ (véase cap. IV). (Sugerencia: se podrá utilizar el hecho de que el endomorfismo $\alpha + {}^t\alpha$ es simétrico y por lo tanto diagonalizable.) Demostrar que entonces $\exp(\alpha)$ es ortogonal directo.

Deducir de aquí la forma general de los homomorfismos continuos del grupo aditivo \mathbf{R} en el grupo $\text{SO}(E)_n$.

b) Sea \mathcal{A} el espacio vectorial de los endomorfismos antisimétricos de E_n . Demostrar que la aplicación $\mathcal{A} \rightarrow \text{SO}(E_n), \alpha \mapsto \exp(\alpha)$ es suprayectiva. (Se podrá utilizar el teorema XIII.10.2 del tomo 1.) Demostrar que esta misma aplicación no es inyectiva.

23. Determinar todos los homomorfismos continuos del grupo aditivo \mathbf{R} en el grupo de las

traslaciones $T(\mathcal{E}_n)$. (Se demostrará que si f es un tal homomorfismo, existe un vector único $v \in E_n$ tal que para todo $t \in \mathbf{R}$, $f(t)$ es la traslación de vector tv .)

***24.** Se supone aquí $n = 2$ y se da un homomorfismo continuo φ del grupo aditivo \mathbf{R} en el grupo $\text{Is}(\mathcal{E}_2)$. Demostrar que si los φ_t no son todas traslaciones, existe un punto $0 \in \mathcal{E}_2$ tal que para todo real t , φ_t sea una rotación afín de centro O . Deducir de aquí, en este caso, la forma del homomorfismo φ . (Utilizar el ejercicio 22.)

***25.** Se supone aquí $n = 3$.

a) Sean φ_1 y φ_2 dos movimientos helicoidales no reducidos a traslaciones y de ejes paralelos. Demostrar que si $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$, entonces los ejes de φ_1 y φ_2 son iguales.

b) Sea $\Phi : t \mapsto \Phi_t$ un homomorfismo continuo del grupo aditivo \mathbf{R} en el grupo $\text{Dep}(\mathcal{E}_3)$. Para todo real t , se designan respectivamente por r_t y τ_t la rotación afín y la traslación tales que $\Phi_t = r_t \circ \tau_t = \tau_t \circ r_t$ (de modo que si $r_t \neq \text{Id}_{\mathcal{E}_3}$, el eje del movimiento helicoidal Φ_t es el eje de la rotación r_t). Demostrar que todos los movimientos helicoidales no iguales a traslaciones tienen el mismo eje. (En lo que sigue, se supondrá que tales movimientos helicoidales existen.)

Sugerencia: se podrán considerar las rotaciones vectoriales $u_t = L(\Phi_t) = L(r_t)$ y determinar, con ayuda del ejercicio 22, el homomorfismo $\mathbf{R} \rightarrow \text{SO}(E_3)$, $t \mapsto u_t$.

c) Deducir de b) que:

$$(\forall t \in \mathbf{R}, \forall t' \in \mathbf{R}) \quad r_{t+t'} = r_t \circ r_{t'} \quad \text{y} \quad \tau_{t+t'} = \tau_t \circ \tau_{t'}.$$

Utilizar este resultado para determinar por completo la forma del homomorfismo Φ .

d) Se da el nombre de *trayectorias* del homomorfismo Φ a los arcos parametrizados de la forma $t \mapsto \Phi_t(M)$, donde el punto $M \in \mathcal{E}_3$ es fijo. Determinar tales trayectorias. (Se hará una discusión completa, según la naturaleza del homomorfismo Φ y la posición del punto M en \mathcal{E}_3 .) (Véanse ejercicios III.38 y III.39, tomo 4.)

26. a) Sean A, B dos puntos distintos de un plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 . Demostrar que el conjunto de las rotaciones de centro A o B engendra el grupo $\text{Dep}(\mathcal{E}_2)$.

b) Sean D, Δ dos rectas distintas de un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 y sea G el subgrupo de $\text{Dep}(\mathcal{E}_3)$ engendrado por las rotaciones de eje D o Δ .

i) Si D y Δ son paralelas, demostrar que G es el grupo de las rotaciones cualesquiera de eje paralelo a D .

ii) Si D y Δ tienen un punto común O , demostrar que G es el grupo de las rotaciones cuyo eje pasa por O .

(Método posible: sea S la esfera de centro O y de radio 1. Demostrar que G opera transitivamente sobre S . Deducir de aquí que G contiene una simetría axial con un eje que pasa por O , y seguidamente que contiene *todas* las simetrías axiales cuyo eje pasa por O y llegar a la conclusión pedida.)

27. Sea U un abierto de \mathcal{E}_n y $f : U \rightarrow \mathcal{E}_n$ una aplicación diferenciable que verifica

$$(1) \quad (\forall M \in U), \quad Df_M \in O(E_n).$$

a) Demostrar que para todo $M_0 \in U$, existe un entorno U_0 de M_0 en U tal que

$$(\forall M \in U_0, \forall N \in U_0) \quad \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Sugerencia: aplicar el teorema de los incrementos finitos a f en un entorno convexo V_0 de M_0 . Seguidamente aplicar el teorema de inversión local y observar que toda función inversa local de f verifica (1).

b) Deducir de ahí que f es la restricción a U de una isometría de \mathcal{E}_n . (Utilizar el ejercicio I.26, y el teorema XIII.11.4 del tomo 1.)

CAPÍTULO III

Circunferencias, cónicas y esferas

1. Sea $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un sistema de referencia ortonormal del plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 .

a) Sea γ una circunferencia de centro O , de radio $r_0 > 0$. Demostrar que no existe ningún par (r, θ) de funciones numéricas continuas en γ tales que para todo $M \in \gamma$ los números $r(M)$ y $\theta(M)$ constituyan un sistema de coordenadas polares de M en el sistema de referencia dado.

Método propuesto: la función θ tendría que estar acotada; designando por $\varphi(\alpha)$ su valor en el punto de coordenadas cartesianas $r_0 \cos \alpha, r_0 \sin \alpha$, se debería tener

$$\varphi(\alpha) - \alpha \in \pi\mathbf{Z}, \text{ de donde } \varphi(\alpha) - \alpha = \text{Cte} \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$

lo cual supone una contradicción.

b) Deducir de aquí que no existe ningún sistema de coordenadas polares globales relativas al sistema de referencia dado y definido en un entorno de O .

Los ejercicios 2 a 17 hacen referencia a un plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 , eventualmente provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Los ejercicios 18 a 20 hacen referencia a un espacio afín euclídeo cualquiera \mathcal{E} .

2. Sea C una circunferencia de \mathcal{E}_2 cuyo centro no está en el origen O y sea (\mathcal{F}) la familia de circunferencias deducidas de C en las homotecias arbitrarias de centro O . Determinar el lugar de los puntos de contacto de las tangentes a las circunferencias de (\mathcal{F}) trazadas desde un punto dado de \mathcal{E}_2 .

3. Sea C una circunferencia fija y Γ una circunferencia variable en un haz lineal (Φ) de circunferencias. Se designa por Δ_Γ el eje radical de C y Γ (cuando se halla definido).

Determinar, cuando Γ varía:

a) El lugar del polo de Δ respecto a C .

b) El lugar del polo de Δ respecto a Γ .

4. Sea C una circunferencia dada de centro Ω y O un punto dado. Hallar el lugar de los centros de las circunferencias que pasan por O y que cortan a C en dos puntos vistos desde Ω bajo un ángulo recto.

5. Parametrizando la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, demostrar que es cortada por la superficie de ecuación

$$x^4 + y^4 + z^4 - a^4 = 0$$

según 4 círculos máximos.

6. Sea Γ la cúbica alabeada definida por $t \mapsto M(t)$, siendo las coordenadas de $M(t)$: $x = t, y = t^2, z = t^3$ ($t \in \mathbf{R}$).

Se dan tres puntos $M_i = M(t_i)$ $1 \leq i \leq 3$ de Γ . Una esfera variable que pasa por M_i vuelve a cortar en general a Γ según otros tres puntos N_i ($1 \leq i \leq 3$). Demostrar que la dirección del plano que pasa por los N_i depende solamente de M_1, M_2 y M_3 .

(E. P. 1972.)

7. Se da una esfera S de \mathcal{E}_3 y dos rectas T_1, T_2 tangentes a S no coplanarias. Sea T una tangente variable a S que corta a T_1 y T_2 . Demostrar que el lugar del punto de contacto de T y S está formado por dos circunferencias.

8. Sean dos rectas de \mathcal{E}_2 , D_1 y D_2 concurrentes en O . Se da un punto $A_i \in D_i$ ($i = 1, 2$) con $A_1 \neq O, A_2 \neq O$. Determinar el lugar del punto de contacto de dos circunferencias Γ_1, Γ_2 variables, tangentes entre sí, tales que Γ_i se mantenga tangente en A_i a D_i ($i = 1, 2$).

9. Sea C la curva de ecuación polar

$$r^2 - 2ar(1 + \cos \theta) + a^2 = 0 \quad (a = \text{Cte}).$$

Una recta Γ , que pasa por el origen O , vuelve a cortar a C en dos puntos M y M' .

a) Demostrar que existe una circunferencia Γ tangente a C en M y M'

b) Lugar del centro de Γ al variar Δ .

10. Sea \mathcal{P} la parábola de ecuación $2px - y^2 = 0$ y F su foco. Una recta variable D pasa por F y corta a \mathcal{P} en A y B . Lugar del centro de la circunferencia AOB .

11. Sea \mathcal{P} una parábola. A todo punto M exterior a \mathcal{P} se asocia la circunferencia Γ_M que pasa por M y por los dos puntos de contacto con \mathcal{P} de las tangentes a \mathcal{P} trazadas desde M .

Lugar de los puntos M tales que la circunferencia Γ_M sea tangente a \mathcal{P} .

12. Sean a, b, c, d, e, f seis reales. Demostrar la relación:

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & d^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & e^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & f^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 d^2 + b^2 e^2 + c^2 f^2 - 2abde - 2bcef - 2acdf.$$

b) Aplicación: *teorema de Ptolomeo* (método de *Cayley*). (Véase también el ejercicio 19.)

Sean (x_i, y_i) ($1 \leq i \leq 4$) las coordenadas de cuatro puntos M_i en \mathcal{E}_2 . Demostrar que estos puntos son cocíclicos si, y solamente si, verifican:

$$\begin{vmatrix} 0 & (M_1 M_2)^2 & (M_1 M_3)^2 & (M_1 M_4)^2 \\ (M_1 M_2)^2 & 0 & (M_2 M_3)^2 & (M_2 M_4)^2 \\ (M_1 M_3)^2 & (M_2 M_3)^2 & 0 & (M_3 M_4)^2 \\ (M_1 M_4)^2 & (M_2 M_4)^2 & (M_3 M_4)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

es decir:

$$(M_2 M_3)(M_1 M_4) \pm (M_1 M_3)(M_2 M_4) \pm (M_1 M_2)(M_3 M_4) = 0.$$

(Sugerencia: demostrar que los M_i son cocíclicos si, y solamente si, se tiene: $D = 0$, con

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Seguidamente ver que $D = 4\Delta$, donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_3^2 + y_3^2 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix}.$$

13. Sea E una elipse de focos F y F' . A cada punto M de E , se asocia el centro I_M de la circunferencia inscrita interiormente en el triángulo MFF' . Lugar de I_M .

(E. P.)

14. Sean F y B dos puntos. Se considera el conjunto Φ de las elipses Γ que admiten a F como foco y a B como uno de los vértices del eje menor. Obtener, al variar Γ en Φ :

- El lugar del centro de Γ ;
- El lugar del segundo foco de Γ ;
- El lugar de los otros tres vértices de Γ .

(E. P.)

15. Parábolas \mathcal{P} de parámetro constante cortan al eje Oy en dos puntos A y B . Lugar del punto común a las tangentes a \mathcal{P} en A y B .

16. Lugar del centro de una circunferencia variable que pasa por O y es tangente a una hipérbola fija de centro O .

(E. P.)

17. Lugar del centro de las hipérbolas equiláteras de foco O y que pasan por un punto dado A .

18. Sean A, B, C tres puntos de un espacio afín euclídeo. Se pone $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Demostrar que A, B, C están alineados si, y solamente si, se tiene:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 = 0$$

(este resultado sigue siendo válido cuando \mathcal{E} designa un espacio prehilbertiano cualquiera).

19. En un espacio afín euclídeo \mathcal{E} , se designa por f la inversión de polo O y de potencia k .

a) Expresar la distancia entre dos puntos $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ por medio de las distancias OA , OB y AB (utilizar el hecho de que los triángulos (OAB) y $(OB'A')$ son semejantes).

b) Se designa por A', B', C', D' , las imágenes por f de cuatro puntos distintos A, B, C, D de \mathcal{E} distintos de O . Establecer la relación:

$$\frac{A'B' \times C'D'}{A'C' \times B'D'} = \frac{AB \times CD}{AC \times BD}.$$

Caso en que uno de los puntos A, B, C, D coincide con O .

c) Demostrar que cuatro puntos distintos A, B, C, D de \mathcal{E} son cocíclicos si, y solamente si, se tiene:

$$AB \times CD \pm AC \times BD \pm AD \times BC = 0$$

(utilizar una inversión de polo A y escribir que las imágenes de B, C, D son puntos alineados).

(Se encuentra de este modo nuevamente el resultado del ejercicio 12; se podrá dar otra forma a la condición obtenida utilizando el ejercicio 18.)

20. Sea E un espacio prehilbertiano real cuyo producto escalar se designa por $x.y$.

a) Demostrar que la diferencial en el punto x de la aplicación $x \mapsto \|x\|^2$ es la aplicación lineal $E \rightarrow \mathbf{R}$, $u \mapsto 2u \cdot x$.

b) Sea f la inversión de polo O y de potencia k (k real $\neq 0$), es decir la aplicación

$$f : E \setminus \{0\} \rightarrow E, \quad x \mapsto k \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Demostrar que f es diferenciable y que su diferencial en el punto x es el producto de la homotecia vectorial de razón k por la simetría ortogonal respecto al hiperplano vectorial ortogonal a x .

c) Sea γ un arco de clase C^1 de E definido por la parametrización $\varphi : [a, b] \rightarrow E$, que no pasa por O ; demostrar que la longitud de su imagen $f(\gamma)$ por f es (véase cap. VI):

$$L = \int_a^b k \frac{\|\varphi'(t)\|}{\|\varphi(t)\|^2} dt.$$

Cilindros y conos. Conoides. Cuádricas

Los ejercicios 21 a 30 hacen referencia a un espacio afín de dimensión 3, eventualmente provisto de un sistema de referencia afín $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En los ejercicios 31 a 43, se supone el espacio \mathcal{E} euclídeo y el sistema de referencia afín $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormal.

21. Determinar una ecuación del cilindro de segundo grado que contiene al arco definido por la parametrización:

$$x = \frac{t^2}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{t}{t + 1}, \quad z = \frac{t + 1}{t^2 - t + 1}.$$

22. Determinar una ecuación del cono de segundo grado de vértice O y de directriz definida por:

$$a) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0, \quad ux + vy + wz + r = 0 \\ (\alpha\beta\gamma \neq 0, \quad (u, v, w) \neq (0, 0, 0))$$

$$b) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 - 2pz = 0, \quad ux + vy + wz + r = 0 \\ (\alpha\beta \neq 0, \quad (u, v, w) \neq (0, 0, 0)).$$

23. Sea a una constante no nula.

Determinar una ecuación del cono de tercer grado, de vértice O y de directriz definida paramétricamente por

$$x = a + t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \quad (t \in \mathbf{R}).$$

24. Determinar las rectas contenidas en las superficies de ecuaciones siguientes:

(E. P.)

$$a) \quad x^3 + xyz + y^3 + x^2 + y^2 = 0.$$

$$b) \quad xyz - a(yz + zx + xy) = 0 \quad (a \in \mathbf{R}^*).$$

$$c) \quad x(x^2 + y^2 + z^2) - ayz = 0 \quad (a \in \mathbf{R}^*).$$

$$d) \quad z(x^2 + y^2) - a(x + y) = 0 \quad (a \in \mathbf{R}^*).$$

$$e) \quad xyz - a(x^2 + y^2 + z^2) - b^2(x + y + z) = 0 \quad (a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}^*).$$

$$f) \quad z^2(x^2 + y^2 - z^2) + 2az(x^2 - y^2) + a^2(x^2 + y^2 + 2z^2) - a^4 = 0 \quad (a \in \mathbf{R}^*).$$

$$g) \quad 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

25. Determinar las rectas trazadas sobre la superficie de ecuación

$$x^2 y - yz - 2x = 0$$

(se podrá parametrizar esta superficie poniendo $x = u + v$).

26. (Ecuaciones de conos y de cilindros: método general)

Se designa por \mathcal{E} un espacio afín de dimensión 3 referido a un sistema afín de origen O , por S y Σ las superficies de \mathcal{E} definidas respectivamente por las ecuaciones $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, y se designa por $\Gamma = S \cap \Sigma$ la intersección de esta superficie.

a) Para que el punto M de coordenadas (x, y, z) pertenezca al cono (simétrico) C de vértice O y de directriz Γ , es necesario y suficiente que exista un real λ que verifique las ecuaciones

$$(1) \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0 \quad \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0.$$

Se obtiene pues una ecuación cartesiana de C al eliminar λ entre las relaciones (1).

Aplicación: Determinar una ecuación cartesiana del cono de vértice O cuya directriz sea la intersección de las superficies de ecuaciones:

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = z.$$

b) Para que el punto M de coordenadas (x, y, z) pertenezca al cilindro C , de directriz Γ y de generatrices paralelas a la dirección (a, b, c) es necesario y suficiente que exista un real t que verifique las relaciones

$$(3) \quad f(x + at, y + bt, z + ct) = 0, \quad \varphi(x + at, y + bt, z + ct) = 0.$$

Se obtiene por lo tanto una ecuación del cilindro C al eliminar t entre las relaciones (3).

Aplicación: Determinar una ecuación cartesiana del cilindro de generatrices paralelas al vector de componentes $(0, 1, 1)$, cuya directriz es la intersección de las superficies de ecuación (2).

27. (Conos y cilindros circunscritos)

Sea \mathcal{E} un espacio afín de dimensión 3 referido a un sistema afín de origen O y sea S la superficie de \mathcal{E} definida por la ecuación $f(x, y, z) = 0$, donde f designa una función numérica diferenciable sobre un abierto de \mathbf{R}^3 cuya diferencial no se anula.

a) Para que la recta de ecuaciones paramétricas $x = \lambda\xi$, $y = \lambda\eta$, $z = \lambda\zeta$ sea tangente a S en el punto de coordenadas $(\lambda_0\xi, \lambda_0\eta, \lambda_0\zeta)$, es necesario y suficiente que la función numérica

$$\theta : \lambda \mapsto f(\lambda\xi, \lambda\eta, \lambda\zeta)$$

esté definida en el entorno de λ_0 y verifique $\theta(\lambda_0) = 0$, $\theta'(\lambda_0) = 0$.

Se obtiene por lo tanto una ecuación cartesiana del cono de vértice O circunscrito a S al eliminar λ entre las relaciones:

$$(1) \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} [f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)] = 0.$$

b) Para que la recta de ecuaciones paramétricas

$$x = \xi + ta, \quad y = \eta + tb, \quad z = \zeta + tc \quad (t \in \mathbf{R})$$

sea tangente a S en el punto de coordenadas $(\xi + t_0 a, \eta + t_0 b, \zeta + t_0 c)$, es necesario y suficiente que la función

$$\theta : t \mapsto f(\xi + ta, \eta + tb, \zeta + tc)$$

esté definida en el entorno del punto t_0 y verifique $\theta(t_0) = 0$, $\theta'(t_0) = 0$ (utilizar los resultados del § VIII.4).

Se obtiene una ecuación del cilindro circunscrito a S , de generatrices paralelas a la dirección (a, b, c) , al eliminar t entre las ecuaciones

$$f(x + ta, y + tb, z + tc) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [f(x + ta, y + tb, z + tc)] = 0.$$

28. (Conos y cilindros circunscritos a una cuádrica)

Si $F(x, y, z)$ es un polinomio de segundo grado con coeficientes reales, pongamos:

$$F(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d,$$

se escribe, para todos los $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$P_F(X_1, X_2) = ax_1x_2 + a'y_1y_2 + a''z_1z_2 + b(y_1z_2 + y_2z_1) + b'(z_1x_2 + z_2x_1) \\ + b''(x_1y_2 + x_2y_1) + c(x_1 + x_2) + c'(y_1 + y_2) + c''(z_1 + z_2) + d$$

(P_F se dice obtenido «por desdoblamiento» a partir de F).

a) Sea M_0 un punto de coordenadas $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Deducir del ejercicio anterior que una ecuación del cono C_{M_0} de vértice M_0 circunscrito a la cuádrica S de ecuación $F = 0$ es (poniendo $X = (x, y, z)$)

$$(1) \quad [P_F(X_0, X)]^2 - F(X_0)F(X) = 0.$$

b) Cuando el cono C_{M_0} no se reduce a un punto, deducir de a) que el conjunto de los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde M_0 a F es una curva plana (por lo tanto una cónica).

c) Repetir el estudio anterior sustituyendo el punto M_0 por un vector \vec{u} no nulo y buscando las tangentes a S paralelas a \vec{u} . (Sol.: la ecuación (1) es sustituida por una ecuación de forma análoga: $(A(X))^2 - KF(X) = 0$, donde $K \in \mathbf{R}$ y donde A es un polinomio de grado 1 en x, y, z ; la conclusión de b) subsiste.)

29. Determinar la sección recta del cilindro que se apoya sobre la curva definida paramétricamente por:

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \quad (t \in \mathbf{R})$$

y de generatrices paralelas al vector \vec{u} de componentes $(1, 1, 1)$.

30. Determinar una ecuación del cilindro de segundo grado que admite como sección recta a la cónica definida por las ecuaciones

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \quad x - z = 0.$$

31. a) Preliminares

Sea E un espacio euclídeo de dimensión n , y q una forma cuadrática en E . Se designa por φ el endomorfismo simétrico de E asociado a q (es decir, el único elemento φ simétrico de $\mathcal{L}(E)$ tal que $(\forall x \in E) \varphi(x).x = q(x)$).

Demostrar que para que exista una base ortonormal de E constituida por vectores isotropos de q , es necesario y suficiente que $\text{Tr}(\varphi) = 0$. Cuando esto ocurre, demostrar que existen una infinidad de tales bases.

b) Aplicación

Sea Γ la cónica de ecuaciones $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0, z = 0$ ($\alpha\beta \neq 0$). Determinar el lugar de los puntos M tales que existe un triedro trirectángulo de origen M que se apoya sobre Γ . (Se utilizarán los preliminares y se considerará el cono de vértice M y de directriz Γ .)

32. Un cono de segundo grado se dice que es *equilátero* cuando contiene tres generatrices que forman un triedro trirectángulo. Cuando esto ocurre contiene entonces una infinidad, pudiendo una de las generatrices ser elegida arbitrariamente (véase ejercicio anterior, a)).

Utilizando el ejercicio anterior a), determinar:

a) El lugar de los puntos M tales que el cono circunscrito desde M a la cuádrica de ecuación

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0 \quad (\alpha\beta\gamma \neq 0) \text{ sea equilátero.}$$

b) El lugar de los puntos M tales que el cono circunscrito desde M a la cuádrica de ecuación

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 2pz = 0 \quad (\alpha\beta p \neq 0) \text{ sea equilátero.}$$

*33. Se da la cuádrica S de ecuación

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0 \quad (\alpha\beta\gamma \neq 0).$$

a) Determinar el lugar de los puntos M tales que el cono circunscrito a S desde M sea de revolución. (Se utilizarán los resultados del § III.8 y los del ejercicio 28.)

Solución. Se obtienen dos cónicas reales, denominadas *focales* de S , los vértices de cada una de ellas son los focos de la otra.

b) La misma pregunta sustituyendo S por el paraboloides de ecuación

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 2pz = 0 \quad (\alpha\beta p \neq 0).$$

34. Sea S la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2cz - R^2 = 0$ y Q_λ la cuádrica de ecuación

$$x^2 + y^2 + (1 + \lambda)z^2 - 2cz - R^2 = 0 \quad (\lambda, \text{ parámetro real}).$$

Un plano P tangente a S encuentra a Q según una cónica Γ . Demostrar que el punto F común a P y S es un foco de Γ . (E. P.)

35. Dos planos perpendiculares P_1 y P_2 varían de tal modo que $D_1 \subset P_1$ y $D_2 \subset P_2$, donde D_1 y D_2 son dos rectas no coplanarias.

Determinar la superficie S engendrada por la recta común a P_1 y P_2 . (Es un hiperboloide). ¿Cuáles son las secciones planas de S que son circunferencias? (Sol.: las secciones por planos perpendiculares a P_1 o P_2 .)

36. Sea S la superficie de ecuación

$$x^2 + 4y^2 - 2z = 0.$$

- a) Formar la ecuación del cono circunscrito a S , cuyo vértice es un punto cualquiera Ω .
 b) Lugar Γ de los puntos Ω tales que este cono corte al plano (Oxy) según una circunferencia real C .
 c) Cuando Γ recorre Ω , determinar la superficie engendrada por la recta que une a Ω con el centro de C .

(E. P.)

37. Sean dos rectas no coplanarias de \mathcal{E}_3 . Un punto $M \in \mathcal{E}_3$ se proyecta ortogonalmente en dos puntos respectivos H y H' sobre estas rectas. Determinar el lugar de los puntos M tales que

$$MH^2 + MH'^2 = a^2 \quad (a = \text{Cte})$$

(E. P.)

38. Lugar S de los puntos equidistantes del eje Oz y de la recta de ecuaciones

$$x + y - 1 = 0, \quad z = 0.$$

S es una superficie; buscar las rectas contenidas en S .

(E. P.)

39. Lugar de los puntos equidistantes de una recta y de un plano dados de \mathcal{E}_3 .

(E. P.)

40. Lugar de los centros de las esferas tangentes a una recta y a una circunferencia dadas en \mathcal{E}_3 .

(E. P.)

41. Sea S_1 la esfera de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2by + b^2 - R_1^2 = 0 \quad (b \in \mathbf{R}^*)$$

y S_2 la esfera de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2by + b^2 - R_2^2 = 0.$$

Lugar de los centros de las esferas tangentes a S_1 , a S_2 y al plano (Oxy) .

(E. P.)

42. Determinar las circunferencias contenidas en las superficies de ecuaciones siguientes:

a) $z(x^2 + y^2 + z^2) - a(x^2 - y^2) - a^2 z = 0 \quad (a \in \mathbf{R}^*).$

b) Superficie engendrada por una circunferencia de diámetro AB tangente en un punto fijo A de una recta fija Δ , al recorrer B una recta ortogonal a Δ y no coplanaria con Δ .

c) $x^3 + y^3 + z^3 - a^3 = 0 \quad (a \in \mathbf{R}^*).$

43. (Conoide de Plücker)

Se denomina *conoide de Plücker* a toda superficie S de \mathcal{E}_3 que admite, en un sistema de referencia ortonormal adecuado, una ecuación de la forma

$$(1) \quad z(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

a) Demostrar que S es un conoide de eje Oz . ¿Cuál es su eje? ¿Cuál es su cono director?

b) Sea G una generatriz de S y Π un plano que pasa por G . Demostrar que Π corta en general a S según G y según una elipse E que se proyecta ortogonalmente según una circunferencia Γ del plano Oxy . Demostrar que E es una directriz del conoide.

c) Demostrar que un conoide de Plücker se puede definir de dos maneras distintas:

i) Conoide recto de eje Δ , de directriz una elipse E que se proyecta ortogonalmente (sobre los planos ortogonales a Δ) según una circunferencia, y cortando además E a Δ .

ii) Lugar de las perpendiculares comunes a una recta dada Δ y a una recta variable D que pivota alrededor de un punto dado O de un plano dado P , sin que el punto O pertenezca a Δ y sin que el plano P sea ortogonal ni paralelo a Δ .

d) Sea S un conoide de Plücker en \mathcal{E}_3 y A un punto que no pertenece a S . Demostrar que el lugar de la proyección ortogonal de A sobre las distintas generatrices de S es una de las elipses determinadas en b).

Superficies de revolución

Los ejercicios 44 a 54 hacen referencia a un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 de dimensión 3 y de espacio director E_3 , eventualmente provisto de un sistema de referencia afín ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

44. Demostrar que las superficies definidas por las situaciones siguientes son de revolución y determinar su meridiano:

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - a^3 = 0$ ($a = \text{Cte}$).

b) $(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2 - a^4 = 0$ ($a = \text{Cte}$).

c) $x^4 + y^4 + z^4 + 12(x^2 yz + y^2 zx + z^2 xy) + 6(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) - xyz(x + y + z) - a^4 = 0$ ($a = \text{Cte}$).

45. Determinar una ecuación cartesiana y la meridiana de la superficie de revolución engendrada al girar la curva Γ de ecuaciones

$$z = 0, \quad y(x^2 + y^2) - 4(x^2 - y^2) = 0$$

alrededor de la recta Δ de ecuaciones $x = 0, y = z$.

46. Las mismas preguntas que en el ejercicio anterior sustituyendo,

a) la curva Γ por la recta de ecuaciones $x - 2y + z - 1 = 0, x - y = 0$ y la recta Δ por la recta de ecuaciones $2x + y = 0, x + y - z = 0$;

b) la curva Γ por el arco de ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

y la recta Δ por el eje Ox ;

c) la curva Γ por la curva de ecuaciones $z = 0, x^3 + y^3 - a^3 = 0$ ($a = \text{Cte}$) y la recta Δ por la recta de ecuaciones $x = y = z$.

47. Determinar una ecuación del hiperboloide engendrado al girar la recta D_1 alrededor de la recta D_2 , estando definidas estas rectas respectivamente por las ecuaciones siguientes

$$D_1 \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ x - 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

48. Determinar una ecuación de la superficie de revolución engendrada al girar la parábola de ecuaciones $x = a, y = 3z^2 + a^2 = 0$ alrededor del eje Oz .

49. Determinar una ecuación cartesiana y el meridiano de la superficie de revolución engendrada al girar la curva de ecuaciones $z = 0$, $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ alrededor de la recta Δ de ecuaciones $x = y = z$.

50. Sean a y b dos reales no nulos y D la recta de ecuaciones

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \quad z = 0.$$

a) Determinar los conos de revolución que contienen a D .

b) Determinar la intersección de todos los conos definidos en a).

(E. P.)

51. Sea Q una cuádrica de revolución (elipsoide, hiperboloide de una o dos hojas, o paraboloide) y sea F un foco común a todos los meridianos.

Sea P un plano que no pasa por F y corta a Q según una cónica real Γ .

Demostrar que el cono de vértice F y de base Γ es de revolución.

(E. P.)

52. (Circunferencias de Yvon Villarceau)

a) Sea Γ una circunferencia de \mathcal{E}_3 de centro O y de radio $R > 0$, y l un real tal que $0 < l < R$. Se considera una recta L tal que O se proyecte ortogonalmente sobre L en un punto H del plano P de Γ y que verifica $OH = l$, formando además la recta L con P un ángulo θ tal que

$$\cos \theta = \frac{l}{R}.$$

Demostrar que la circunferencia Γ engendra, al girar alrededor de L , una superficie tórica con garganta; a este efecto, se podrá elegir un sistema de referencia ortonormal $(H; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que \vec{k} dirija a L .

(Nota. Toda recta tal como L se dice que es una *focal* (de M. Robert) de la circunferencia Γ .)

b) Demostrar que todo plano que pasa por L forma con la circunferencia Γ un ángulo constante, y que toda esfera que pasa por Γ forma con L un ángulo constante.

c) Recíprocamente, se da una superficie tórica con garganta. Demostrar que puede ser engendrada por rotación de una circunferencia alrededor del eje de revolución L del toro, siendo L una focal de Γ .

Sea (V_1) la familia de circunferencias deducidas de Γ por las rotaciones de eje L y (V_2) la familia de circunferencias deducidas de las de (V_1) por simetrías planas arbitrarias cuyo plano contiene a L .

Demostrar que dos circunferencias distintas pertenecientes a una misma familia (V_1) o (V_2) son disjuntas, mientras que si $\Gamma_1 \in (V_1)$ y $\Gamma_2 \in (V_2)$, entonces Γ_1 y Γ_2 tienen dos puntos comunes y son simétricas respecto a un plano meridiano del toro.

d) Sean C_1 y C_2 las dos circunferencias secciones de la superficie tórica por un plano meridiano Π , y sea D una tangente común interior a C_1 y C_2 . Demostrar que la sección de la superficie por el plano P perpendicular a Π y que contiene a D está constituida por dos circunferencias, de las cuales una pertenece a (V_1) y la otra a (V_2) . (El plano P se dice que es *bitangente* a la superficie, ya que le es tangente en dos puntos que se precisarán.) ¿Cuáles son los puntos comunes a estas dos circunferencias?

*e) Sea I un punto del eje L de la superficie tórica, existe una inversión φ única de polo I que deja al otro globalmente invariante. Demostrar que φ permuta las familias (V_1) , (V_2) .

¿Cómo se transforman los planos P por φ ? Deducir de ahí que toda esfera que pasa por una de las circunferencias de (V_1) o (V_2) forma con (L) un ángulo constante y deducir de nuevo de este modo algunos de los resultados de b).

(Las circunferencias de las familias (V_1) y (V_2) reciben el nombre de *circunferencias de Villarceau* de la superficie tórica.)

53. En un espacio afín euclídeo de dimensión 3, sea S un conjunto no vacío que admite dos ejes de revolución D, D' distintos.

a) Si D y D' son paralelos, demostrar que S es una reunión de planos perpendiculares a D y D' .

b) Si D y D' tienen un punto común O , demostrar que S es una reunión de esferas de centro O (véase ejercicio II.26).

*c) Si D y D' son no coplanarios, demostrar que S es el espacio entero.

*54. Se refiere el espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Sea Γ la cónica de ecuación

$$z = 0, \quad \alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0 \quad (\alpha\beta \neq 0).$$

Determinar el lugar de los vértices de los paraboloides de revolución que contienen a Γ .

(E. P.)

CAPÍTULO IV

Operadores antisimétricos

1. Sea u un operador antisimétrico de un espacio euclídeo E .

a) Demostrar que el rango r de u es par y que si se pone $r = 2p$ existen reales a_1, a_2, \dots, a_p positivos estrictos tales que el polinomio característico $P_u(X)$ sea igual a

$$X^{n-2p} \prod_{i=1}^p (X^2 + a_i)$$

(se considera la matriz de u en una base ortonormal de E y se observará que una matriz antisimétrica real A es de la forma $A = iH$, siendo H hermitiana compleja).

b) Demostrar que si $Q(X)$ es un divisor de $P_u(X)$, de grado 1, el operador $Q(u)$ no es invertible. (Razonar sobre las matrices de u y $Q(u)$ en una base fija de E .) Deducir, razonando por recurrencia sobre n , que

- i) si n es par, E es suma directa ortogonal de planos estables por u ;
- ii) si n es impar, igual a $2m + 1$, E es suma directa ortogonal de m planos y de una recta estables por u .

2. Sea E un espacio euclídeo de dimensión n y sea f una función numérica de clase C^2 en un abierto Ω de E . Para todo $a \in \Omega$, se designa por q_a la forma cuadrática en E asociada a la *diferencial segunda* de f en a y se designa por u_a el operador simétrico de E asociado a q_a . Demostrar que el escalar $\text{Tr}(u_a)$ es igual a la *laplaciana* de f en a . Demostrar de este modo la invarianza de la laplaciana en el grupo ortogonal de E .

3. Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y Ω un abierto de E ; se designa por \mathcal{D}_Ω el espacio vectorial de las funciones numéricas de C^∞ en Ω .

Para toda base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E y todo $f \in \mathcal{D}_\Omega$, se designa por $\Delta_{\mathcal{B}}(f)$ la función g definida en Ω por

$$(\forall x = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \in \Omega), \quad g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

(siendo las derivadas respecto a las coordenadas x_i de x en la base \mathcal{B}).

Se define de este modo un operador $\Delta_{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\Omega})$ asociado a \mathcal{B} . Demostrar que para que se tenga $\Delta_{\mathcal{B}} = \Delta_{\mathcal{B}'}$, es necesario y suficiente que la matriz de paso de la base \mathcal{B} a la base \mathcal{B}' sea ortogonal.

(Se podrá hacer uso del ejercicio anterior.)

4. A) Preliminares

Sea E un espacio euclídeo de dimensión $n \geq 2$. Se da el nombre de *conmutante* de un subgrupo G de $GL(E)$ al subgrupo de $GL(E)$ constituido por los $u \in GL(E)$ tales que

$$\forall v \in GL(E) \quad u \circ v = v \circ u.$$

Demostrar que el conmutante del grupo ortogonal $O(E)$ es el grupo de las homotecias de E . (Sugerencia: utilizar la generación de $O(E)$ por las simetrías ortogonales hiperplanas.)

B) Sea E el espacio vectorial \mathbf{R}^n , con $n \geq 2$, y Ω un abierto no vacío de E . Se designa por \mathcal{D}_{Ω} el espacio vectorial de las funciones numéricas de clase C^{∞} en Ω y por D_1, D_2, \dots, D_n los operadores de \mathcal{D}_{Ω} definidos por

$$(\forall i (1 \leq i \leq n)) \quad (\forall f \in \mathcal{D}_{\Omega}) \quad D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

(siendo las derivaciones respecto a las coordenadas en la base canónica de \mathbf{R}^n).

Sea $A = (\alpha_{ij})$ una n -matriz cuadrada simétrica y Φ_A el operador de \mathcal{D}_{Ω} definido por

$$\Phi_A = \sum_{i,j} \alpha_{ij} D_i D_j.$$

El espacio E se halla provisto de la estructura euclídea canónica. Demostrar que para que se tenga

$$(\forall u \in O(E)), (\forall f \in \mathcal{D}_{\Omega}), \quad \Phi_A(f \circ u) = [\Phi_A(f)] \circ u,$$

es necesario y suficiente que la matriz A sea *escalar*, es decir, de la forma ρI_n , donde I_n es la matriz unidad de orden n y donde $\rho \in \mathbf{R}$.

Sugerencia: utilizar A).

(E. N. S. Ulm, oral, 1973.)

5. (Generalización del ejercicio 2)

Sea E un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 2$ y p, q , enteros tales que $p+q=n$, $p \geq 1$, $q \geq 1$. Sea Q una forma cuadrática de signatura (p, q) en E y B su forma polar. Se da el nombre de *base reducida* a toda base \mathcal{B} de E en la cual la matriz de Q es igual a

$$L = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

donde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_p = +1$, $\varepsilon_{p+1} = \dots = \varepsilon_n = -1$.

a) Demostrar que para toda forma bilineal S en E , existe $u \in \mathcal{L}(E)$ único tal que

$$(1) \quad (\forall x \in E, \forall y \in E), \quad S(x, y) = B(u(x), y).$$

En una base reducida, ¿qué relación existe entre las matrices de u y de S ?

b) Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base reducida y sea f una función de clase C^∞ en un abierto Ω de E , con valores reales. Para todo $a \in E$, se designa por u_a el único operador asociado por (1) a la forma $S = D^2 f_a$ (diferencial segunda de f en a). Demostrar que el escalar $\text{Tr}(u_a)$ es igual al valor en el punto a de la función

$$\sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

siendo las derivadas respecto a las coordenadas en la base \mathcal{B} .

6. (Generalización del ejercicio 4)

Sea E un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 2$ y Ω un abierto de E ; se designa por \mathcal{D}_Ω el espacio vectorial de las funciones numéricas de clase C^∞ en Ω .

Para toda base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E y toda $f \in \mathcal{D}_\Omega$ se designa por $\Delta_{\mathcal{B}}(f)$ la función g definida en Ω por

$$\left(\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \Omega \right), \quad g(x) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

(donde el entero p es tal que $1 \leq p \leq n-1$). Se define de este modo un operador $\Delta_{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\Omega)$ asociado a \mathcal{B} .

Demostrar que para que se tenga $\Delta_{\mathcal{B}} = \Delta_{\mathcal{B}'}$, es necesario y suficiente que la matriz de paso P de \mathcal{B} a \mathcal{B}' verifique: $PLP = L$, donde L es la matriz definida al comienzo del ejercicio anterior.

*7. (Generalización del ejercicio 5)

A) Preliminares

Sea K un cuerpo conmutativo de característica $\neq 2$, E un K -espacio vectorial de dimensión finita y q una forma cuadrática no degenerada en E .

a) Demostrar que el grupo ortogonal $O(q)$ es engendrado por las simetrías hiperplanas, y q -ortogonales, respecto a los hiperplanos no q -isótropos. (Atención a los vectores isótropos.)

b) Deducir de ahí que el conmutante del grupo $O(q)$ (véase ejercicio 4) es el grupo de las homotecias de E .

B) Se admiten las hipótesis y notaciones del ejercicio 4, pero se dota aquí al espacio $E = \mathbb{R}^n$ de la forma cuadrática Q de signatura (p, q) (donde $p \geq 1$, $q \geq 1$ y $p + q = n$) definida por

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

Demostrar que para que se tenga

$$(\forall u \in O(Q), \forall f \in \mathcal{D}_\Omega), \quad \Phi_A(f \circ u) = [\Phi_A(f)] \circ u,$$

es necesario y suficiente que exista un $\rho \in \mathbf{R}$ tal que $A = \rho L$ (designando por L la matriz definida al comienzo del ejercicio 5).

Sugerencia: utilizar A).

8. Sea Ω abierto de un plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 y $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2 . Se da un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{E}_2 tal que $O \in \Omega$, y se designa por

- P la aplicación $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{E}_2$, $(r, \theta) \mapsto O + (r \cos \theta) \vec{i} + (r \sin \theta) \vec{j}$;
- U el abierto $P^{-1}(\Omega)$ de \mathbf{R}^2 .

Se pone finalmente $g(r, \theta) = f(P(r, \theta))$ para $(r, \theta) \in U$.

a) Demostrar la relación

$$(\forall (r, \theta) \in U), \quad \Delta f_{(P(r, \theta))} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

b) *Aplicación:* demostrar que los polinomios homogéneos de grado n de dos variables reales $P(x, y)$, con coeficientes reales, que verifican

$$(\forall x, \forall y) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

son los polinomios $Az^n + \overline{A}z^n$, donde $z = x + iy$ y donde A es una constante compleja arbitraria.

Campos de vectores

En los ejercicios 9 a 14, se da un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 de dimensión 3, provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Las coordenadas de un punto $M \in \mathcal{E}_3$ se designarán por (x, y, z) .

9. Sea Φ el campo de vectores definido en \mathcal{E}_3 por

$$(\forall M \in \mathcal{E}_3) \quad \Phi(M) = (2x + y + z) \vec{i} + (x + 2y + z) \vec{j} + (x + y + 2z) \vec{k}.$$

Calcular $\text{rot } \Phi$ y $\text{div } (\Phi)$. Determinar un potencial escalar de Φ .

(G. E.)

10. Sea Φ el campo de vectores definido en \mathcal{E}_3 por

$$(\forall M \in \mathcal{E}_3) \quad \Phi(M) = (x^2 - yz) \vec{i} + (y^2 - zx) \vec{j} + (z^2 - xy) \vec{k}.$$

a) Calcular $\text{div } (\Phi)$ y $\text{rot } (\Phi)$. Determinar un potencial escalar F de Φ .

b) Demostrar que las *líneas de campo* (véase tomo 4, § III.11) de Φ son los meridianos de los hiperboloides de revolución (Q_λ) de ecuación $yz + zx + xy = \lambda$ ($\lambda = \text{Cte arbitraria}$).

c) Por un punto fijo de \mathcal{E}_3 pasa en general un hiperboloide Q_λ y una superficie de ecuación $F = \text{Cte}$. Estudiar la disposición de los planos tangentes en M a cada una de estas superficies.

(G. E.)

11. En el abierto $U = \mathcal{E}_3 \setminus \{0\}$ de \mathcal{E}_3 se define el campo de vectores Φ por

$$(\forall M \in U), \quad \Phi(M) = \frac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

(habiéndose fijado una orientación de \mathcal{E}_3).

a) Determinar $\text{rot}(\Phi)$ y $\text{div}(\Phi)$.

b) Determinar (localmente) un potencial escalar y un potencial vector de Φ .

¿Admite el campo Φ un potencial escalar en el abierto U ? ¿Admite un potencial vector en el abierto U ?

12. Sea Ω un abierto de $\mathcal{E}_3 \setminus \{0\}$ y $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2 . Se designa por S la aplicación $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathcal{E}_3$, $(r, \varphi, \theta) \mapsto O + (r \cos \theta \cos \varphi) \vec{i} + (r \cos \theta \sin \varphi) \vec{j} + (r \sin \theta) \vec{k}$ y U el abierto $S^{-1}(\Omega)$. Se pone finalmente

$$(\forall (r, \varphi, \theta) \in U), \quad g(r, \varphi, \theta) = f(S(r, \varphi, \theta)).$$

Demostrar la relación, válida para $\sin \theta \neq 0$:

$$\begin{aligned} \forall (r, \varphi, \theta) \in U, \quad \Delta f(S(r, \varphi, \theta)) &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

13. Se designa por D el dominio del espacio euclídeo \mathcal{E}_n comprendido entre dos bolas del mismo centro O y radios R_1, R_2 ($R_1 < R_2$) y se considera una función numérica f de clase C^1 en D tal que para cada punto M de D , el vector $\text{grad}_M f$ sea nulo o colineal con \overrightarrow{OM} . Demostrar que existe entonces una función numérica φ de clase C^1 en $]R_1, R_2[$ tal que, para todo $M \in D$, se tiene:

$$f(M) = \varphi(\|\overrightarrow{OM}\|).$$

Método propuesto (evitando recurrir a funciones implícitas).

a) Demostrar primero que si γ es un arco cualquiera de clase C^1 cuyo soporte está contenido en una esfera de centro O , entonces la restricción de f al soporte de γ se reduce a una constante. (Un tal arco γ se define mediante una parametrización de la forma $[a, b] \rightarrow \mathcal{E}_n$, $t \mapsto M(t)$, que verifica $\overrightarrow{OM} \cdot dM/dt = 0$.)

b) Deducir de ahí que la restricción de f a cada esfera de centro O se reduce a una constante (como arcos γ se podrá tomar circunferencias de centro O); de donde resulta la existencia de una función φ tal que $f(M) = \varphi(\|\overrightarrow{OM}\|)$.

c) Utilizando la restricción de f a un segmento de una recta que pasa por O , demostrar que φ es de clase C^1 .

14. En el espacio euclídeo orientado \mathcal{E}_3 provisto de un sistema de referencia ortonormal se considera el campo de vectores \vec{V} cuyas componentes en el punto de coordenadas x, y, z son

$$P = -ay, \quad Q = ax, \quad R = b(x^2 + y^2) \quad (a, b = \text{Ctes}).$$

a) ¿Este campo admite un potencial vector? ¿Admite un potencial escalar?

b) Determinar una función numérica f de clase C^1 en \mathbf{R}^2 tal que el campo

$$\vec{W}: M \mapsto f(x, y) \vec{V}(M)$$

sea un campo de gradientes, que verifique $f(1, 0) = 1$. Determinar entonces un potencial escalar del campo \vec{W} .

Torsores

En los ejercicios 15 a 35 que siguen, \mathcal{E} designa un espacio euclídeo orientado de dimensión 3 y E designa su espacio director.

15. Sea V un subespacio vectorial del espacio vectorial J de los torsores sobre \mathcal{E} .

a) Demostrar que si todo torsor de \mathcal{E} es elemental, se tiene: $\dim(V) \leq 3$.

b) Sea d la dimensión máxima de un subespacio vectorial de V en el cual todo elemento es un deslizante, estando formado V por torsores elementales.

1. Demostrar que si $d = 3$, existe un punto $\Omega \in \mathcal{E}$ tal que V es el conjunto de los deslizantes g que verifican $g(\Omega) = 0$.

2. Demostrar que si $d = 2$, existe un punto $\Omega \in \mathcal{E}$ y un plano afín \mathcal{P} que contiene a Ω tales que V es la suma del espacio de los deslizantes cuyo eje central pasa por Ω y está contenido en \mathcal{P} , y del espacio de los pares de momento ortogonal a \mathcal{P} . Precisar en este caso los deslizantes que pertenecen a V .

3. Demostrar que si $d = 1$, existe un plano vectorial P de E tal que V es la reunión de los pares cuyo momento pertenece a P y de los deslizantes de resultante paralela a P^\perp .

(Nota. Evidentemente, si $d = 0$, V no es otro que el espacio de los pares.)

16. Sea τ un torsor y \mathcal{P} un plano afín de \mathcal{E} . Hallar el conjunto de los puntos $M \in \mathcal{P}$ tales que $\tau(M)$ forme con \mathcal{P} un ángulo constante dado. (Se hará la discusión según la naturaleza del torsor τ .)

17. Sea \mathcal{P} un plano afín de \mathcal{E} y τ un torsor. ¿Existe un deslizante g_1 , de eje central contenido en \mathcal{P} y un deslizante g_2 de eje central ortogonal a \mathcal{P} , tales que $\tau = g_1 + g_2$?

18. Sean g_1 y g_2 dos deslizantes de ejes centrales no paralelos. Hallar el lugar del eje central del torsor $g_1 + \lambda g_2$ cuando λ recorre \mathbf{R} .

19. Seis deslizantes no nulos admiten como ejes centrales respectivos las seis aristas de un tetraedro (no aplanado) de \mathcal{E} . Demostrar que estos seis deslizantes son linealmente independientes.

20. (Torsores ortogonales)

Sean τ_1 y τ_2 dos torsores sobre \mathcal{E} , de resultantes no nulas \vec{R}_1 y \vec{R}_2 . Demostrar la equivalencia de las proposiciones a) y b):

a) Los ejes centrales τ_1 y τ_2 son ortogonales y concurrentes.

b) Se tiene:

$$\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(\tau_1, \tau_2) = 0$$

(cuando esto ocurre, se dice que τ_1 y τ_2 son *ortogonales*).

21. Sean g_1 y g_2 dos deslizantes no nulos, de ejes centrales Δ_1 y Δ_2 y de resultantes \vec{R}_1 y \vec{R}_2 . Siendo $Q \in \mathcal{E}$ un punto fijo, se pone $G_i = g_i(Q)$ ($i = 1, 2$).

a) Demostrar que una parametrización de la perpendicular común a Δ_1 y Δ_2 es

$$\lambda \mapsto \Omega + \lambda(\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2) + \frac{(\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2) \wedge (\vec{R}_1 \wedge \vec{G}_2 - \vec{R}_2 \wedge \vec{G}_1)}{\|\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2\|^2}.$$

b) Demostrar que la distancia más corta d entre Δ_1 y Δ_2 es

$$d = \frac{|\mathcal{C}(g_1, g_2)|}{\|\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2\|}.$$

22. (Producto vectorial de dos torsores)

a) Sean τ_1 y τ_2 dos torsores sobre \mathcal{E} , de resultantes \vec{R}_1 y \vec{R}_2 . Demostrar que el campo de vectores τ sobre \mathcal{E} definidos por

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad \tau(M) = \vec{R}_1 \wedge \tau_2(M) - \vec{R}_2 \wedge \tau_1(M),$$

es un tisor de resultante $\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2$. En lo que sigue, se designará por

$$\tau = \tau_1 \wedge \tau_2.$$

b) La aplicación $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, (\tau_1, \tau_2) \mapsto \tau_1 \wedge \tau_2$ es bilineal antisimétrica. Establecer la relación ($\forall \tau_1 \in \mathcal{C}, \forall \tau_2 \in \mathcal{C}, \forall \tau_3 \in \mathcal{C}$)

$$\tau_1 \wedge (\tau_2 \wedge \tau_3) + \tau_2 \wedge (\tau_3 \wedge \tau_1) + \tau_3 \wedge (\tau_1 \wedge \tau_2) = 0.$$

c) Demostrar que si $\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2 \neq 0$, el eje central de $\tau_1 \wedge \tau_2$ es la perpendicular común a los ejes centrales de τ_1 y τ_2 .

23. (Teorema de Morley-Petersen)

a) Sean τ_1, τ_2, τ_3 tres torsores de resultantes no nulas, tales que $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$, y de ejes centrales no coplanarios dos a dos. Demostrar que existe una recta (necesariamente única) que corta al eje central de cada τ_i en ángulo recto.

Método sugerido: sea τ el tisor $\tau_2 \wedge \tau_3 + \tau_3 \wedge \tau_1 + \tau_1 \wedge \tau_2$ (véase ejercicio anterior). Se demostrará que τ es ortogonal a cada tisor τ_i (véase ejercicio 20) y se utilizarán los resultados del ejercicio anterior.

b) Deducir de a) el resultado que sigue:

Sean $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ tres rectas afines no coplanarias dos a dos. Por cada $i \in \mathbf{N}_3^* = \{1, 2, 3\}$, sea Δ_i la perpendicular común a las dos rectas $(\mathcal{D}_j)_{j \in \mathbf{N}_3^* \setminus \{i\}}$ y sea \mathcal{L}_i la perpendicular común a \mathcal{D}_i y Δ_i . Existe entonces una misma recta \mathcal{L} que corta a cada recta \mathcal{L}_i en ángulo recto.

Método sugerido: sea g_i un deslizante no nulo de eje central \mathcal{D}_i (para $i \in \mathbf{N}_3^*$). Escribir la relación (J) del ejercicio anterior para los g_i , después aplicar a).

24. Sean τ_1 y τ_2 dos torsores de resultante no nula. Demostrar que se tiene: $\tau_1 \wedge \tau_2 = 0$ (véase ejercicio 22) si, y solamente si, τ_1 y τ_2 tienen el mismo eje central.

25. Sea τ un tisor de resultante no nula y sea A un punto de \mathcal{E} no perteneciente al eje central Δ de τ .

Se designa por $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un sistema de referencia ortonormal directo de \mathcal{E} tal que $O \in \Delta$, que \vec{OA} sea colineal con \vec{i} y que \vec{k} sea paralelo a Δ , y se pone $\vec{OA} = a\vec{i}$ ($a \in \mathbf{R}^*$).

Demostrar que el conjunto de los puntos M tales que los vectores \vec{AM} y $\tau(M)$ sean colineales es la «cúbica alabeada» de ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{a}{1+t^2}, \quad y = \frac{at}{1+t^2}, \quad z = t$$

respecto al sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

26. (Derivada de un torsor)

Sea $t \mapsto \tau_t$ una aplicación derivable de un intervalo I de \mathbf{R} en el espacio vectorial \mathfrak{J} de los torsos sobre \mathcal{E} .

Para todo punto $M \in \mathcal{E}$, se pone: $F(M, t) = \tau_t(M)$. Finalmente, se designa por $\vec{R}(t)$ la resultante de τ_t .

a) Demostrar que la resultante de $\frac{d}{dt}(\tau_t)$ es $\vec{R}'(t)$ y que su momento en M es $\frac{\partial}{\partial t}(F(M, t))$.

b) Sea $t \mapsto M(t)$ una aplicación derivable de I en \mathcal{E} . Se pone: $G(t) = \tau_t(M(t))$, para $t \in I$. Demostrar que el momento del torsor $\frac{d}{dt}(\tau_t)$ en el punto $M(t)$ es

$$\frac{dM}{dt} \wedge \vec{R}(t) + \frac{dG}{dt}.$$

(Nota: Dar un torsor τ_t equivale a dar sus elementos de reducción $(\vec{R}(t), G(t))$ en el punto $M(t)$; de este modo es como se suelen conocer, en Mecánica, los torsos dependientes del tiempo que intervienen en los problemas concretos.)

(En los ejercicios que sigue, se designa por \mathcal{D} el conjunto de las rectas afines de \mathcal{E} .)

27. (Coordenadas plückerianas)

a) Sea O un punto fijo de \mathcal{E} y Δ una recta ($\Delta \in \mathcal{D}$).

Demostrar que el conjunto g_Δ de los deslizantes no nulos de eje central Δ es una recta vectorial del espacio \mathfrak{J} de los torsos, privada del torsor nulo. Si $\tau \in g_\Delta$, ¿qué se puede decir de los elementos de reducción $(\vec{R}_\tau, \tau(0))$ de τ en O ? Recíprocamente, si \vec{R} y \vec{S} son dos vectores tales que $\vec{R} \cdot \vec{S} = 0$ y $\vec{R} \neq 0$, el torsor cuyos elementos de reducción en O son (\vec{R}, \vec{S}) es un deslizante no nulo.

b) Sea ρ un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de origen O . Se da el nombre de sistema de coordenadas plückerianas (respecto a ρ) de una recta Δ a todo elemento

$$(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}$$

tal que

$$\vec{R} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{S} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k}$$

sean los elementos de reducción en O de un deslizante no nulo de eje central Δ . ¿En qué forma se deducen unos de otros los distintos sistemas de coordenadas plückerianas de Δ ? ¿Cuáles son los elementos de \mathbf{R}^6 iguales a uno de los sistemas de coordenadas plückerianas de una recta dada?

29. En esta pregunta se da un sistema de referencia ortonormal directo ρ de \mathcal{E} .

a) Sean M_1, M_2 dos puntos distintos de \mathcal{E} , de coordenadas respectivas (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2$). Determinar un sistema de coordenadas plückerianas de la recta $(M_1 M_2)$.

d) Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ dos planos afines no paralelos de \mathcal{E} , que tienen respectivamente por ecuación

$$u_i x + v_i y + w_i z + h_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Determinar un sistema de coordenadas plückerianas de la recta $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

30. (Complejos lineales)

Sea τ un torsor no nulo; si Δ es una recta y si existe un deslizante no nulo g de eje central Δ tal que $\mathcal{C}(\tau, g) = 0$, entonces se tiene $\mathcal{C}(\tau, g) = 0$ para todo deslizante no nulo g de eje central Δ . Cuando esto ocurre, se dice que Δ es una *recta de momento nulo* respecto a τ . El conjunto Γ_τ de las rectas de momento nulo respecto a τ recibe el nombre de *complejo lineal* definido por τ .

a) Precisar el conjunto Γ_τ cuando el torsor τ es elemental.

b) Se supone τ no elemental.

1. Demostrar que si $A \in \mathcal{E}$ es un punto dado, el conjunto de las rectas $\Delta \in \Gamma_\tau$ que pasan por A es el conjunto de las rectas de un plano $\mathcal{P}_\tau(A)$ que pasa por A . Este plano recibe el nombre de *plano polar* de A (respecto a τ).

2. Demostrar que si \mathcal{P} es un plano no paralelo al eje central D_τ de τ , el conjunto de las rectas $\Delta \in \Gamma_\tau$ que están contenidas en \mathcal{P} es el conjunto de las rectas de \mathcal{P} que pasan por un punto fijo $m(\mathcal{P})$. Este punto $m(\mathcal{P})$ recibe el nombre de *polo* de \mathcal{P} (respecto a τ).

c) Supuesto el torsor τ no elemental, demostrar las propiedades siguientes:

— para todos los puntos $A, B \in \mathcal{E}$, se tiene, $(B \in \mathcal{P}_\tau(A)) \Leftrightarrow (A \in \mathcal{P}_\tau(B))$;

— para todo $A \in \mathcal{E}$, se tiene, $m(\mathcal{P}_\tau(A)) = A$, y para todo plano \mathcal{P} no paralelo al eje central de τ , se tiene: $\mathcal{P}_\tau(m(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$;

— la aplicación $A \mapsto \mathcal{P}_\tau(A)$ es una biyección de \mathcal{E} en el conjunto de los planos de \mathcal{E} no paralelos al eje central de τ , cuya aplicación recíproca es $\mathcal{P} \mapsto m(\mathcal{P})$.

d) Si el punto $A \in \mathcal{E}$ describe una recta Δ no paralela a D_τ demostrar que el plano polar $\mathcal{P}_\tau(A)$ pivota alrededor de una recta ${}^c\Delta$ (que se denomina *conjugada* de Δ respecto a τ). Precisar el conjunto de los planos $(\mathcal{P}_\tau(A))_{A \in \Delta}$. Demostrar que ${}^c\Delta$ es también el lugar de los polos de los planos no paralelos a D_τ y que contiene a Δ . Estudiar los planos $\mathcal{P}_\tau(A)$ cuando A describe una recta Δ paralela a D_τ . Sea \mathcal{D}' el conjunto de las rectas no paralelas a D_τ , estudiar la aplicación

$$\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}, \quad \Delta \mapsto {}^c\Delta.$$

31. (Este ejercicio utiliza las notaciones y resultados del anterior.)

Sea Γ_τ el complejo lineal definido por un torsor τ no elemental, de eje central D_τ .

a) Sea A un punto dado de \mathcal{E}_1 no perteneciente a D_τ . Demostrar que el conjunto reunión de la paralela a D_τ que pasa por A y de las rectas $\Delta \in \mathcal{D}'$, que pasan por A y *ortogonales a su conjugada* ${}^c\Delta$, es un cono de segundo grado $C(A)$, cuyas secciones por planos ortogonales a D_τ son circunferencias. (Nota. El cono $C(A)$ es un *cono de Hachette*, es decir un cono tal que cada plano de sección circular es ortogonal a una de las generatrices.)

b) Sea \mathcal{P} un plano afín de \mathcal{E} . Demostrar que en general, las rectas $\Delta \in \mathcal{D}'$ contenidas en \mathcal{P} y *ortogonales a su conjugada* ${}^c\Delta$ constituyen el conjunto de las tangentes no paralelas a D_τ a una cónica propia γ del plano \mathcal{P} .

c) Se da de nuevo un punto $A \in \mathcal{E} \setminus D_\tau$. Demostrar que la cúbica alabeada definida en el ejercicio 25 está contenida en el cono $C(A)$.

32. Sea τ un torsor no elemental sobre \mathcal{E} y Δ_1, Δ_2 dos rectas afines de \mathcal{E} . Demostrar que, para que existan dos deslizantes no nulos g_1, g_2 de ejes centrales respectivos Δ_1, Δ_2 tales que $\tau = g_1 + g_2$ es necesario y suficiente que Δ_1 y Δ_2 sean *conjugadas* respecto a τ (véase ejercicio 30).

33. Sea τ un torsor no elemental y Δ_1, Δ_2 dos rectas *conjugadas* (véase ejercicio 30) respecto a τ . Demostrar que la perpendicular común a Δ_1 y Δ_2 corta al eje central de \mathcal{E} en ángulo recto.

34. Sea τ un torsor no elemental y Δ_1, Δ_2 dos rectas de \mathcal{E} *no conjugadas* respecto a τ (véase ejercicio 30).

a) Demostrar que en general, existe una cuádrica propia Q tal que las rectas Δ que cortan a Δ_1 y Δ_2 y que pertenecen al complejo lineal Γ_τ (véase ejercicio 30), forman parte todas de un mismo sistema de generatrices (Σ) de Q .

*b) En las condiciones de a) y en el caso en que Q es una cuádrica propia, sea (Σ') el otro sistema de generatrices de Q .

Demostrar que existe un torsor τ' tal que toda recta de (Σ') pertenece al complejo lineal $\Sigma_{\tau'}$.

*35. Sea τ un torsor no elemental de \mathcal{E} . Se fija un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} ; se define una recta Δ no paralela al eje central de τ mediante un sistema de coordenadas plückerianas $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ (véase ejercicio 27). Determinar en función de $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, un sistema de coordenadas plückerianas de la recta $^c\Delta$ conjugada de Δ respecto a τ (véase ejercicio 30).

CAPÍTULO V

Los ejercicios 1 a 3 hacen referencia a un plano afín real \mathcal{P} , provisto eventualmente de un sistema de referencia afín $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Sea γ el arco definido por la parametrización, definida en \mathbf{R} :

$$t \mapsto M(t) \begin{cases} x(t) = e^{-1/t^2}, & y(t) = 0 & \text{para } t < 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \\ x(t) = 0, & y(t) = e^{-1/t^2} & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

Demostrar que γ es de clase C^∞ y verifica

$$(\forall t \in \mathbf{R}), \quad \frac{dM}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2M}{dt^2} \quad \text{están ligados.}$$

¿Cuál es el soporte de γ ?

2. (Cúbicas unicursales)

Sean P_1, P_2 y Q tres polinomios en \mathbf{R} que verifican

- a) las fracciones P_1/Q y P_2/Q son irreducibles;
- b) $\sup(\text{gr}(P_1), \text{gr}(P_2), \text{gr}(Q)) = 3$;
- c) $\text{gr}(Q) \leq 2$ y Q no se anula nunca (*).

Se designa por γ el arco definido por la parametrización

$$x(t) = \frac{P_1(t)}{Q(t)}, \quad y(t) = \frac{P_2(t)}{Q(t)} \quad (t \in \mathbf{R})$$

1. Demostrar que se está en uno de los casos siguientes:

- γ es simple y admite un punto estacionario único,
- γ tiene un punto doble único, siendo los demás puntos simples, y γ es regular,
- γ es simple y regular.

En el último caso, establecer que el sistema $t_1 \in \mathbf{C}, t_2 \in \mathbf{C}, t_1 \neq t_2$ y $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$ admite en general una solución única.

2. Demostrar que existen reales A, B, C, D no todos nulos, definidos salvo por un factor de homogeneidad no nulo, que verifican la condición siguiente: para que tres puntos M_i sobre γ de parámetros t_i estén alineados, es necesario y suficiente que las funciones simétricas elementales σ_i de los t_i ($1 \leq i \leq 3$) verifiquen

$$(a) \quad A\sigma_1 + B\sigma_2 + C\sigma_3 + D = 0.$$

3. Deducir de aquí que γ presenta a lo sumo un punto de inflexión si tiene un punto estacionario, y tres puntos de inflexión en general si es regular. Cuando existen tres puntos de inflexión, demostrar que están alineados.

4. Sea $M(t)$ el punto de parámetro t de γ . Utilizar (a) para determinar el parámetro del punto T_M en que la tangente en M a γ vuelve a cortar a γ . (Se hará, en (a), $t_1 = t, t_2 = t_3$ y se justificará rigurosamente el procedimiento, utilizando los teoremas del § V.4). El punto T_M se dice que es *tangencial* de M .

Demostrar que los tangenciales de tres puntos alineados de γ están alineados.

3. Sea γ el arco definido por

$$x(t) = \frac{1+t^2}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t}{1+t^4}.$$

a) Determinar condiciones necesarias y suficientes, referidas a las funciones simétricas elementales σ_i de los t_i , para que los cuatro puntos M_i de parámetros t_i ($1 \leq i \leq 4$) sobre γ , estén alineados.

b) Deducir una condición necesaria y suficiente, referida a las funciones simétricas elementales s_i de los t_i ($1 \leq i \leq 3$) para que los tres puntos M_i de parámetros t_i ($1 \leq i \leq 3$), estén alineados.

c) Deducir los puntos de inflexión de γ . (En la condición hallada en b) se hará $t_1 = t_2 = t_3$; se justificará cuidadosamente este procedimiento valiéndose de los teoremas del § V.4.)

Los ejercicios 4 a 7 hacen referencia a un espacio afín real \mathcal{E} de dimensión 3, provisto eventualmente de un sistema de referencia afín $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4. Determinar el plano osculador en el punto de parámetro t de los arcos definidos por las parametrizaciones siguientes:

$$a) \quad x = \frac{t}{t^2+1}, \quad y = \frac{t^2}{(t^2+1)^2}, \quad z = \frac{t}{(t^2+1)^2}.$$

b) $x = t^2, y = t^3, z = t^4$. (Para esta curva, determinar el plano osculador geométrico en el origen.)

$$c) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad z = a \cos 2t.$$

5. Se da el arco γ definido por la parametrización $\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}, t \mapsto M(t)$, siendo las coordenadas de $M(t)$:

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad y = \frac{t}{1+t^2}, \quad z = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

Demostrar que γ es simple y regular.

a) Determinar una ecuación del plano osculador de γ en $M(t)$.

b) Sea $A \in \mathcal{E}$. Demostrar que en general, pasan por A tres planos osculadores a γ . Si M_1, M_2, M_3 son los tres puntos de γ correspondientes a estos planos, demostrar que los puntos A, M_1, M_2, M_3 son coplanarios.

*6. Generalizar el ejercicio anterior al caso de un arco γ definido por una parametrización de la forma

$$(1) \quad x = \frac{P_1(t)}{Q(t)}, \quad y = \frac{P_2(t)}{Q(t)}, \quad z = \frac{P_3(t)}{Q(t)}$$

donde P_1, P_2, P_3 y Q son cuatro polinomios de grado ≤ 3 , \mathbf{R} -linealmente independientes, siendo el polinomio Q de grado 0 o 2 y no anulándose nunca.

(Nota. Los arcos tales como γ , con P_1, P_2, P_3, Q linealmente independientes y Q cualquiera, reciben el nombre de cúbicas alabeadas.)

7. Sea γ el arco definido por $x = t^2, y = t^3, z = t^4$.

a) Escribir una condición necesaria y suficiente, referente a las funciones simétricas elementales σ_i de los t_i , para que cuatro puntos M_i de parámetros t_i ($1 \leq i \leq 4$), sean coplanarios.

b) Deducir un sistema de condiciones necesarias y suficientes, referentes a las funciones simétricas elementales s_i de los t_i , para que tres puntos de parámetros t_i ($1 \leq i \leq 3$) estén alineados.

c) Sea $M(t)$ el punto de parámetro t de γ . Deducir de a) los planos osculadores a γ que pasan por M , distintos del plano osculador en M . (En la relación hallada en a) se hará $t_1 = t$ y $t_2 = t_3 = t_4$, y se justificará rigurosamente este procedimiento valiéndose de los teoremas del § V.6.)

8. Estudiar las curvas definidas, respecto a un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de un plano afín, mediante las parametrizaciones siguientes:

$$a) \quad x = 1 + t^2 + t^4, \quad y = 2t^2 - 3t^4 + t^5.$$

$$b) \quad x = t + t^2 - t^3, \quad y = t^2 + t^3 - t^5.$$

$$c) \quad x = \frac{t^3}{t^2 + 2t - 2}, \quad y = \frac{2t^2 - 2}{t - 1} \quad \text{y} \quad x = \frac{t^2}{(t - 2)(t + 1)}, \quad y = \frac{t^2(t + 2)}{t + 1}.$$

$$d) \quad x + 2t + t^2, \quad y = 2t - \frac{1}{t^2} \quad \text{y} \quad x = \frac{t^3 - 2t^2 + 2}{(t - 2)(t^2 - 1)}, \quad y = \frac{t^3 - t^2 - t + 2}{(t - 2)(t^2 - 1)}.$$

$$e) \quad x = \frac{e^t}{\cos t}, \quad y = e^t \sin t.$$

$$f) \quad x = \frac{1}{e^t - 1 - t}, \quad y = \frac{1}{t \operatorname{Log}(1 + t)} \quad \text{y} \quad x = \frac{2t^2}{t - 1}, \quad y = \frac{e^t}{t - 1}.$$

$$g) \quad x = t e^{2/t}, \quad y = (t - 2) e^{-1/t} \quad \text{y} \quad x = \frac{1 - 2t}{t^2}, \quad y = e^{t + \frac{1}{t}}.$$

$$h) \quad x + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}, \quad y = e^{t + \frac{1}{t}} \quad \text{y} \quad x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} \frac{t}{5}.$$

$$i) \quad x = \operatorname{Log} \frac{t^4}{(t - 2)^2}, \quad y = \frac{t^2(t - 6)}{5}.$$

$$j) \quad x = \frac{t^2 - 1}{t^3}, \quad y = \frac{(t^2 - 1)^2}{t^4} \quad \text{y} \quad x = \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)(2 - t)}, \quad y = \frac{t^3}{2 - 3t + t^2}.$$

$$k) \quad x = \frac{a}{t} + b - 3t - \frac{1}{t^3}, \quad y = at + b - \frac{3}{t} + t^3 \quad (a, b = \text{Ctes}).$$

$$x = (1 + 2t\sqrt{1 - t^2})^{1/2} + (1 - 2t\sqrt{1 - t^2})^{1/2}$$

$$l) \quad y = (1 - 2t\sqrt{1 - t^2})^{1/2} - (1 + 2t\sqrt{1 - t^2})^{1/2}.$$

$$m) \quad x = \frac{a}{\cos 3t}, \quad y = \frac{a}{\sin 2t \sin^2 3t} \quad \text{y} \quad x = \frac{t+1}{t(t-1)(t+2)}, \quad y = \frac{1}{t^2-1}.$$

9. Estudiar las curvas definidas en un sistema de referencia afín $(O; i, j)$ de un plano afín mediante las ecuaciones siguientes:

$$a) \quad (x^2 + y^2) + 3x^2y - y^3 = 0. \quad b) \quad 2x^4 + y^4 + y(3x^2 + 2y^2) + y^2 = 0.$$

$$c) \quad (x^2 - y^2)^2 + y^3(y+1) = 0. \quad d) \quad (x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

$$e) \quad x^4 + x^3y - y^2 = 0. \quad f) \quad x^3 + y^3 + 3mxy + 1 = 0 \quad (m, \text{ parámetro real}).$$

$$*g) \quad x^4 + y^4 - \lambda x^2 y^2 - \lambda(x^2 + y^2) + 1 = 0 \quad (\text{discutir según el parámetro real } \lambda).$$

10. a) Sea Ω un intervalo abierto de \mathbf{R}^2 , con centro en el origen, y sea $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^p ($p \geq 1$) tal que $f(0,0) = 0$. Establecer la existencia de dos funciones $g: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ y $h: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^{p-1} , tales que $g(0,0) = f'_x(0,0)$, $h(0,0) = f'_y(0,0)$ y

$$(1) \quad (\forall (x,y) \in \Omega) \quad f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y).$$

(Se podrá utilizar la relación:

$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx, ty) dt.$$

b) Con más generalidad, sea U una bola abierta de centro O en un e.v.n. completo E y sea $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^p ($p \geq 1$) que verifica $f(0) = 0$ y $f^{(k)}(0) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$ ($n \leq p$). Aplicando la fórmula de Taylor con resto integral de orden $n-1$ a la función $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto f(tX)$ (véase tomo 2, X.9.2), establecer la relación:

$$(2) \quad (\forall X \in U) \quad f(X) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(tX) \cdot X \dots X dt.$$

En el caso en que E es de dimensión 2, traducir esta relación por una fórmula análoga a (1) utilizando las coordenadas x, y de X y las derivadas parciales de orden n de f en una base dada de E (para $n=2$, se vuelve a encontrar el lema de la pág. 347).

c) Sea Ω el intervalo de a), y sea $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^p ($p \geq 4$) que satisface a $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Se pone $r = f''_{xx}(0,0)$, $s = f''_{xy}(0,0)$, $t = f''_{yy}(0,0)$. Con ayuda de b) demostrar que existen funciones $a, b, c, d: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^{p-3} , tales que $a(0,0) = \frac{1}{6} f'''_{xxx}(0,0)$, $b(0,0) = \frac{1}{2} f'''_{x^2y}(0,0)$, $c(0,0) = \frac{1}{2} f'''_{xy^2}(0,0)$, $d(0,0) = \frac{1}{6} f'''_{yyy}(0,0)$.

*d) Con las notaciones de c), se supone $rt - s^2 = 0$, $r \neq 0$ y $d(0,0) \neq 0$. Demostrar que, mediante una biyección lineal de \mathbf{R}^2 , se puede reducir todo al caso en que $s = t = 0$ y $r \neq 0$. Demostrar seguidamente que existe un difeomorfismo de un entorno del origen sobre otro que permite reducirse al caso en que $c(0,0) = 0$; demostrar finalmente que, mediante un nuevo difeomorfismo, se puede reducir al caso en que $f(x,y) = x^2 + y^3$ (en otros términos existe un difeomorfismo $(x,y) \rightarrow (X,Y)$, definido en un entorno del origen tal que $f(x,y) = X^2 + Y^3$).

Deducir de aquí que, si $p \geq 5$, la curva de ecuación $f(x,y) = 0$ presenta, en el origen, la disposición de un retroceso de primera especie.

CAPÍTULO VI

En los ejercicios 1 a 25, nos situamos en un plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 , de espacio director E_2 y eventualmente provisto de un sistema de referencia ortonormal.

1. Una catenaria rueda sin deslizamiento (véase p. 735) sobre una recta D . Hallar el lugar del vértice de la catenaria. (E. P.)

2. Determinar una curva γ sobre la cual tenga que rodar sin deslizamiento una cardioide C de modo que el punto de retroceso de C permanezca sobre una recta fija. (E. P.)

(Nota. Una ecuación polar de C en un sistema de referencia ortonormal conveniente es, por ejemplo, $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$).)

3. Rectificar la curva cicloidal más general γ , que en un sistema de referencia ortonormal adecuado tenga una representación (véase § VII.7) tal como

$$x = \frac{a}{n} (n \cos \theta - \cos n\theta) \quad y = \frac{a}{n} (n \sin \theta - \sin n\theta) \quad (n \in \mathbf{R}^*).$$

4. Rectificar los arcos definidos, en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 , por las parametrizaciones siguientes:

a) $x = a(1 + \cos^2 t) \sin t, \quad y = a \sin^2 t \cos t.$

b) $x = 2a \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}, \quad y = \frac{2at}{(1 + t^2)^2}.$

c) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ ($a = \text{Cte}, a > 0$) (cicloide: véase ejercicio VII.22).

5. Una cardioide rueda sin deslizamiento sobre una recta. Lugar del centro de curvatura en el punto de contacto (E. P.). El mismo problema con una astroide (E. Sup. Elec.). El mismo problema con una catenaria (Prueba Común de Minas).

6. Un arco C rueda sin deslizamiento sobre una recta D . El centro de curvatura en el punto de contacto describe una cicloide recta de paso D (véase ejercicio VII.22). Determinar el arco C . (Escuela Central.)

Nota. En un sistema de referencia ortonormal adecuado, las ecuaciones paramétricas de una cicloide recta son de la forma: $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$

7. Se da una parábola \mathcal{P} y un punto M de \mathcal{P} . Demostrar que el radio de curvatura en M a \mathcal{P} es el doble de la longitud del segmento de la normal en M a \mathcal{P} comprendido entre M y la directriz de \mathcal{P} .

8. Se da un sistema de referencia ortonormal \mathcal{R} de \mathcal{E}_2 , y se considera la familia de cónicas Γ_λ cuya ecuación en \mathcal{R} es

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - ax = 0 \quad (\lambda \in \mathbf{R}, \quad a = \text{Cte no nula}).$$

Estas cónicas pasan todas por el punto A de coordenadas $(x, 0)$. Lugar del centro de curvatura en A a Γ_λ , al variar λ . (E. Sup. Elec.)

9. Determinar el radio de curvatura en el origen de la rama real, que pasa por O , de la curva definida, en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 , por

$$x^4 + y^4 + x^3 + y^3 = 0$$

10. Sean a, b, g funciones continuas en un intervalo I de \mathbf{R} . Se considera la ecuación

$$(1) \quad y''(x) + a(x) y'(x) + b(x) y(x) = g(x).$$

Determinar el lugar de los centros de curvatura en $M_0(x_0, y_0)$ a las curvas integrales de (1) que pasan por M_0 .

(Se sobreentiende que una curva integral de (1) es el arco definido por la parametrización $x \mapsto (x, y(x))$, $I \rightarrow \mathbf{R}^2$, donde y es una solución de (1), estando provisto \mathbf{R}^2 de su estructura euclídea natural.)

11. a) En un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 se define un arco γ mediante la parametrización

$$x(t) = \frac{\sinh t}{\cosh t + \cos t}, \quad y(t) = \frac{\sin t}{\cosh t + \cos t}.$$

Determinar la curvatura de γ en el punto $M(t)$.

b) La misma cuestión con $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $y = \operatorname{Log} \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

12. Se da un sistema de referencia ortonormal \mathcal{R} de \mathcal{E}_2 y la curva Γ de la cual una ecuación en \mathcal{R} es

$$x^4 + y^4 + x^2(x - 2y) + x^2 - ay^2 = 0 \quad (a > 0).$$

Esta curva Γ presenta dos ramas de clase C^∞ en el origen (véase teorema V.11.4). Calcular el radio de curvatura en el origen de cada una de las ramas. (Sup. Elec.)

13. Determinar un arco de \mathcal{E}_2 que admita en todo punto M una circunferencia de curvatura Γ_M tal que Γ_M pase por un punto fijo $O \in \mathcal{E}_2$.

(Observación: se puede tratar este ejercicio analíticamente por medio de coordenadas polares de origen O . Una solución elegante consiste en utilizar una inversión de polo O y la invarianza del contacto por difeomorfismo.)

14. Se da una circunferencia de \mathcal{E}_2 y un punto $O \in C$. Determinar el conjunto de los focos de las parábolas oscultrices a C en O . (E. P.)

15. Sea γ un arco de clase D^2 , regular y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $s \mapsto M = g(s)$. Se designa por $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ el sistema de referencia de Frenet asociado a g y por $\Omega(s)$ la función centro de curvatura, y una vez fijadas las constantes $\alpha \in]0, \pi/2[$ y $l \in \mathbf{R}_+^*$, se define una función $M(s)$ por

$$(\forall s) \quad N(s) = M(s) + l(\vec{\tau} \cos \alpha + \vec{\tau}_1 \sin \alpha).$$

Demostrar que la normal en $N(s)$ al arco definido por N pasa por $\Omega(s)$.

16. Sea γ un arco de \mathcal{E}_2 de clase C^k ($k \geq 2$) inmerso regularmente. Demostrar que en general las circunferencias de curvatura de γ en dos puntos próximos no se cortan. Precisar los casos de excepción.

17. Sea γ una cónica de foco F y de eje mayor D . Se da un punto M de γ tal que $M \notin D$. La normal en M a γ corta a D en N . La perpendicular en N a MN corta a la recta MF en K . La perpendicular en K a MF corta a MN en Ω .

Demostrar que Ω es el centro de curvatura en M de γ .

18. Sea γ una cónica de eje mayor D y M un punto de γ . La recta que pasa por M y de dirección simétrica respecto a D de la de la tangente en M a γ , vuelve a cortar a γ en un punto P . Demostrar que la circunferencia oscultriz en M a γ es la circunferencia que pasa por P y es tangente en M a γ .

19. Sea O un punto de \mathcal{E}_2 y γ un arco de clase D^2 simple, regular y sin punto de inflexión.

Se designa por Ω el centro de curvatura de γ en un punto M de γ , y por H la proyección ortogonal de O sobre la tangente en M a γ . Determinar γ de modo que se tenga

$$(\forall M) \overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{\Omega M} \quad (\text{donde } \lambda \text{ es una constante fija}).$$

Caso particular: $\frac{\lambda - 1}{\lambda} = 9$.

20. Sea D una recta de \mathcal{E}_2 y γ un arco simple de clase D^2 , regular y sin puntos de inflexión. Sea M un punto de γ y Ω el centro de curvatura de γ en M . Determinar el arco γ de modo que, cualquiera que sea M la recta $M\Omega$ corte a D en un punto P tal que $\overrightarrow{M\Omega} = \lambda \overrightarrow{MP}$ donde λ es una constante fija. (E. P.)

21. Determinar una ecuación intrínseca de una evolvente de evolvente de circunferencia.

22. Sea a una constante real no nula. Determinar un arco de ecuación intrínseca $R^2 = a^2 (e^{2s/a} - 1)$. Demostrar que un tal arco es una *tractriz* (véase ejercicio VII.19).

23. Sea a una constante real no nula. Determinar un arco de ecuación intrínseca $R^2 = 2as$. (Definir este arco geoméricamente.)

24. Sean a y k dos constantes reales no nulas. Determinar un arco sin puntos de inflexión que verifiquen: (E. P.)

a) $R^2 = a^2 + k^2 s^2$.

b) $R^2 = a^2 - k^2 s^2$.

c) $R^2 = k^2 s^2 - a^2$.

*25. Sea γ un arco de clase C^2 regular y que admite una ecuación intrínseca de la forma

$$\rho(s) = \rho_0 + \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + o\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad \text{donde } \rho_0 \in \mathbf{R}_+^*,$$

donde a y b son constantes y donde s varía en un entorno de $+\infty$. Demostrar que γ admite una circunferencia asintótica.

En los ejercicios 26 a 48, el espacio afín euclídeo orientado \mathcal{E}_3 se halla referido a un sistema de referencia ortonormado $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ directo, fijado de una vez para siempre.

26. Determinar el sistema de referencia de Frenet en el punto de parámetro t de cada uno de los arcos orientados definido por la parametrización siguiente:

a) $x = 4t + 6t^2 + 3t^3, \quad y = 6t^2 + 6t^3, \quad z = 6t^3$ (Escuela Central.)

b) $x = \frac{4t^2}{1+t}, \quad y = \frac{t^3}{1+t}, \quad z = \frac{1-t}{1+t}$ (Escuela Central.)

c) $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad z = a \cos 2t$ (E. P.)

27. Determinar en el punto de parámetro t , la curvatura y la torsión de cada uno de los arcos orientados definido por la parametrización siguiente:

a) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}t$ (¿cuál es la naturaleza de esta curva?).

b) $x = a \sin 3t, \quad y = a \cos 3t, \quad z = a \cos 2t$ (E. P.)

c) $x = \frac{1}{4}t^4, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{3}t^3, \quad z = \frac{1}{2}t^2$ (Escuela Central.)

$$d) \ x = \cos^4 t, \ y = \cos^3 t \operatorname{sen} t, \ z = \cos^3 t \quad (E. P.)$$

$$e) \ x = \cosh t, \ y = \operatorname{senh} t, \ z = t.$$

$$f) \ x = \frac{1}{3} t^3, \ y = t^2, \ z = 2t,$$

$$g) \ x = t^3 + 3t, \ y = 3t^2, \ z = t^3 - 3t.$$

$$h) \ x = a \cos t, \ y = a \operatorname{sen} t, \ z = a \operatorname{Log} |\cos t|.$$

$$i) \ x = a(t - \operatorname{sen} t), \ y = a(1 - \cos t), \ z = bt.$$

28. Se da el arco de intersección de las dos superficies de ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^3 + y^3 + z^3 = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{8}.$$

Demostrar que el punto A de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ es regular en γ . Determinar el radio de curvatura de γ en A .

(Sugerencia: se podrá parametrizar γ por medio del parámetro $t = x + y + z$.)

29. Se da el arco orientado γ definido por

$$x = \frac{\cos t}{\operatorname{senh} t}, \quad y = \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{senh} t}, \quad z = \frac{\cosh t}{\operatorname{senh} t} \quad (t \in \mathbf{R}_+^*).$$

a) Demostrar que el plano osculador en un punto de γ se mantiene tangente a una esfera fija.

b) Determinar en el punto de parámetro t de γ el sistema de referencia de Frenet y la curvatura de γ .

30. Se da el arco orientado γ definido por

$$x = t - \frac{1}{3} t^3, \quad y = t^2, \quad z = t + \frac{1}{3} t^3.$$

a) Demostrar que γ es una hélice; determinar en el punto M de parámetro t de γ el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de γ .

b) Sea T el punto en que la tangente en M a γ corta al plano $P = (O; \vec{i}, \vec{j})$. ¿Cuál es el lugar (C) de T ? Demostrar que la traza sobre P del plano osculador de γ en M se mantiene tangente en T a (C) .

31. Se da el arco orientado γ definido por

$$x = \int_0^t \frac{\cos u(1 + \cosh^2 u)}{\cosh^2 u} du, \quad y = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u(1 + \cosh^2 u)}{\cosh^2 u} du, \quad z = \int_0^t \frac{\operatorname{senh} u(1 + \cosh^2 u)}{\cosh^2 u} du.$$

Sean R y T el radio de curvatura y el radio de torsión de γ en el punto de parámetro t . Demostrar que la función

$$t \mapsto \frac{RT^2}{R^2 + T^2} \quad \text{es constante.}$$

32. En \mathcal{E}_3 se da un arco orientado regular γ de clase D^3 sin puntos de inflexión y un punto fijo $O \in \mathcal{E}_3$. Demostrar que, para que el plano osculador de γ sea tangente a una esfera fija de centro O , es necesario y suficiente que la función $\theta(s)/\rho(s)$ (asociada a una parametrización normal de γ fijada arbitrariamente) sea de la forma $as + b$, con a y b constantes.

Cuando esto ocurre, demostrar que el plano rectificante en todo punto de γ pasa por O .

33. Se da un arco orientado regular γ de clase D^3 sin puntos de inflexión. Sean $\rho(s)$ y $\theta(s)$ las funciones curvatura y torsión asociadas a una parametrización normal fija de γ . Hallar una condición necesaria y suficiente, referente a estas funciones, para que la circunferencia oscultriz en el punto $M(s)$ de γ sea sobreosculatriz.

34. Se da un arco γ de clase D^4 , regular, sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $s \mapsto M(s)$.

Estudiar la forma aproximada de γ en el entorno de un punto $M_0 = M(s_0)$ en el cual se tiene

$$\theta(s_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{ds}(s_0) \neq 0.$$

35. Sean γ y γ^1 dos arcos orientados, simples y regulares de clase D^k ($k \geq 3$), definidos mediante parametrizaciones normales $s \mapsto M(s)$, $s \mapsto M^1(s)$, al recorrer s un intervalo I que sea un entorno de O . Se supone que γ y γ^1 son tangentes en $A = M(0) = M^1(0)$ y que

$$\frac{dM}{ds}(0) = \frac{dM^1}{ds}(0).$$

Se supone además que para s suficientemente próximo de 0, los puntos M y M^1 son distintos. Hallar la posición límite de la recta MM^1 cuando s tiende hacia cero.

36. Sea γ un arco regular orientado sin puntos de inflexión de clase C^k , $k \geq 4$, definido mediante una parametrización normal $s \mapsto M(s)$ y sea $s \mapsto M_1(s)$ la función centro de curvatura correspondiente.

Demostrar que si la curvatura de γ es constante, lo es también la de γ_1 . Examinar el caso en que γ sea una hélice.

37. Sea γ un arco regular orientado simple de clase C^k , $k \geq 5$, que admite en cada punto M una esfera sobreosculatriz (S_M). Se designa por M_1 el centro de S_M . Sea (γ_1) el arco descrito por M_1 .

a) Demostrar que las normales principales a γ y γ_1 en M y M_1 respectivamente, son paralelas y que la tangente en M a γ (resp. en M_1 a γ_1) es paralela a la binormal en M_1 a γ_1 (resp. en M a γ).

b) Sean ρ y θ (resp. ρ_1 y θ_1) la curvatura y la torsión de γ en M (resp. de γ_1 en M_1). Establecer la relación:

$$(\rho\rho_1)^2 = (\theta\theta_1)^2.$$

38. Sea γ un arco de clase D^k ($k \geq 4$) regular y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $s \mapsto M(s)$. Se supone que la torsión de γ no se anula y se designan por $R(s)$ y $T(s)$ las funciones radio de curvatura y radio de torsión sobre γ . Demostrar que el soporte de γ está contenido en una esfera si, y solamente si, se tiene

$$\frac{R}{T} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dR}{ds} \right) = 0.$$

39. Sea γ un arco regular de clase D^k ($k \geq 3$) sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $g: I \rightarrow \mathcal{E}_3$, $s \mapsto g(s) = M$. Demostrar que para que exista un arco regular γ_1 sin puntos de inflexión, que admita una parametrización

$$h: I \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad s \mapsto h(s) = N,$$

y tal que para todo $s \in I$ la normal principal en M a γ sea igual a la binormal en N a γ_1 , es necesario y suficiente que existan reales A y B tales que

$$(\forall s \in I) \quad A(\rho^2(s) + \theta^2(s)) - B\tau(s) = 0$$

(designando por ρ y θ las funciones curvatura y torsión de γ asociadas a g).

***40.** Sea γ un arco regular de clase D^k ($k \geq 4$) que admite en todo punto M una esfera sobreosculatriz S_M . Demostrar que si S_M pasa por un punto fijo O , entonces γ se halla trazada sobre una esfera (véase ejercicio 38).

Nota: Se obtiene una solución «sin cálculos» de este problema utilizando V.8.3 y efectuando una inversión de polo O .

41. Evolutas y evolventes

Sea γ un arco de clase C^3 regular y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $g: s \mapsto M = g(s)$. Se designa por $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ el sistema de referencia de Frenet asociado a g y por ρ, θ las funciones curvatura y torsión correspondientes.

a) Sea φ una función numérica derivable de s y \vec{u} el vector definido por

$$(\forall s) \quad \vec{u}(s) = \vec{\beta} \cos \varphi(s) - \vec{\nu} \sin \varphi(s).$$

Finalmente, sea $\mathcal{D}(s)$ la recta que pasa por M y está dirigida por \vec{u} , y $N(s)$ el punto $M(s) + \lambda(s)\vec{u}(s)$ de $\mathcal{D}(s)$, donde λ designa una función numérica derivable de s . Demostrar que se puede elegir λ de modo que, para todo s , la tangente en $N(s)$ al arco Γ_1 descrito por N sea $\mathcal{D}(s)$ si, y solamente si, se tiene

$$(\forall s) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \theta(s).$$

b) Se supone aquí que γ es de clase C^2 solamente y regular. Sea \mathcal{T}_M la tangente en M a γ y $\vec{\tau}$ el vector unitario tangente en M asociado a g . Determinar todas las funciones numéricas derivables $\lambda(s)$ tales que el punto P definido por

$$(\forall s) \quad P(s) = M(s) + \mu(s)\vec{\tau}(s)$$

describa un arco Γ_2 que admita, cualquiera que sea s , la recta \mathcal{T}_M como una de sus normales en $P(s)$.

(Los arcos tales como Γ_1 reciben el nombre de *evolutas* de γ y los arcos tales como Γ_2 reciben el nombre de *evolventes* de γ , véase p. 377).

42. Curvas de Bertrand

Sea γ un arco orientado de clase D^k ($k \geq 5$) regular y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $g: s \mapsto M = g(s)$. Se designa por $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ el sistema de referencia de Frenet asociado a g y por ρ, θ las funciones curvatura y torsión correspondientes. Se supone a θ no idénticamente nula.

a) Sea $\lambda(s)$ una función numérica derivable de s ; se pone

$$M_1(s) = M(s) + \lambda(s)\vec{\nu}(s).$$

Se supone que el arco orientado γ_1 descrito por M_1 admite, cualquiera que sea s , la misma normal principal en el punto $M_1(s)$ que γ en $M(s)$. Se designa por $\vec{\tau}_1$ el vector unitario tangente en $M_1(s)$ a γ_1 .

Demostrar que el producto escalar $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}_1$ y la función λ son constantes. Deducir de aquí que existen constantes reales a y b tales que

$$(1) \quad (\forall s) \quad a\rho(s) + b\theta(s) = 1.$$

¿Es el par (a, b) único?

Demostrar además que si $\theta_1(s)$ designa la torsión de γ_1 en $M_1(s)$, la función $s \mapsto \theta(s)\theta_1(s)$ es constante.

b) Recíprocamente, se supone que existen reales a y b tales que se cumple (1) para todo s y se designa por γ_1 el arco orientado descrito por el punto M_1 definido por

$$(\forall s) \quad M_1(s) = M(s) + a\vec{v}(s).$$

Demostrar que la normal principal en $M_1(s)$ a γ_1 coincide con la de γ en $M(s)$.

¿Qué ocurre cuando γ es una hélice circular?

(Respuesta: las hélices circulares son las únicas curvas γ para las cuales se puede definir una infinidad de curvas γ_1 .)

Nota. A un arco γ que verifique (1) se le da el nombre de *curva de Bertrand*. Con las notaciones del enunciado (y suponiendo a γ de clase C^k , con k suficientemente grande) si γ es una curva de Bertrand, también lo es γ_1 .

43. Sea γ un arco regular de clase C^3 de \mathcal{E}_3 , sin puntos de inflexión y que admite en todas partes una esfera sobreosculatriz. Demostrar que si el radio de esta esfera es constante,

- i) o bien γ es una curva de curvatura constante (véase ejercicio 36);
- ii) o bien γ se halla trazada sobre una esfera.

44. Se supone a \mathbf{R}^3 dotado de la estructura euclídea orientada natural.

A cada punto M de \mathbf{R}^3 se asocia el vector $\vec{V}(M)$ cuyas componentes P, Q, R son funciones dadas de las coordenadas x, y, z , del punto M . ¿Es posible determinar una curva C que pase por un punto dado M_0 y cuya dirección de la binormal en cada punto sea la del vector \vec{V} ligado a este punto? La misma cuestión sustituyendo la expresión de «binormal» por la de «normal principal».

45. Determinar la hélice circular que presenta contacto de orden máximo con una curva dada C en un punto dado, conociendo el triedro de Serret-Frenet de C así como los valores de las funciones R, T , y sus derivadas en este punto.

46. Si f es una función de clase C^∞ de la variable real x , se designa por A la curva de ecuaciones

$$y = f'(x) \quad z = xf'(x) - 2f(x).$$

a) Determinar el plano osculador de A_f en el punto M de abscisa x , y demostrar que este plano depende solamente de las coordenadas de M .

b) ¿Qué condiciones deben verificar las funciones f_1 y f_2 para que A_{f_1} y A_{f_2} tengan un contacto de orden $> p$ en el punto de abscisa x ?

c) Demostrar que cada curva A_f admite localmente una representación paramétrica de la forma $x = \cos u[g'(u)]^{1/2}$, $y = \sin u[g'(u)]^{1/2}$, $z = g(u)$; determinar la función $g(u)$ de manera que la curva correspondiente esté trazada sobre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

47. a) Sea S un cono de revolución de eje Δ en \mathcal{E}_3 . Determinar las hélices de eje Δ trazadas sobre S . (Se demostrará que son las curvas que cortan a las generatrices de S según un ángulo constante.) Precisar las proyecciones horizontales de estas curvas, es decir las proyecciones ortogonales sobre un plano P ortogonal a Δ .

b) Sea γ una de las hélices definidas en a). Demostrar que el lugar de los centros de curvatura en los diversos puntos de γ es una hélice de eje Δ , trazada sobre un cono de revolución de eje Δ .

c) Sea (s) una espiral logarítmica en P , de polo O , siendo O el punto común a P y Δ . Demostrar que cada hélice de \mathcal{E}_3 que se proyecta ortogonalmente según (s) está trazada sobre un cono de revolución de eje Δ .

48. Sea γ un arco regular de clase C^2 de \mathcal{E}_3 definido por una parametrización normal

$$\varphi : [0, L] \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad s \mapsto \varphi(s).$$

Se supone a γ cerrado (es decir $\varphi(0) = \varphi(L)$); se pone $\vec{\tau} = d\varphi/ds$ y se designa por \vec{k} un vector fijo no nulo cualquiera de E_3 .

a) Demostrar que la función $s \mapsto \vec{k} \cdot \vec{\tau}(s)$ se anula por lo menos una vez sobre $[0, L]$ (hacer uso del hecho que $\int_0^L \vec{k} \cdot \vec{\tau}(s) ds = 0$). Deducir que la indicatriz de las tangentes a γ , que se designa por I_γ , corta a cada circunferencia máxima de la esfera unidad S .

b) Demostrar que la longitud de I_γ es por lo menos igual a 2π , alcanzándose la igualdad solamente cuando I_γ es una circunferencia máxima de S (se podrá utilizar el hecho de que un arco de S de longitud a puede ser encerrado en un casquete esférico de radio esférico $a/4$).

c) Deducir que la curvatura ρ de γ verifica $\int_0^L \rho ds \geq 2\pi$, alcanzándose solamente la igualdad cuando γ es una curva plana.

CAPÍTULO VII

1. Estudiar y construir las curvas cuya ecuación polar viene dada, respecto a un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 , por:

$$a) \quad r = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta \cos 2\theta}, \quad \text{y} \quad r = a \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} 3\theta.$$

b) $r = \frac{a \cos \theta}{\theta}$ (se demostrará que las tangentes en puntos alineados con el origen son concurrentes).

$$c) \quad \cos \theta = \frac{3ar^2}{r^2 + a^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{\cos \theta + \cos 5\theta}.$$

$$d) \quad \theta = r + \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad r = \frac{a}{\cos \frac{3\theta}{2}} \quad \text{y} \quad r = \frac{\operatorname{sen} \theta/2}{\operatorname{sen} \theta/3}$$

$$e) \quad r = \sqrt{\frac{1 - 2 \operatorname{sen} \theta}{1 - 2 \cos \theta}}.$$

$$f) \quad r = 5 \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta}; \quad r = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta \cos 2\theta}; \quad r = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta}$$

$$g) \quad \theta = \frac{r}{(r-1)^2(r+1)}; \quad r^2 - 4r + 6(1 - \operatorname{tg}^2 \theta) = 0.$$

$$h) r = \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\theta}.$$

2. Sea C la curva de ecuación polar $r = a \cos \theta + b$ respecto a un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 ($a, b = \text{Ctes}$).

a) Estudiar según los valores de a y b la forma de las curvas C ; escribir una ecuación cartesiana de las mismas. (Las curvas C reciben el nombre de *caracoles de Pascal*.)

b) Hallar el lugar de los puntos medios de las cuerdas de C que son vistas desde O según un ángulo recto.

c) Se consideran cuatro reales θ_i tales que los puntos M_i correspondientes de C ($r_i = a \cos \theta_i + b$) pertenecen a una misma recta D . Demostrar que $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ no depende de D .

3. Se define un arco γ de \mathcal{E}_2 sin puntos de inflexión mediante una parametrización en polares $t \mapsto (r(t), \theta(t))$ respecto a un sistema de referencia ortonormal.

Determinar γ de modo que el radio de curvatura $R(t)$ sea proporcional a $dr/d\theta$.

4. Estudiar la familia de los *óvalos de Cassini* \mathcal{C} , definidos en polares por

$$(n^2 - 1)r^2 - 4(cn^2 \cos \theta - a)r + 4(c^2 n^2 - a^2) = 0 \quad (a, b = \text{Cte}, n \text{ parámetro}).$$

Demostrar que existen dos puntos F y F' de \mathcal{E}_2 tales que $F' = 2c$ y que (\mathcal{C}) es el lugar geométrico de los puntos M que verifican $MF + nMF' = 2a$.

5. Respecto a un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{E}_2 se considera la espiral de Arquímedes \mathcal{S} de ecuación polar $r = a\theta$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$). Demostrar que los centros de curvatura de \mathcal{S} en los puntos situados sobre el eje Oy pertenecen a una misma curva algebraica.

6. Respecto a un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 , se considera la curva de ecuación polar $r = \frac{1}{\theta \cos \theta - \sin \theta}$.

Demostrar que existen una infinidad de asíntotas y que tales asíntotas son tangentes a una curva algebraica simple. (Escuela Central.)

*7. Sea γ un arco sin puntos de inflexión y que no pasa por O , definido en coordenadas polares $(r(t), \theta(t))$ respecto a un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 .

a) Determinar γ de modo que el radio de curvatura $R(t)$ verifique para todo t : $R = kr$ (donde k es una constante).

b) La familia de las curvas halladas en a) depende de dos parámetros. Demostrar que existe una subfamilia con un parámetro constituida por espirales logarítmicas.

*8. El plano \mathcal{E}_2 se halla referido a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Se define un arco orientado γ de clase C^2 por una parametrización en coordenadas polares $(r(t), \theta(t))$, pongamos $t \mapsto m(t)$. Se supone el arco γ regular y sin puntos de inflexión, y que no pasa por O . Se designa por $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ el sistema de referencia de Frenet de γ en $m(t)$, por (\vec{u}, \vec{v}) el sistema de referencia local para $\theta = \theta(t)$ y por $V(t)$ una determinación continua del ángulo $(\vec{u}, \vec{\tau})$. El radio de curvatura se designa por R .

a) Demostrar la relación (1) $(d\theta + dV) R \sin V - r d\theta = 0$.

b) Sea $\omega(t)$ el centro de curvatura a γ en $m(t)$, $h(t)$ la proyección ortogonal de ω sobre $Om(t)$. Estando la recta Om dirigida por \vec{u} , deducir de (1) la relación

$$(2) \quad \overline{hO} d\theta + \overline{hm} dV = 0.$$

c) Sea $m_1(t)$ la proyección ortogonal de O sobre la tangente en $m(t)$ a γ y γ_1 el arco descrito por m_1 . Demostrar que γ_1 admite una parametrización polar admisible $t \mapsto (r_1(t), \theta_1(t))$ respecto

a $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Orientando a γ_1 en el sentido de las t crecientes, se designa entonces por $\vec{\tau}_1$ el vector unitario tangente en $m_1(t)$ a γ_1 (cuando está definido). Se designa por (\vec{u}_1, \vec{v}_1) el sistema de referencia local correspondiente a $\theta = \theta_1(t)$ y por V_1 una determinación continua del ángulo (\vec{u}_1, \vec{v}_1) .

Demostrar que $V_1 = V \bmod(\pi)$.

d) Cuando existe (se supone aquí γ de clase C^3), sea $\omega_1(t)$ el centro de curvatura en $m_1(t)$ a γ_1 y $h_1(t)$ la proyección ortogonal de $\omega_1(t)$ sobre la recta $(O; \vec{u}_1(t))$.

Demostrar que la recta $h(t)h_1(t)$ pasa por un punto que depende solamente de la tangente en $m(t)$ a $\gamma(t)$.

e) Deducir de ahí una construcción del centro de curvatura en un punto de una cónica. (Se recuerda que si γ es una cónica que tiene a O como foco, entonces γ_1 es: una recta si γ es una parábola, y una circunferencia si γ es una cónica con centro.)

9. (Importante)

El plano \mathcal{E}_2 está referido a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Se da una función $\theta \mapsto p(\theta)$, definida y de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} . Se designa por $D(\theta)$, $D'(\theta)$ las rectas de ecuaciones respectivas

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0, \quad -x \sin \theta + y \cos \theta - p'(\theta) = 0,$$

y por $M(\theta)$ el punto común a $D(\theta)$ y $D'(\theta)$. Finalmente γ designa el arco definido por $\theta \mapsto M(\theta)$.

a) Demostrar que si la función $p + p''$ no se anula, γ es un arco regular y sin puntos de inflexión. ¿Cuál es el radio de curvatura de γ en $M(\theta)$? ¿Cuál es la tangente en $M(\theta)$ a γ ?

b) Se da el nombre de *podaria* de γ respecto a O al arco Γ cuya ecuación polar en $(O; \vec{i}, \vec{j})$ es $r = p(\theta)$. Poniendo $\vec{u}(\theta) = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$ y designando por $H(\theta)$ el punto tal que $\overrightarrow{OH} = r\vec{u}$, ¿cuál es la tangente en $H(\theta)$ a Γ ?

Nota. La ecuación:

$$(1) \quad x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta),$$

se dirá que es una *ecuación tangencial de γ en polares*, y se dice que γ es la *envolvente* de la familia de rectas $D(\theta)$.

10. El plano \mathcal{E}_2 está referido a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Demostrar que para que un arco γ , de clase C^∞ sea una curva cicloidal de centro O , es necesario y suficiente que pueda ser definido mediante una ecuación tangencial en polares de la forma (véase ejercicio 9):

$$x \cos \theta + y \sin \theta - a \cos(b\theta + c) = 0.$$

Precisar la naturaleza de la cicloide correspondiente según los valores de a , b , c . En particular, precisar en qué casos se obtiene

- una epicloide simple con dos retrocesos (nefroide);
- una cardioide;
- una hipocicloide con tres o cuatro retrocesos.

11. Determinar una elipse de la misma área que su evoluta.

12. Determinar el lugar del centro de una circunferencia una de cuyas evolventes rueda sin deslizamiento sobre una recta fija D de \mathcal{E}_2 .

13. Respecto a un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{E}_2 se considera la *curva cicloidal* γ definida por

$$x = \frac{a}{n} (n \cos \theta - \cos n\theta), \quad y = \frac{a}{n} (n \sin \theta - \sin n\theta) \quad (\text{donde } a = \text{Cte}, n = \text{Cte}, n \in \mathbf{R}^*).$$

Determinar las evolventes de γ . Demostrar que entre estas evolventes, una y solamente una de ellas es una curva cicloidal, y demostrar que Γ es semejante a γ (véase § VII.7).

14. En un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{E}_2 , se da la catenaria (C) de ecuación
- $$y = \cosh x.$$

Determinar una parametrización de la evolvente de (C) que pasa por el punto de coordenadas $(0, 1)$.

15. Determinar la evoluta de la curva definida, en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 , por

$$x = a \frac{t}{1+t^4}, \quad y = a \frac{t^3}{1+t^4} \quad t \in \mathbf{R}.$$

16. Determinar la evoluta de la curva definida, en un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 , por $y = e^x$.

17. En un sistema de referencia ortonormal de \mathcal{E}_2 , se define un arco γ mediante sus coordenadas polares

$$r(t) = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \theta(t) = 2t - \operatorname{tg} t.$$

Demostrar que la evoluta de γ es una evolvente de circunferencia.

18. Sea T un real > 0 , $\varphi: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 estrictamente monótona, $r: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ una función de clase C^1 . Se pone

$$(\forall t \in [0, T]), \quad z(t) = r(t) e^{i\varphi(t)},$$

y se designa por γ el arco orientado definido en \mathbf{C} por la función $t \mapsto z(t)$. Finalmente se supone que

$$z(0) = z(T).$$

Demostrar que si se tiene $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi$, entonces el arco γ es cerrado simple, que la imagen de φ es $[0, 2\pi]$ y que φ es creciente. ¿Se cumple la recíproca?

19. Recordemos que en el plano afín euclídeo \mathcal{E}_2 , se da el nombre de *catenaria* a todo arco C que puede ser definido, en un sistema de referencia ortonormal adecuado, mediante una ecuación de la forma:

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (a = \text{Cte}, \quad a \in \mathbf{R}^*).$$

El punto S de coordenadas $(0, a)$ recibe el nombre de *vértice* de la catenaria, y el eje Ox es el *eje* de la catenaria. Determinar las evolventes de C . Entre las evolventes la que pasa por S recibe el nombre de *tractriz*, y Ox es el eje de la tractriz. Demostrar que las tractrices Γ de eje dado Δ están *caracterizadas* por la propiedad siguiente: el segmento de tangente a Γ comprendido entre Γ y el punto de contacto M tiene una longitud constante.

20. Sea Γ la curva de ecuación tangencial polar (referida a un sistema ortonormal de \mathcal{E}_2):

$$x \cos \theta + y \sin \theta - 8 - \cos 3\theta = 0.$$

Demostrar que esta curva es de *anchura constante*, es decir que existe un real $a > 0$ tal que para toda dirección δ de \mathcal{E}_2 , existen exactamente dos tangentes a Γ paralelas a δ , y tales que la distancia entre estas tangentes es a .
(E. P.)

21. (Hélices sobre una cuádrica de revolución)

Se refiere el espacio \mathcal{E}_3 a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, y se designará por Δ la recta $(O; \vec{k})$ y por Π el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Sea P el paraboloides de revolución de ecuación $x^2 + y^2 - 2z = 0$. Determinar las hélices de eje Δ trazadas sobre P . Demostrar que las proyecciones ortogonales sobre Π de estas hélices son evolventes de circunferencias de centro O . (Sugerencia. En Π , calcular la distancia de O a las normales a estas proyecciones, que se podrán definir mediante una ecuación diferencial en polares.)

b) Sea γ una curva cicloidal de centro O en Π . Se considera una hélice propiamente dicha Γ cuya proyección ortogonal sobre Π sea γ . Demostrar que existe una cuádrica única de revolución Q , con centro O y de eje Δ que contiene a γ . Demostrar que si γ es una epicloide (resp. una hipocicloide), entonces Q es un elipsoide de revolución (resp. un hiperboloide de una hoja).

c) Sean E y H las cuádricas de ecuaciones respectivas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2} \quad (a \in \mathbf{R}_+^*, \quad c \in \mathbf{R}_+^*).$$

Hallar las hélices de eje Δ trazadas sobre E y las trazadas sobre H . Demostrar que las hélices así determinadas sobre E se proyectan ortogonalmente sobre Π según epicloides de centro O . Demostrar que las hélices Γ de este modo determinadas sobre H son de tres tipos, que se pueden distinguir como sigue, según el ángulo α de Γ con Δ , y designando por θ el real tal que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

i) Si $0 < \alpha < \theta$, las curvas Γ se proyectan ortogonalmente sobre Π según hipocicloides:

ii) Si $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, las curvas Γ son regulares y sus proyecciones sobre Π tienen forma

de espiral.

iii) Si $\alpha = \theta$, las curvas Γ obtenidas son las generatrices de H .

Sugerencias.

Primer método: Hallar una ecuación tangencial en polares de las proyecciones sobre Π de las hélices estudiadas. Puesta tal ecuación en la forma $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta - p(\theta) = 0$, el problema quedará reducido a determinar $p(\theta)$ mediante una ecuación diferencial de primer orden.

Segundo método: (válido para E y para H en el caso i)): Emplear un procedimiento de identificación partiendo de los resultados de b).

22. (Cicloides rectas)

Al plano orientado \mathcal{E}_2 se le asigna un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j})$, con ayuda del cual se le identifica con el cuerpo \mathbf{C} de los números complejos. La recta $(O; \vec{i})$ es designada por D .

Se consideran las curvas Γ definidas por parametrizaciones de la forma

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}_2, \quad t \mapsto a(t - t_0 + i) + b e^{i(t-t_1)}$$

donde a, b, t_0, t_1 son constantes, con $a \in \mathbf{R}^*$ y $b \in \mathbf{R}_+^*$.

Si $|a| < b$, Γ recibe el nombre de *cicloide alargada* de base D .

Si $|a| > b$, se dice que Γ es una *cicloide acortada* de base D .

Si $|a| = b$, se dice que Γ es una *cicloide* (propriadamente dicha) de base D .

a) Demostrar que las cicloides son las únicas curvas Γ que admiten puntos estacionarios. Estudiar una tal cicloide; precisar en particular el grupo de las isometrías que la dejan invariante, sus puntos estacionarios y demostrar que su evoluta es una cicloide igual, cuya base se precisará.

b) Interpretar (1) como el movimiento de un punto $M(t)$ ligado a un plano móvil definido por un sistema de referencia $(C; \vec{I}, \vec{J})$, donde C es el punto de afijo $a(t - t_0 + i)$, e (\vec{I}, \vec{J}) la base definida por los números $e^{i(t-t_1)}$ e $ie^{i(t-t_1)}$. Demostrar que la base del movimiento de plano sobre plano así definido es D y que la rodante es la circunferencia de centro C y de radio $|a|$.

Interpretar entonces una cicloide como lugar de un punto M ligado a Ω (al rodar la circunferencia Ω sin deslizamiento sobre D). Demostrar que la normal en M a esta cicloide es la recta MT , donde T es el punto de contacto de Ω y D .

c) Utilizar una generación de la evoluta Δ de una cicloide Γ con ayuda de una circunferencia que rueda sin deslizamiento sobre una recta, para determinar una construcción del centro de curvatura de Γ en un punto M . (El mismo método que en el § VII.7.)

d) Rectificar una cicloide y estudiar sus evolventes.

e) Demostrar que las cicloides acortadas, son arcos simples (y regulares) y que las cicloides alargadas presentan puntos dobles.

En (1) fijar a , t_0 , t_1 y hacer variar b ; representar entonces, sobre una misma gráfica, algunas de las curvas obtenidas.

CAPÍTULO VIII

1. Sea D un dominio de \mathbf{R}^2 , $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 y S la hoja de ecuación $z = f(x, y)$ en \mathbf{R}^3 .

Demostrar que si el plano tangente en todo punto de S pasa por el origen, entonces la hoja S es cónica.

(Utilizar la identidad de Euler, véase tomo 2, VI.2.1.)

2. Sea S la superficie de \mathbf{R}^3 de ecuación

$$z = \sin x \sin y \sin(x + y).$$

Determinar los planos tangentes a S paralelos al plano (Oxy) . Discutir la posición de S respecto a estos planos. (CAPES)

3. En el espacio afín \mathbf{R}^3 se considera la superficie S de ecuación $z^3 - xy = 0$. Determinar los planos tangentes a S que contienen a la recta de ecuación $x = 2$, $y - 3z + 3 = 0$.

• En los ejercicios 4 a 10 que siguen, se supone a \mathbf{R}^3 dotado de su estructura afín euclídea natural.

4. Sea S la hoja de ecuación $z = f(x, y)$ (donde f es una función numérica de clase C^1 sobre un dominio D de \mathbf{R}^2). Sea M un punto de S y H la proyección ortogonal de M sobre Oz .

a) Condiciones referentes a f , f'_x y f'_y para que, cualquiera que sea M , el plano tangente en M a S pase por H .

b) Integrar la ecuación así obtenida pasando a coordenadas polares.

5. Sea \mathcal{P} el paraboloide de revolución de ecuación

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0 \quad (p \in \mathbf{R}^*).$$

Determinar los arcos γ trazados sobre \mathcal{P} y que verifican la propiedad siguiente: por todo punto M de γ , la traza del plano tangente en M a \mathcal{P} sobre el plano Oxy pasa por el punto P , proyección ortogonal sobre Ox del punto N en que la normal en M a \mathcal{P} corta al plano Oxy . (E. P.)

6. Sea S la superficie de ecuación $xyz - a^3 = 0$.

Determinar el lugar de la proyección ortogonal de O sobre los planos tangentes a S .

(E. P.)

7. Se da el cono C de ecuación $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$ ($k \in \mathbf{R}^*$) y la esfera S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ ($a \in \mathbf{R}^*$).

a) Determinar las curvas trazadas sobre C , cuya tangente en todo punto es también tangente a S . (E. P.)

b) El mismo problema, sustituyendo el cono C por el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

8. Se da el cono C de ecuación $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$ ($k \in \mathbf{R}^*$). Sea a una constante real > 0 . Determinar las curvas γ trazadas sobre C tales que por todo punto M de γ , la tangente en M a γ corte al plano (Oxy) en un punto T que verifique

$$\|\overrightarrow{MT}\| = a.$$

(E. P.)

9. (Superficies paralelas)

Sea Σ una hoja simple y regular de clase C^k ($k \geq 2$) en el espacio afín euclídeo orientado \mathcal{E}_3 , definida por una parametrización

$$\Phi : D \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad (u, v) \mapsto M = \Phi(u, v).$$

Se designa por \vec{n} el vector normal en M a Σ definido por

$$\vec{n} = \frac{M'_u \wedge M'_v}{\|M'_u \wedge M'_v\|}.$$

Finalmente sea N el punto definido por $N = M + l\vec{n}$, donde l es un real > 0 fijo.

Mostrar que N describe una hoja geométrica S de clase C^{k-1} y que el plano tangente en N a S es paralelo al plano tangente en M a Σ .

10. Sea H la hélice definida paramétricamente en \mathbf{R}^3 (provisto de su estructura euclídea orientada canónica) por : $x = a \cos u$, $y = a \sin u$, $z = bu$ ($u \in \mathbf{R}$) y sea S la superficie lugar del punto $M(u, v)$ de coordenadas

$$x = \frac{1}{2} a(\cos u + \cos v), \quad y = \frac{1}{2} a(\sin u + \sin v), \quad z = b \frac{u + v}{2} \quad (u, v \in \mathbf{R}).$$

a) Dar una definición geométrica de S a partir de H .

b) Determinar mediante dos vectores el plano tangente a S en el punto $M(u, v)$ y escribir su ecuación cartesiana. Demostrar que este plano tiene un límite cuando v tiende hacia u (permaneciendo fijo u).

c) Hallar una relación independiente de u y de v entre las coordenadas de $M(u, v)$.

Deducir de aquí una nueva definición de S y obtener de nuevo la ecuación del plano tangente a S en el punto $M(u, v)$.

d) Demostrar que S contiene una familia de segmentos de recta e interpretar geoméricamente este resultado a partir de a) buscando los ejes de simetría de H .

e) Se designa por f una función numérica de clase C^2 en \mathbb{R} y por C_f la trayectoria del punto $P(u) = M[u, f(u)]$ de S cuando u recorre \mathbb{R} .

Determinar el plano osculador a C_f en el punto $P(u)$ y determinar seguidamente f de manera que este plano se confunda con el plano tangente a S en el punto $P(u)$. (Se llegará al resultado demostrando que tres vectores son coplanarios.) Estudiar las curvas C_f correspondientes.

Líneas de máxima pendiente

11. Nos situamos en el espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 . Dada una hoja Σ y una dirección de recta Δ , se da el nombre de *curvas de máxima pendiente* de Σ , respecto a Δ , a las curvas trazadas sobre Σ que cortan según ángulo recto a todas las secciones de Σ por planos perpendiculares a Δ . (Tales secciones reciben el nombre de *curvas de nivel* relativas a Δ .)

En lo que sigue, se supone a \mathcal{E}_3 dotado de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ y se toma como Δ la dirección de Oz . Las curvas de máxima pendiente pedidas se podrán definir mediante sus proyecciones ortogonales sobre el plano $\Pi = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Se establecerá en primer lugar que las curvas de máxima pendiente y las curvas de nivel se proyectan sobre Π según dos familias de curvas trayectorias ortogonales una de otra (véase tomo 4 p. 187).

Determinar las curvas de máxima pendiente de las superficies siguientes:

- $z(x^2 + y^2) - ax^2 = 0$.
- Cono de vértice $S(0, 0, c)$ y de directriz una circunferencia de Π (véase tomo 4, ejercicio III.28).
- Superficie engendrada por las circunferencias de diámetro OM del plano (OMz) cuando M describe en Π la cardioide de ecuación $r = 2a(1 + \cos \theta)$.

(Loxodrómicas)

12. Nos situamos en el espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 . Se da el nombre de *loxodrómicas* de una superficie de revolución S a las curvas trazadas sobre S que cortan a todas las circunferencias paralelas según un ángulo constante (o, lo que resulta ser lo mismo, que cortan a todas las curvas meridianas según un ángulo constante).

Determinar las loxodrómicas de las superficies siguientes:

- Una cuádrica de revolución (examinar separadamente los casos del elipsoide, del paraboloide y del hiperboloide de una o dos hojas).
- Un cono de revolución (demostrar que las loxodrómicas son aquí las hélices trazadas sobre el cono y cuyo eje coincide con el del cono: véase ejercicio VI.47).
- *c) Un toro; en este caso, examinar si las loxodrómicas halladas pueden cerrarse (es decir si pueden ser definidas mediante parametrizaciones periódicas). Demostrar que las *circunferencias de Villarceau* (que existen si el toro es no cruzado: véase ejercicio IV.52) son loxodrómicas particulares.

13. Se supone el espacio \mathcal{E}_3 referido a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Determinar una superficie de revolución de eje Oz una de cuyas loxodrómicas se proyecte sobre el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$ según una parábola de foco O .

14. Se supone el espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 referido a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Se da la esfera \mathcal{S} de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ considerada como superficie de revolución de eje Oz . Se designa por Π el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Determinar las loxodrómicas de \mathcal{S} .

b) Sea N el punto de coordenadas $(0, 0, 1)$. Se designa por $S: \mathcal{S} \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$ la *proyección estereográfica* de polo N : por definición, a todo punto $M \in \mathcal{S} \setminus \{N\}$, S asocia el punto común a Π y a la recta MN .

Demostrar que S transforma la familia de las loxodrómicas de \mathcal{S} en la familia de las espirales logarítmicas de Π , de polo O .

*c) Sean R y T los radios de curvatura y de torsión en un punto M de una loxodrómica fija Γ de \mathcal{S} .

Demostrar que existen reales a y b tales que

$$(\forall M) \quad 1 + aT + bR^2 T = 0.$$

Hojas regladas

15. Se supone a \mathbf{R}^3 provisto de su estructura euclídea natural. Demostrar que la superficie S definida por

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3 \quad (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R})$$

es reglada. Determinar las trayectorias ortogonales a las generatrices. ¿Cuál es la sección de S por uno de sus planos tangentes?

16. Se considera un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 . Se da en \mathcal{E}_3 una hoja reglada *no desarrollable* Σ y una generatriz no estacionaria g de Σ . Demostrar que cuando el punto M describe g , la normal en M a Σ describe una subhoja de un paraboloide hiperbólico.

17. Sea Σ una hoja reglada *no desarrollable* de un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 . Si g es una generatriz de Σ , se da el nombre de *punto central* de g , al punto C (el cual existe y es único siempre que la generatriz g no sea estacionaria) en que el plano tangente a T es perpendicular al plano asintótico de g . El lugar de V al variar g recibe el nombre de *línea de estricción* de Σ . Hallar la línea de estricción de las hojas regladas siguientes:

a) Un paraboloide hiperbólico (definido por uno de sus sistemas de generatrices). Se demostrará que esta línea de estricción es aquí una *cónica*.

b) Un hiperboloide de una hoja.

Hojas regladas desarrollables

18. Se supone el espacio afín \mathcal{E}_3 referido a un sistema afín $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Se da una función numérica $u: I \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^2 definida en un intervalo I de \mathbf{R} y se considera la hoja reglada de ecuaciones

$$x = tz + u(t), \quad y = u(t)z + \frac{1}{3}t^3.$$

Determinar u para que esta hoja sea desarrollable. ¿Cuál es entonces su arista de retroceso?

19. En el espacio afín \mathbf{R}^3 , se da la familia de rectas $D(t)$ de ecuación

$$x = a(t)z + p(t), \quad y = b(t)z + q(t),$$

donde a, b, p, q , son funciones de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} ; determinar una condición necesaria y suficiente, referente a a, b, p, q y a sus derivadas, para que la hoja engendrada por $D(t)$ sea desarrollable.

20. En el espacio afín \mathbf{R}^3 , se dan las dos cónicas Γ_1, Γ_2 de ecuaciones respectivas

$$(x^2 + y^2 = a^2, z = 0) \quad \text{y} \quad (x^2 + z^2 = b^2, y = 0).$$

Demostrar que por Γ_1 y Γ_2 pasa una superficie desarrollable Σ y solo una, y que Σ corta al plano $x = 0$ según una hipérbola.

21. En el espacio afín \mathbf{R}^3 , se dan las parábolas P_1, P_2 de ecuaciones respectivas:

$$(4px - y^2 = 0, z = 0) \quad \text{y} \quad (4py - x^2, z = a) \quad (a \in \mathbf{R}).$$

a) Demostrar que por P_1 y P_2 pasa una superficie desarrollable única Σ .

b) Demostrar que la arista de retroceso de Σ está contenida en la superficie de ecuación

$$y^3 z - x^3(a - z) = 0.$$

22. Sean u, v, w, r cuatro funciones numéricas de clase C^3 en un intervalo I de \mathbf{R} , tales que

$$(\forall t \in I) \quad (u(t), v(t), w(t)) \neq (0, 0, 0) \quad \text{y} \quad (u'(t), v'(t), w'(t)) \neq (0, 0, 0).$$

Se designan por $P(t)$ y $P'(t)$ los planos de ecuaciones respectivas

$$ux + vy + wz + r = 0, \quad u'(t)x + v'(t)y + w'(t)z + r'(t) = 0$$

del espacio afín \mathbf{R}^3 . Se supone que para todo t los planos $P(t)$ y $P'(t)$ son secantes, y se designa por $D(t)$ su recta común. ($D(t)$ recibe el nombre de *recta característica* de $P(t)$.)

a) Demostrar que la recta $D(t)$ engendra una hoja desarrollable y que el plano tangente a Σ a lo largo de $D(t)$ es $P(t)$.

(Se dice que la hoja Σ es la **envolvente** de la familia de planos $P(t)$.)

b) Determinar el punto característico de $D(t)$.

• En los ejercicios 23 a 32 que siguen, se da un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 eventualmente provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ y eventualmente orientado.

23. Determinar la arista de retroceso de la hoja Σ envolvente de la familia de planos $P(t)$ de ecuaciones

$$x \sin t - y \cos t + z - at = 0 \quad (t \in \mathbf{R}).$$

*24. Sean u, v, w, r cuatro funciones numéricas de clase C^3 en un intervalo I de \mathbf{R} , que verifican

$$(\forall t \in I) \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1, \quad (u, v, w) \neq (0, 0, 0) \quad \text{y} \quad (u', v', w') \neq (0, 0, 0).$$

Se designan por $P(t)$ y $P'(t)$ los planos de ecuaciones respectivas

$$ux + vy + wz + r = 0, \quad u'x + v'y + w'z + r' = 0;$$

que se suponen secantes para todo t . Finalmente se designa por $N(t)$ el punto característico de la recta $D(t)$, característica de $P(t)$ (véase ejercicio 22). Suponiendo que el sistema de referencia $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es directo, demostrar que la curvatura y la torsión θ en el punto $N(t)$ en lugar de N (arista de retroceso de la envolvente de los planos $P(t)$) vienen dadas por

$$\rho = \frac{|\Delta^3|}{|\delta| (u'^2 + v'^2 + w'^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \theta = -\frac{\Delta^2}{\delta}$$

con

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \delta = \begin{vmatrix} u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \\ r & r' & r'' & r''' \end{vmatrix}.$$

*25. Sea Σ una superficie desarrollable, engendrada por una recta $D(t)$, de vector unitario $\vec{u}(t)$ (donde la función $t \mapsto \vec{u}(t)$ es de clase C^2).

Se considera una curva Γ trazada sobre Σ y que corta a todas las generatrices $D(t)$ ortogonalmente. Sea $M(t)$ el punto en que Γ corta a $D(t)$ ortogonalmente, siendo la función $t \mapsto M(t)$ de clase C^1 . Finalmente sea $\vec{\tau}$ la función vector unitario tangente en M a Γ asociada a la parametrización $t \mapsto M(t)$. El vector $\vec{n}(t) = \vec{\tau}(t) \wedge \vec{u}(t)$ es pues normal a Σ en M .

Se considera la recta $\Delta(t)$ que pasa por $M(t)$ y está dirigida por el vector

$$\vec{w}(t) = \vec{u} \cos \alpha + \vec{n} \sin \alpha \quad (\alpha = \text{Cte}).$$

Demostrar que $\Delta(t)$ engendra una hoja desarrollable, cuya arista de retroceso es una *evoluta* (véase ejercicio VI.41) de Γ .

26. Sea γ un arco de clase C^3 , regular y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $g: s \mapsto M(s)$. Sea $D(s)$ una recta que pasa por $M(s)$ y está ligada al sistema de referencia de Frenet de γ en $M(s)$. Determinar $D(s)$ para que engendre una superficie desarrollable. ¿En qué caso existen infinitas soluciones? En este último caso, determinar la superficie engendrada en el sistema de referencia de Frenet por las rectas que cumplen la condición.

27. Supongamos el espacio afín euclídeo orientado \mathcal{E}_3 .

Sea τ una curva de Bertrand orientada (véase ejercicio VI.42). Demostrar que el conjunto de las rectas ligadas al sistema de referencia de Frenet \mathcal{R} de τ que engendran una superficie desarrollable constituye, referido a \mathcal{R} , la reunión de las generatrices de dos paraboloides hiperbólicos.

28. En \mathcal{E}_3 orientado y provisto de un sistema de referencia ortonormal directo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se da el paraboloide elíptico \mathcal{P} parametrizado por

$$x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = u^2(a \cos^2 v + b \sin^2 v), \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2$$

(donde a y b son constantes reales tales que $0 < a < b$).

a) Comprobar que las curvas γ_u de ecuación $u = \text{Cte}$ trazadas sobre \mathcal{P} están *caracterizadas* por la propiedad siguiente: el plano tangente T_M a \mathcal{P} en todo punto M de γ forma un ángulo constante con el eje Oz .

En lo que sigue, se fija una de estas curvas, que se designa por γ_u (con $u \neq 0$).

b) Cuando v describe \mathbf{R} , el punto $M = M(u, v)$ describe τ_u ; determinar la recta característica Δ_v del plano T_M (véase ejercicio 22). Determinar la arista de retroceso \mathcal{C} de la superficie desarrollable engendrada por (Δ_v) . Demostrar que \mathcal{C} es una hélice. Orientarla en el sentido de las v crecientes, determinar su sistema de referencia de Frenet, su curvatura y su torsión.

c) La proyección de \mathcal{C} sobre el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$ es una hipocicloide de cuatro retrocesos \mathcal{H} . ¿En qué modo se pueden definir las evolventes de \mathcal{C} por medio de \mathcal{H} (véase ejercicio VI.41)? Demostrar que una de estas evolventes es semejante a \mathcal{H} .

29. (Desarrollable polar de una curva alabeada)

Sea γ un arco regular de clase C^3 y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $g: s \mapsto M = g(s)$. Se designa por $\Pi(s)$ el plano normal a γ en $M(s)$.

a) Demostrar que la *recta característica* $\Delta(s)$ de $\Pi(s)$ (véase ejercicio 22) es la perpendicular al plano osculador a γ en $M(s)$ y que pasa por el centro de curvatura $\Omega(s)$ en $M(s)$.

b) Sea S la hoja desarrollable engendrada por $\Delta(s)$. Demostrar que el punto característico de $\Delta(s)$ es (si existe) el centro $\omega(s)$ de la esfera sobreosculatriz en $M(s)$ a γ . Definir también la arista de retroceso de S .

(La hoja S recibe el nombre de *desarrollable polar* de γ .)

30. (Este ejercicio completa el anterior y utiliza la hipótesis y notaciones del mismo. Véase también ejercicio VI.41.)

a) Sea φ una función derivable de s y \vec{u} el vector $\vec{\tau} \cos \varphi + \vec{\beta} \sin \varphi$ (donde $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ designa el sistema de referencia de Frenet de γ en $M(s)$). Sea D la recta que pasa por M dirigida por \vec{u} . Demostrar que D engendra una superficie desarrollable si, y solamente si, se tiene $d\varphi/ds = \theta$ (θ es la torsión de γ en M). Se supone en lo que sigue que esta condición se cumple.

b) Determinar el punto característico P de D ; P describe un arco \mathcal{D} (al que se da el nombre de *evoluta* de γ). Orientar \mathcal{D} de modo que \vec{u} sea el vector unitario tangente en P a \mathcal{D} . Determinar entonces el sistema de referencia de Frenet de \mathcal{D} en P , así como las curvaturas y torsiones ρ_1, θ_1 de \mathcal{D} en P en función de la curvatura ρ y de la torsión θ de γ en M , de sus derivadas y de φ .

c) Demostrar que las curvas \mathcal{D} son geodésicas de la hoja S *desarrollable polar* de γ (véase ejercicio anterior).

31. (Desarrollable rectificante de una curva alabeada)

Sea γ un arco regular de clase C^3 , sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $g: s \mapsto M = g(s)$. Se designa por $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ el sistema de referencia de Frenet asociado a g .

a) Sea ψ una función de clase C^2 de s . Se pone:

$$(\forall s) \quad \vec{u}(s) = \vec{\tau}(s) \cos \psi(s) + \vec{\beta}(s) \sin \psi(s)$$

y se designa por $L = L(s)$ la recta dirigida por \vec{u} que pasa por M . Demostrar que se puede elegir la función de manera que $L(s)$ engendre una superficie desarrollable Σ . En lo que sigue se supone hecha la elección de este modo. Entonces L es la *recta característica* (véase ejercicio 22) del *plano rectificante* de γ en M , y la superficie Σ recibe el nombre de *desarrollable rectificante* de γ .

b) Sea $P(s)$ el punto característico de $L(s)$ y sea Γ el arco descrito por P (arista de retroceso de Σ).

Orientar Γ de manera que el vector unitario tangente en P sea \vec{u} . Determinar entonces el sistema de referencia de Frenet, la curvatura ρ_2 y la torsión θ_2 de Γ en P . Se darán las expresiones de ρ_2 y θ_2 : primero con ayuda de ρ, θ (curvatura y torsión de γ en M), de ψ y de sus derivadas después únicamente con ayuda de ρ, θ y de sus derivadas.

32. (Superficies desarrollables cuya arista de retroceso tiene una función curvatura dada)

En este problema, además del espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 , se utiliza un plano afín euclídeo orientado \mathcal{P} .

Si D es un dominio de \mathcal{P} , una aplicación $f: D \rightarrow \mathcal{E}_3$ de clase C^k ($k \geq 1$) se dirá que es *isométrica* si es inyectiva, regular y verifica la propiedad (P) siguiente:

(P) Para todo arco γ compacto de clase C^1 de D , la imagen γ_f de γ por f tiene la misma longitud que γ .

a) Demostrar que f es isométrica si, y solamente si, la diferencial de f es, en todo punto de D una aplicación lineal isométrica.

b) Se da en \mathcal{P} un arco γ de clase C^k ($k \geq 2$), regular y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $s \mapsto m(s)$ ($s \in I$, siendo I un intervalo abierto de \mathbf{R}). Sea $\varphi(s)$ una

determinación del ángulo del vector $\vec{\tau} = dm/ds$ con un eje fijo de \mathcal{P} . Se supone que $\alpha(s)$ admite en los extremos de I límites α_1 y α_2 tales que $|\alpha_2 - \alpha_1| < \pi$.

i) Demostrar que el arco γ es simple.

ii) Sea $s \in I$ y $t \in \mathbf{R}_+^*$; se pone $p(s, t) = m(s) + t\vec{\tau}(s)$. Demostrar que $(s, t) \mapsto p(s, t)$ es una aplicación regular, *inyectiva*, de $I \times \mathbf{R}_+^*$ en \mathcal{P} , y que su imagen es un abierto de \mathcal{P} . (Se podrá utilizar el teorema de inversión local.)

c) Sea Γ un arco de clase C^k ($k \geq 4$) en \mathcal{E}_3 , regular y sin puntos de inflexión, definido por una parametrización normal $I \rightarrow \mathcal{E}_3$, $s \mapsto M = M(s)$, y cuya torsión no se anula.

i) Demostrar que existe un subintervalo J_1 de I tal que la aplicación (regular en $I \times \mathbf{R}^*$)

$$(s, t) \mapsto M(s) + t \frac{dM}{ds}, \quad J_1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}_3$$

es inyectiva.

ii) Sea ρ la función curvatura de Γ . Se designa por γ un arco de clase C^k de \mathcal{P} , regular y sin puntos de inflexión, y que tiene a $\rho(s)$ ($s \in I$) como función de curvatura (véase teorema VI.7.1).

Demostrar que existe un subintervalo abierto J de J_1 tal que cada una de las aplicaciones

$$\Phi : (s, t) \mapsto m(s) + t \frac{dm}{ds}, \quad J \times \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathcal{P}$$

(donde $m(s)$ designa la parametrización normal de γ correspondiente a ρ) y

$$\Psi : (s, t) \mapsto M(s) + t \frac{dM}{ds}, \quad J \times \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathcal{E}_3,$$

es inyectiva y regular.

iii) Habiendo elegido J lo mismo que en ii), sea D el dominio imagen de Φ . Demostrar que la aplicación $\Psi \circ \Phi^{-1} : D \rightarrow \mathcal{E}_3$ es isométrica.

Demostrar que las geodésicas de la hoja desarrollable Σ definida por Ψ , son las imágenes por Ψ de los segmentos de recta de \mathcal{P} contenidos en D .

(En *conclusión*: toda superficie desarrollable es localmente isométrica a una parte de plano.)

CAPÍTULO IX

Se supondrá al espacio \mathbf{R}^3 en todas partes provisto de su estructura afín euclídea natural. Todas las hojas consideradas son hojas de \mathbf{R}^3 mientras no se haga ninguna precisión suplementaria.

Formas fundamentales, direcciones asintóticas y principales, etc.

1. Se da la hoja S definida en coordenadas semipolares (r, θ, z) por

$$r = a + t \sin \frac{\theta}{2}, \quad z = t \cos \frac{\theta}{2} \quad (t \in \mathbf{R}, \quad \theta \in \mathbf{R}),$$

donde a designa una constante positiva. (S es una «cinta de Mobius».)

a) Comparar las direcciones de las normales en los puntos de parámetros (t, θ) y $(-t, \theta + 2\pi)$, y demostrar que S no es orientable.

b) Determinar las dos formas fundamentales de S en los puntos regulares.

2. Determinar la curvatura normal de las curvas $y = \text{Cte}$ de la superficie de ecuación

$$z = x^2 y.$$

3. Determinar la curvatura geodésica en la dirección de las generatrices (que son aquí las curvas coordenadas) del paraboloide hiperbólico definido por

$$x = a(u + v), \quad y = b(u - v), \quad z = uv \quad (a, b = \text{Cte}, (u, v) \in \mathbf{R}^2).$$

4. Se da la hoja regular Σ de clase C^2 definida por $z = f(x, y)$ donde $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de clase C^2 en el dominio D de \mathbf{R}^2 . Se supone que $(0, 0) \in D$, que $f(0, 0) = 0$ y que el plano tangente a Σ en O es Oxy .

Determinar, mediante una ecuación cartesiana, la superficie engendrada por las circunferencias de Meusnier de Σ en O .

5. En \mathbf{R}^3 se considera la hoja de revolución de eje Oz engendrada por rotación alrededor de Oz de la parábola de ecuaciones

$$y = 0, \quad z^2 - 2px + p^2 = 0 \quad (p = \text{Cte}, p \neq 0).$$

Demostrar que el cociente de los radios de curvatura principales en S en un punto cualquiera M de S no depende de M .

6. Sea M un punto de una hoja regular Σ de clase C^2 de \mathcal{E}_3 . Demostrar que la curvatura normal de Σ en M en una dirección ortogonal a una dirección asintótica, es igual a la curvatura media en M .

7. Sea M un punto de una hoja regular Σ de clase C^2 de \mathcal{E}_3 orientado. Se da un vector unitario normal \vec{n} en M a Σ y un vector tangente $\vec{\tau}$ en M a Σ . Sea k un entero > 2 y sean $\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}$, $\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_{k-1}$ los vectores deducidos de $\vec{\tau}$ por rotación del ángulo $2p\pi/k$ ($0 \leq p \leq k-1$). Se designa por $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{k-1}$ las curvaturas normales de Σ en las direcciones $\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_{k-1}$, y C_1, C_2 las curvaturas principales de Σ en M . Demostrar la relación

$$\frac{1}{k}(\rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_{k-1}) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2).$$

8. En \mathcal{E}_3 orientado, se da un arco regular γ de clase C^4 , sin puntos de inflexión y cuya torsión no se anula, definido por una parametrización normal $g: s \mapsto M = g(s)$. Se designa por ρ y θ las funciones curvatura y torsión correspondientes.

Sea Σ la *desarrollable de las tangentes* a γ y sea P un punto $\neq M$ de la tangente en M a γ . Se pone $l = MP$.

Demostrar que las curvaturas principales de Σ en P son 0 y $\theta(s)/lp(s)$.

9. Sea M un punto de una hoja Σ de \mathcal{E}_3 , regular y de clase C^2 , y sea Φ_2^M la segunda forma cuadrática fundamental en M .

Demostrar que la suma de los radios de curvatura normales en M a Σ en dos direcciones conjugadas es constante.

10. Sea S la superficie de \mathbf{R}^3 de ecuación

$$y \cos z - x \sin z = 0.$$

Demostrar que los radios de curvatura principales de S en un punto de coordenadas (x, y, z) son $\pm(x^2 + y^2 + 1)$.

11. Demostrar que la matriz del endomorfismo ψ_M (definido en el § IX.4) en la base $\partial M/\partial u, \partial M/\partial v$ de T_M es $C = A^{-1} B$, con:

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

12. Demostrar que la hoja de ecuaciones paramétricas

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = bv + b \int_{u_0}^u \left(\frac{t^2 + b^2}{t^2 - b^2} \right)^{1/2} dt,$$

donde u recorre un intervalo I sobre el cual $u^2 - b^2 > 0$ y donde v recorre \mathbf{R} ($u_0 \in I$), es una superficie mínima.

13. Se da el paraboloides P de ecuación

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 2z = 0 \quad (\alpha \in \mathbf{R}^*, \beta \in \mathbf{R}^*).$$

Determinar la ecuación de segundo grado que tiene por raíces los radios de curvatura principales en un punto cualquiera M de \mathcal{P} .

14. Se da el elipsoide E de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

y se designa por Γ la elipse trazada sobre E de ecuación

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Determinar:

- Los valores de los radios de curvatura principales de E en un punto M de Γ ;
- El lugar de los centros de curvatura principales de E en M cuando M describe Γ .

***15. (Teorema de Catalan)**

Este teorema se enuncia como sigue: «En un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 , las únicas superficies mínimas regladas son los helicoides rectos».

Demostrar este teorema dando un contenido riguroso al razonamiento que sigue:

Si Σ es una superficie reglada mínima, las asíntotas Γ no rectilíneas de Σ son las trayectorias ortogonales de las generatrices. La normal principal a una curva Γ en un punto M es la generatriz de M . Por lo tanto Γ es tal que existe una *infinidad* de curvas que tienen las mismas normales principales que Γ , lo cual supone que Γ es una hélice circular (véase ejercicio VI.42).

16. Demostrar que la curvatura total de la superficie de \mathbf{R}^3 definida por

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \Phi(u) + av$$

($u \in I, v \in \mathbf{R}, a = \text{Cte}, \Phi$ función numérica de clase C^2 en el intervalo I) es constante a lo largo de las hélices $u = \text{Cte}$.

***17.** (Extremos de la distancia de un punto dado a una superficie dada.)

a) Se da en \mathbf{R}^3 una hoja regular Σ de ecuación $z = f(x, y)$, donde $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de clase C^1 en el dominio D de \mathbf{R}^2 .

Demstrar que si la distancia de un punto fijo A de \mathbf{R}^3 a un punto variable M de Σ es extremal, M es el pie de una normal a Σ trazada desde A . (Utilizar el método del extremo ligado: véase tomo 2, V.6.2.)

b) Suponemos en adelante que f es de clase C^2 , $(0, 0) \in D$, que Σ es tangente en O al plano Oxy y que A es el punto de coordenadas $(0, 0, c)$, $c \in \mathbf{R}^*$, de modo que O es el pie de una normal a Σ trazada desde A .

Discutir, según la naturaleza del punto O sobre Σ , si el punto O proporciona o no un extremo de la distancia OM cuando M recorre Σ .

(Respuesta: El problema se reduce a discutir según la posición de A respecto a los centros de curvatura principales en O de Σ . En todos los casos se puede llegar a conclusión si A no es uno de los centros de curvatura principales en O de Σ . Si A es uno de tales puntos no se puede llegar a ninguna conclusión general en el caso en que O sea elíptico sobre Σ .)

Líneas asintóticas

18. Referido el espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 a un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, determinar las líneas asintóticas de las superficies siguientes

a) $x = \frac{u}{\cosh v}, \quad y = \frac{uv}{\cosh v}, \quad z = \operatorname{Arctg} u \quad (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}).$

b) Superficie de revolución engendrada por una parábola de vértice O y de tangente en el vértice Oz , por rotación alrededor de Oz .

c) Conoide de eje Oz de directriz H , donde H es la hipérbola definida por $x = 1, y^2 - z^2 = K$ ($K \in \mathbf{R}^*$).

d) Toro de garganta cerrada.

e) Superficies definidas por

o
$$\begin{aligned} x &= \sinh v \sin u, \quad y = \sinh v \cos u, \quad z = u \quad (\text{helicoide recto}) \\ x &= \cosh v \cos u, \quad y = \cosh v \sin u, \quad z = -v \quad (\text{catenoide}). \end{aligned}$$

f) $x = (1 + \cos u) \cotg v, \quad y = 1 + \cos u, \quad z = \frac{\cos u}{\sin v}.$

19. En \mathcal{E}_3 provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se da el conoide de Plücker S de ecuación

$$z(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0 \quad (\text{véase ejercicio III.43}).$$

Demstrar que las líneas asintóticas de S se proyectan horizontalmente según lemniscatas de Bernoulli.

20. En \mathcal{E}_3 provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, determinar las líneas asintóticas de la superficie de ecuación

$$2xyz - 2y^3 - z^2 = 0.$$

¿Cuáles son las proyecciones de estas curvas sobre el plano $(O; \vec{i}, \vec{j})$?

21. En \mathcal{E}_3 provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, determinar las líneas asintóticas de las superficies siguientes

a) Superficie de ecuación $z = \operatorname{arctg} y/x$ ($x \in \mathbf{R}_+^*$, $y \in \mathbf{R}$).

Generalización. Superficie de ecuación $z = f(y/x)$ ($x \in \mathbf{R}_+^*$, $y \in \mathbf{R}$) donde $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de clase C^2 .

b) Superficie definida por

$$x = (1 + u) \cos v, \quad y = (1 - u) \sin v, \quad z = v \quad (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}).$$

c) Superficie de ecuación $z = y \sin x$.

22. En \mathcal{E}_3 dotado de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se da la superficie de revolución S definida por

$$x = \Phi(z) \cos \theta, \quad y = \Phi(z) \sin \theta$$

donde Φ es una función numérica de clase C^2 en un intervalo de \mathbf{R} .

a) Formar la ecuación de las líneas asintóticas.

b) Aplicación. Integrar esta ecuación cuando $\Phi(z) = e^z$.

23. Determinar las trayectorias ortogonales de las curvas halladas en el ejercicio 21 c).

24. Determinar las líneas asintóticas de la superficie de \mathbf{R}^3 de ecuación $z = x^2 y$.

25. Se supone el espacio \mathbf{R}^3 dotado de su estructura afín euclídea natural.

Se designan por f y g dos funciones numéricas de clase C^2 , definidas respectivamente sobre los intervalos I y J de \mathbf{R} .

a) Escribir la ecuación diferencial que determina las asíntotas de la superficie S de ecuación $z = f(x) + g(y)$.

b) Determinar f y g de modo que las direcciones asintóticas de S sean, en cada punto,

i) coincidentes;

ii) ortogonales.

(Para integrar la ecuación obtenida en derivadas parciales, se la pondrá en la forma $F(x) = G(y)$, y se observará que una función de x solamente puede ser igual a una función de y si es constante.)

c) Demostrar que en el caso ii) de b), la superficie S es mínima.

26. El espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 se halla referido a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Determinar las líneas de curvatura de las superficies siguientes:

a) Superficies definidas en el ejercicio 8 e).

b) Superficie

$$z = \operatorname{Log} (\cos x \cos y) \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

c) Elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 .$$

d) Hiperboloides de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 .$$

27. En \mathcal{E}_3 dotado de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se da la hoja Σ definida por

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \varphi(u) + av,$$

con $a = \text{Cte}$, φ función numérica de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} ; (u, v) recorre $I \times \mathbf{R}$.

- Calcular la primera y la segunda forma fundamental de Σ .
- Formar la ecuación de las líneas de curvatura; integrarla cuando φ es constante.
- Determinar φ para que las curvas $v = \text{Cte}$ sean líneas de curvatura.

28. Se da una función numérica f de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} y una constante real a . Sea $P(t)$ ($t \in I$) el plano de ecuación

$$tx + f(t)y - z + a(1 + t^2 + f^2(t))^{1/2} = 0 \quad \text{en } \mathbf{R}^3.$$

Determinar las líneas de curvatura de la superficie desarrollable Σ envolvente de los planos $P(t)$ (véase ejercicio VIII.22).

29. Se da una hoja regular Σ de clase C^2 en \mathcal{E}_3 .

a) Sea P un plano tal que el ángulo de P y Σ en todo punto común a P y Σ es constante. Demostrar que todo arco regular γ trazado sobre Σ de soporte contenido en P es una línea de curvatura de Σ .

b) Sea S una esfera tal que el ángulo de S y Σ en todo punto común a S y Σ es constante. Demostrar que todo arco regular γ trazado sobre Σ , de soporte contenido en S , es una línea de curvatura de Σ .

30. Determinar las líneas de curvatura de la superficie de \mathbf{R}^3 de ecuación $y \cos z - x \sin z = 0$.

31. Utilizar la relación 11, página 560, para establecer el *teorema de Joachimstal*:

Si dos superficies se cortan según un ángulo constante, todo arco contenido en su intersección que es línea de curvatura de una de ellas es también línea de curvatura de la otra.

Recíprocamente, si un arco γ contenido en la intersección de dos superficies es línea de curvatura de cada una de ellas, entonces el ángulo de estas superficies a lo largo de γ es constante.

Geodésicas

32. El espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 se halla referido a un sistema ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Buscar las líneas geodésicas de las superficies siguientes y representar la forma de las proyecciones de estas curvas sobre los planos coordenados.

a) El helicoides recto, de ecuación

$$x = av \cos u, \quad y = av \sin u, \quad z = bu \quad (u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}).$$

b) El cono de revolución de ecuación $x^2 + y^2 - c^2 z^2 = 0$ ($c \in \mathbf{R}^*$).

c) El paraboloide de revolución de ecuación $x^2 + y^2 - 2pz = 0$.

33. El espacio \mathbf{R}^3 se halla dotado de su estructura afín euclídea natural.

Determinar las geodésicas de la superficie de revolución (seudoesfera) definida por

$$x = \text{tgh } u \cos v, \quad y = \text{tgh } u \sin v, \quad z = \frac{1}{\cosh u} + \text{Log tgh } \frac{u}{2} \quad (u \in \mathbf{R}_+, v \in \mathbf{R}).$$

34. a) Determinar las geodésicas del cono $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$ (se hará uso de las coordenadas semipolares (r, θ, z) y se tendrá $ds^2 = (1 + m^2)dr^2 + r^2 d\theta^2$). Dibujar las proyecciones de estas curvas sobre el plano xOy .

b) A cada punto del cono, de coordenadas cilíndricas r, θ, z se hace corresponder el punto del plano de coordenadas polares $\left(r\sqrt{1+m^2}, \frac{\theta}{\sqrt{1+m^2}}\right)$. Demostrar que esta correspondencia transforma las geodésicas en rectas (siguiendo la determinación de θ por continuidad a lo largo de la geodésica).

c) Se abre el cono según una generatriz y se desarrolla sobre un plano. Demostrar que cada geodésica se desarrolla según un conjunto de segmentos o de semirrectas. En particular, si $m = \sqrt{3}$, el cono se desarrolla según un semiplano y cada geodésica según dos semirrectas paralelas. (Se podrán construir conos de papel.) Demostrar que existen geodésicas que cortan a una geodésica dada en dos puntos.

35. Se da una hoja Σ regular de clase C^2 en \mathcal{E}_3 .

a) Demostrar que toda geodésica de Σ que sea también línea de curvatura es una curva plana.

b) Recíprocamente, demostrar que toda geodésica de Σ sin puntos de inflexión que sea una curva plana es una línea de curvatura de Σ .

36. Sea f una función numérica de clase C^2 en un intervalo I de \mathbf{R} . Se da la superficie Σ de \mathbf{R}^3 definida por

$$\begin{aligned}x &= f(u) \cos u \cos v - f(u) \sin u \sin v \\y &= f(u) \cos u \sin v + f(u) \sin u \cos v \\z &= - \int_{u_0}^u f^2(t) dt \quad u \in I, \quad v \in \mathbf{R}, \quad (u_0 \in I, u_0 = \text{Cte}).\end{aligned}$$

Demostrar que las curvas $v = \text{Cte}$ de Σ son geodésicas de esa superficie.

37. Todo arco trazado sobre una hoja regular de clase C^2 de \mathcal{E}_3 que es a la vez asíntota y geodésica, es rectilíneo.

Sea Σ una hoja simple parametrizada de clase C^2 cuya primera forma fundamental es $ds^2 = du^2 + C^2(u, v) dv^2$, designando por C una función numérica estrictamente positiva de clase C^1 . Demostrar que las curvas $v = \text{Cte}$ de Σ son geodésicas y demostrar que el arco de curva $v = u_0$ que une los puntos de parámetros $(u_0, v_0), (u_1, v_0)$ proporciona el mínimo de la longitud.

38. Sea la hoja de revolución Σ definida, en un sistema de referencia ortonormal directo de \mathcal{E}_3 , por

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u)$$

(donde $v \in \mathbf{R}$, $u \in I$, y donde f es una función numérica de clase C^2 en el intervalo I de \mathbf{R}).

a) Calcular la curvatura media γ en un punto cualquiera de Σ (supuesta regular).

b) Determinar f de manera que sea $\gamma = 0$ en todo punto, y deducir que Σ es una sub-*hoja* de una *catenoide*.

CAPÍTULOS X, XI Y XII

Cinemática del punto

En los ejercicios que siguen, nos situamos en un espacio afín euclídeo \mathcal{E}_3 de dimensión 2 o \mathcal{E}_3 de dimensión 3.

1. En \mathcal{E}_2 un punto móvil se desplaza sobre una elipse, de manera que su aceleración \vec{I} se mantenga paralela al eje menor de la elipse. Determinar \vec{I} en función de la posición del punto.

2. En \mathcal{E}_2 , un movimiento puntual $t \mapsto M(t)$ con aceleración central admite la hodógrafa \mathcal{H} definida por $t \mapsto \vec{V}(t) = P(t)$.

a) Determinar en función de t y de $M(t)$ el radio de curvatura en el punto $P(t)$ de \mathcal{H} .

b) Determinar el movimiento de M para que \mathcal{H} sea una circunferencia.

3. Determinar un movimiento puntual $t \mapsto M(t)$ con aceleración central de centro O , tal que la aceleración $\vec{I}(t)$ de M sólo dependa de $r = \|\vec{OM}\|$, y cuya trayectoria sea una lemniscata de Bernoulli de centro O .

4. En \mathcal{E}_2 , se da un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Un movimiento con aceleración central de centro O ha sido definido en coordenadas polares. Se adoptan las notaciones del § XI.5. Determinar la trayectoria del movimiento de modo que se tenga,

$$(\forall t) \quad \Gamma(t) = \frac{-k}{r^2 \sin^3 \theta(t)}, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

5. Se dota a \mathcal{E}_2 de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Un punto móvil $M(t)$ se desplaza sobre la parábola \mathcal{P} de ecuación $y - 2px = 0$. Se designa por (v_1, v_2) (resp. Γ_1, Γ_2) las componentes del vector velocidad \vec{V} (resp. del vector aceleración \vec{I}) de M . Determinar el movimiento de M de modo que se tenga, en cada instante $\Gamma_2 = k^2 v_1$. Determinar seguidamente el lugar del punto $P(t)$ tal que $\vec{OP}(t) = \vec{OM}(t) + \vec{V}(t)$.

6. Determinar en \mathcal{E}_2 la trayectoria de un movimiento con aceleración central de centro O , definido por $t \mapsto M(t)$, de modo que la velocidad numérica venga dada, para todo t , por

$$v = \frac{k}{\|\vec{OM}\|} \quad (\text{donde } k = \text{Cte}).$$

7. En \mathcal{E}_2 , un punto móvil $M(t)$ se mueve sobre una circunferencia C , de manera que su aceleración $\vec{I}(t)$ y su velocidad numérica $v(t)$ verifiquen en cada instante

$$\|\vec{I}(t)\| = k(v(t))^3 \quad (\text{donde } k = \text{Cte}).$$

Demostrar que \vec{I} mantiene una dirección fija.

8. En \mathcal{E}_3 con un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se considera el paraboloide \mathcal{P} de ecuación $x^2 + y^2 - 2pz = 0$. Un punto móvil $M(t)$ se mueve sobre \mathcal{P} de manera que en cada instante su aceleración $\vec{I}(t)$ es colineal con la recta MH (donde H es la proyección ortogonal de M sobre Oz). Determinar el movimiento proyectado del de M

a) sobre la recta Oz ;

b) sobre el plano Oxy .

9. En \mathcal{E}_2 dotado de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, se considera un movimiento

puntual *uniforme* $t \mapsto M(t)$. La tangente en $M(t)$ a la trayectoria de M corta al eje Oy en un punto $A(t)$.

Determinar el movimiento de M de manera que el movimiento de A sea uniforme y de la misma velocidad numérica que el de M .

(Prueba común de Minas, 1973.)

10. En \mathcal{E}_2 dotado de un sistema de referencia ortonormal, se considera la cardioide C de ecuación polar $r = a(1 + \cos \theta)$.

Un punto móvil $M(t)$ describe a C según un movimiento con aceleración central de centro O .

a) Determinar la velocidad numérica de M y la norma de su aceleración en un instante dado.

b) ¿Cuál es el tiempo invertido por M para llegar a O , sabiendo que el punto M se halla en el instante inicial en M_0 de coordenadas polares $(\theta_0, r_0 = a(1 + \cos \theta_0))$?

11. En \mathcal{E}_3 , se considera una recta fija D y un punto fijo $O \in D$. Un espacio sólido (S) se halla ligado a una parábola \mathcal{P} de vértice O tangente a D en O . El movimiento de (S) es una rotación alrededor de D , de velocidad angular constante. Un movimiento puntual $t \mapsto M(t)$ es tal que para todo t , el punto $M(t)$ pertenece a la parábola $\mathcal{P}(t)$ (posición en el instante t de la parábola).

Determinar el movimiento de M de manera que su velocidad absoluta forme, con la velocidad relativa respecto a (S) , un ángulo constante.

Cinemática del sólido

12. Sea en \mathcal{E}_3 un movimiento puntual $t \mapsto M(t)$ de clase C^3 . Se supone que el arco orientado γ definido por $t \mapsto M(t)$ es regular y sin puntos de inflexión y se considera el sistema de referencia de Frenet

$$\mathcal{R}(t) = (M(t); \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}) \text{ en } M(t).$$

Un espacio sólido (S) se halla ligado al sistema de referencia \mathcal{R} . Demostrar que el movimiento instantáneo de S es, en cada instante, una rotación si, y solamente si, el arco γ está contenido en un plano.

13. En \mathcal{E}_3 orientado, se considera una hoja geométrica orientada (Σ) de clase C^3 simple y regular.

Un punto móvil $M(t)$ se mueve sobre Σ . Se supone que el arco orientado γ trazado sobre Σ , definido por $t \mapsto M(t)$, es regular. En cada instante t , se define el sistema de referencia de Darboux $\mathcal{D}(t)$ de γ en $M(t)$, pongamos $\mathcal{D}(t) = (M(t); \vec{\tau}, \vec{g}, \vec{h})$.

Determinar γ de manera que el movimiento instantáneo de $\mathcal{D}(t)$ sea, en cada instante, una rotación.

(Solución. γ tiene que ser una línea de curvatura de (Σ) .)

14. En \mathcal{E}_3 , se considera una esfera S ligada a un espacio sólido (\mathcal{H}) en movimiento en \mathcal{E}_3 . Se supone que el eje instantáneo del sólido pasa en cada instante por el centro de S .

En un instante dado t , determinar las curvas Γ trazadas sobre S tales que para todo punto M de Γ , la velocidad $\vec{V}(M)$ sea ortogonal a Γ .

15. Sea (\mathcal{S}) un espacio sólido en movimiento en \mathcal{E}_3 . Si $M(t)$ es un punto móvil ligado a (\mathcal{S}) , se define en cada instante la *aceleración tangencial* $\vec{\gamma}(t)$ y la *aceleración normal* $\vec{g}(t)$ de M (véase § XI.3).

1°. Determinar, en un instante dado t .

a) El lugar S_t de los puntos $M \in \mathcal{E}_3$ tales que $\vec{\gamma}(t) = 0$.

b) El lugar Σ_t de los puntos $M \in \mathcal{E}_3$ tales que $\vec{g}(t) = 0$.

2°. Se supone que el movimiento de (\mathcal{S}) es un movimiento de plano sobre plano (véase § XII.12) y se considera un plano Π ligado a (\mathcal{S}) que se desliza sobre sí mismo en el movimiento.

Demostrar que S_t y Σ_t cortan a Π , en general, según dos circunferencias ortogonales C_t y Γ_t . Uno de los puntos comunes a C_t y Γ_t es el centro instantáneo de rotación I de Π en el instante t y el otro, designado por K , es el único punto cuya aceleración en el instante t , del t -coincidente en Π es nula.

Nota. La circunferencia Γ_t recibe el nombre de *circunferencia de las aceleraciones* de Π en el instante t , y el punto $K(t)$ recibe el nombre de *centro de las aceleraciones* de Π en el instante t .

16. Para que un punto A de \mathcal{E} sea un punto fijo de un espacio móvil es necesario y suficiente que en cada instante t , el campo de velocidades \vec{V}_t de este espacio verifique $\vec{V}_t(A) = 0$.

Si dos espacios móviles tienen, en cada instante, el mismo campo de velocidades \vec{V}_t , estos dos espacios son fijos uno respecto a otro.

Movimiento de plano sobre plano

17. Se utilizarán las notaciones de la definición XII.12.1 y las de la pág. 730.

a) Determinar todos los desplazamientos de \mathcal{E} que dejan a \mathcal{P} invariante.

b) Se provee al grupo $\text{Dep}(\mathcal{E})$ de la topología natural inducida por la de $A(\mathcal{E})$ (véase ejercicio I.24). Utilizando el hecho que $D_{t,u} = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ para todo $t \in D_{t,u}$ y la continuidad (que se establecerá) de la aplicación $I \times I \rightarrow \text{Dep}(\mathcal{E})$, $(t, u) \rightarrow D_{t,u}$, demostrar que para todo $(t, u) \in I \times I$, $D_{t,u}$ es o una traslación de vector paralela a \mathcal{P} , o una rotación de eje ortogonal a \mathcal{P} .

18. En \mathcal{E}_2 , se considera una parábola \mathcal{P} ligada a un plano móvil Π en movimiento en \mathcal{E}_2 . Se supone que la parábola \mathcal{P} permanece, en cada instante, tangente a dos rectas fijas D_1 y D_2 ortogonales de \mathcal{E}_2 .

Determinar la base y la rodante del movimiento.

(E. P.)

19. Se supone a \mathcal{E}_2 dotado de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Un plano móvil Π se halla en movimiento en \mathcal{E}_2 . Un punto A ligado a Π describe el eje Ox . Una recta D ligada a Π pasa por A , distinta de Ox , y se mantiene tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$.

Determinar la base y la rodante del movimiento.

20. En \mathcal{E}_2 dotado de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, se considera el movimiento de un plano móvil ligado a un sistema de referencia móvil $(A; \vec{I}, \vec{J})$ que verifica las condiciones siguientes:

i) El punto A describe la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2ax = 0$;

ii) La recta OA es, en cada instante, paralela a \vec{I} . Determinar la base y la rodante del movimiento.

21. En \mathcal{E}_2 provisto de un sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, se considera el movimiento de un plano móvil Π sometido a las condiciones siguientes:

i) La base del movimiento es el eje Oy .

ii) Un punto M ligado a Π describe la circunferencia C de ecuación

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Determinar la rodante del movimiento.

(Prueba común de Minas, 1971.)

P. 1

Un espacio euclídeo de dimensión 3 se halla referido a un sistema ortonormado fijo $Oxyz$, cuyos vectores de base son designados por: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

I. *Cuestión preliminar*, cuyos resultados se podrán utilizar en lo que sigue, incluso aunque no hayan sido establecidos.

I.1. Demostrar que los vectores:

$$\vec{V}_1 = (\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{U} \quad \text{y} \quad \vec{V}_2 = (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{U}$$

son las proyecciones ortogonales respectivas del vector \vec{V} , cualquiera, sobre el vector unitario \vec{U} y sobre el subespacio ortogonal a \vec{U} .

I.2. Demostrar que el vector:

$$(1) \quad \vec{V} = (\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{U} + \frac{3}{5}(\vec{U} \wedge \vec{V}) + \frac{4}{5}(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{U}$$

se deduce de \vec{V} por la rotación, alrededor del vector unitario \vec{U} , de ángulo α definido por

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

II. Un sólido Σ se mueve respecto a $Oxyz$; un sistema de referencia $AXYZ$ se halla ligado a Σ ; los vectores de base se designan por $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$.

En cada instante, A se deduce de O por la traslación de vector $2a\vec{U}$; e $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ se deducen respectivamente de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ por la rotación de ángulo α alrededor de \vec{U} .

\vec{U} se define por $\vec{U} = \vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t$,
 a y ω son constantes positivas; t designa el tiempo; α es el ángulo definido en I.2.

Utilizando la fórmula (1) escribir las componentes de \vec{I}, \vec{J} y \vec{K} ; establecer las fórmulas que proporcionan las coordenadas (x, y, z) de un punto M de Σ respecto a $Oxyz$ en función de las coordenadas (X, Y, Z) de M respecto a $AXYZ$.

III. Determinar,

a) las componentes según $AXYZ$ y según $Oxyz$ del vector rotación instantánea $\vec{\Omega}$ del movimiento de Σ ;

b) la velocidad de traslación (paralelamente a $\vec{\Omega}$);

c) el eje de rotación y de deslizamiento D , respecto a $Oxyz$ y a $AXYZ$ (se expresarán x e y en función de z y t ; X e Y en función de Z y t);

d) las ecuaciones de la superficie S y S' engendradas por D en su movimiento respecto a $Oxyz$ y en su movimiento respecto a $AXYZ$.

¿Cuál es la naturaleza de las superficies S y S' ?

¿Cómo se puede pasar de S a S' en un instante dado cualquiera?

IV. Sea C la circunferencia de Σ situada en el plano AXY , cuyo centro es A y cuyo radio vale $10a/3$.

Un punto Q describe esta circunferencia con un movimiento uniforme respecto a Σ ; este movimiento se define por

$$(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AQ}) = \omega t + \beta,$$

donde β es una constante. Caracterizar la trayectoria absoluta de Q y su movimiento absoluto.

Calcular el coseno del ángulo que forman el vector velocidad absoluta y el vector velocidad relativa.

Demostrar que C engendra, en el curso del movimiento de Σ , una superficie de revolución y que la sección de esta superficie por Oyz está formada por dos circunferencias.

(Escuela Central de Artes y Manufacturas, Escuela Central Lionesa, Escuela Superior de Electricidad, Escuela Superior de Optica: prueba de admisión, 1969.)

P. 2

Los números, datos y variables que intervienen en el enunciado del problema son reales. Se supone elegida una unidad de longitud; la unidad angular es el radián.

El espacio euclídeo real se halla referido a un sistema ortonormado (σ) cuyo origen es un punto dado O y cuyos ejes $\overrightarrow{x'Ox}$, $\overrightarrow{y'Oy}$, $\overrightarrow{z'Oz}$ tienen como vectores unidad respectivos \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . El triedro orientado $O(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ define la orientación del espacio.

Se designa:

- por a una constante positiva dada;
- por θ y φ dos variables;
- por P el punto definido por $\overrightarrow{OP} = a(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta)$;
- por (σ_1) el sistema de referencia cuyo origen es el punto P y cuyos ejes $\overrightarrow{x_1'Px_1}$, $\overrightarrow{y_1'Py_1}$, $\overrightarrow{z_1'Pz_1}$ tienen como vectores unidad respectivos \vec{i}_1 , \vec{j}_1 , \vec{k}_1 tales que

$$\vec{i}_1 = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta, \quad \vec{j}_1 = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta, \quad \vec{k}_1 = \vec{k};$$

- por (Σ) el sistema de referencia cuyo origen es el punto P y cuyos ejes $\overrightarrow{X'PX}$, $\overrightarrow{Y'PY}$, $\overrightarrow{Z'PZ}$ tienen respectivamente como vectores unidad \vec{I} , \vec{J} , \vec{K} tales que

$$\vec{I} = -\vec{k}_1 \sin \varphi + \vec{i}_1 \cos \varphi, \quad \vec{J} = \vec{j}_1, \quad \vec{K} = \vec{k}_1 \cos \varphi + \vec{i}_1 \sin \varphi.$$

Se podrá definir un punto, ya sea mediante sus coordenadas cartesianas (x, y, z) en el sistema de referencia (σ) , ya sea mediante sus coordenadas cartesianas (x_1, y_1, z_1) en el sistema de referencia (σ_1) , ya sea mediante sus coordenadas cartesianas (X, Y, Z) en el sistema de referencia (Σ) .

Las dos partes del problema son independientes una de otra.

Parte I

Habiéndose elegido una unidad de tiempo, se supone que θ y φ son funciones dadas del tiempo t , definidas en el intervalo $] -\infty, +\infty[$ y que admiten en este intervalo derivadas primeras θ' y φ' , no nulas.

Se propone el estudio de algunas propiedades del movimiento del sistema de referencia (Σ) (o de un sólido invariablemente ligado a este sistema) respecto al sistema de referencia (σ) . Se designa por M un punto invariablemente ligado a (Σ) y por \overrightarrow{MV} el vector velocidad de este punto, en un instante cualquiera t , en el movimiento de (Σ) respecto a (σ) .

I.1. Calcular las componentes de \overrightarrow{MV} en cada uno de los tres sistemas de referencia (σ) , (σ_1) , (Σ) , en función de θ , φ , θ' , φ' y de sus coordenadas de M en el mismo sistema de referencia. (Se indicará el método elegido y el orden adoptado para hacer estos cálculos.)

I.2. En el movimiento de (Σ) respecto a (σ) se considera, en un instante cualquiera t , el eje instantáneo de rotación y de deslizamiento Δ , el vector rotación instantánea $\vec{\Omega}$, el vector velocidad \vec{V}_Δ de un punto de (Σ) situado sobre Δ .

Formar las ecuaciones de la recta Δ en cada uno de los sistemas de referencia (σ) , (σ_1) , (Σ) y calcular las componentes de $\vec{\Omega}$ y de \vec{V}_Δ en el sistema de referencia (σ_1) .

I.3. Se considera la recta Δ en el sistema de referencia (σ_1) ; demostrar que, cualquiera que sea t , Δ se halla situada sobre una superficie (C_1) invariablemente ligada a (σ_1) , independiente de las funciones θ y φ ; formar la ecuación de (C_1) en el sistema de referencia (σ_1) y dar una definición geométrica de esta superficie.

I.4. Se supone que las derivadas primeras θ' y φ' de las funciones θ y φ se hallan ligadas, cualquiera que sea t , por la relación $\varphi' = m\theta'$, siendo m una constante no nula dada, y se designa por μ el número definido por las condiciones

$$\cotg \mu = m, \quad 0 < |\mu| < \frac{\pi}{2}.$$

Con estas condiciones, precisar la posición de Δ en cada uno de los tres sistemas de referencia (σ) , (σ_1) , (Σ) .

Al variar t , la recta Δ engendra en el sistema de referencia (σ) una superficie (h) y en el sistema de referencia (Σ) una superficie (H) . Formar la ecuación de (h) en el sistema de referencia (σ) y la ecuación de (H) en el sistema de referencia (Σ) ; definir geoméricamente estas dos superficies.

En el instante dado t , las dos superficies (h) y (H) tienen en común la recta Δ ; determinar el plano tangente a (h) y el plano tangente a (H) en un punto cualquiera de Δ y comparar estos dos planos.

Parte II

Se supone $\varphi = \theta/2$ y se designa por D la recta que soporta el eje $\overrightarrow{Z'PZ}$ del sistema de referencia (Σ) .

II.1. Demostrar que la superficie S engendrada por la recta D al variar θ se puede definir como el conjunto de los puntos cuyas coordenadas (x, y, z) , en el sistema de referencia (σ) , vienen dadas por las relaciones

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= a + u \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ y &= a + u \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \theta \\ z &= u \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

donde u y θ son dos variables independientes.

¿En qué intervalo conviene hacer variar los parámetros u y θ para que las ecuaciones (1) definan toda la superficie S ? Demostrar que la superficie S tiene a la recta $x'Ox$ como eje de simetría.

¿Cuáles son, sobre la superficie S , las curvas trayectorias ortogonales de las rectas D ?

II.2. Demostrar que todo plano Π que pasa por la recta $z'Oz$ contiene dos rectas D . Definir y construir el lugar del punto común a estas dos rectas cuando el plano Π gira alrededor de $z'Oz$.

Demostrar que todas las rectas D cortan a dos rectas fijas cuya posición se precisará.

II.3. Determinar y construir la envolvente E de las proyecciones ortogonales de las rectas D sobre el plano (Oy, Oz) .

Se considera las proyecciones ortogonales d_1 y d_2 sobre el plano (Oy', Oz) de las dos rectas D situadas en un plano cualquiera Π que pase por $z'Oz$, y se designa por L la recta que une los puntos

de contacto de d_1 y d_2 con (E) ; indicar en qué forma varía la figura constituida por las tres rectas d_1 , d_2 y L al girar el plano Π alrededor de $z'Oz$.

(Prueba común de Minas, 1971.)

P. 3

Se invita a los alumnos, para aligerar o simplificar ciertos cálculos, a que hagan observaciones geométricas; tales observaciones deberán redactarse cuidadosamente.

Un sólido S ligado a un sistema de referencia ortonormado $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (ejes Ox, Oy, Oz) se halla en movimiento respecto a un sólido T definido por un sistema de referencia ortonormado $\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ (ejes $\Omega X, \Omega Y, \Omega Z$) en las condiciones siguientes:

- La recta Ox de S pasa en todo instante por el punto Ω y se pondrá $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{i} \cdot f(t)$, siendo f una función derivable del tiempo t , $f' = df/dt$ una función continua de t .
- El vector rotación instantánea del movimiento de S respecto a T es en cada instante igual a \vec{k} .
- El eje instantáneo de rotación y de deslizamiento del movimiento corta al plano Oxy en el punto I , variable, situado sobre la recta D que pasa por O y de vector director $\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha$, siendo α una constante dada que satisface a $0 < \alpha < \pi/2$, se designará por P el plano que contiene a Oz y D .

En el instante $t = 0$, origen del estudio propuesto, se tiene $f(0) = d$, $\vec{k} = \vec{K}$ y los ejes Ox y ΩX coinciden en dirección y sentido. En todo el problema, t varía entre 0 y $+\infty$.

Parte I

Demostrar que el plano Oxy se desliza sobre el plano ΩXY . Determinar en el instante t el ángulo $(\Omega X, Ox)$ y, mediante sus coordenadas, la posición de O en el sistema de referencia $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$.

Demostrar que las condiciones a), b) y c) son compatibles si, y solamente si, la función f satisface a la ecuación diferencial:

$$\frac{df}{dt} + f \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Indicar una construcción geométrica de la posición de I suponiendo conocida la de O .

Determinar los conjuntos Γ y Γ' de las posiciones tomadas por I y por O en el plano ΩXY a lo largo de un movimiento. Dibujar la forma general de Γ y demostrar que Γ' se deduce de Γ por una transformación geométrica sencilla.

Demostrar que existe una infinidad de valores de α para los cuales el conjunto Γ se halla incluido en Γ' (no se intentará calcular estos valores de α).

Parte II

Determinar las rectas Δ ligadas a S sobre las cuales existe en cada instante un punto de S cuyo vector velocidad respecto a T es nulo o paralelo a Δ .

Demostrar, considerando en primer lugar el caso en que corta a Oz , que una recta ligada a S y paralela al plano Oxy se mantiene tangente a una curva, ligada a T , semejante a Γ o paralela a una curva semejante a Γ , salvo cuando esta recta tiene una dirección particular que se precisará.

Se podrá definir la recta estudiada, ligada a S , por su cota y su proyección sobre el plano Oxy (habiendo puesto bajo forma normal la ecuación de esta proyección).

Parte III

Demostrar que en todo plano ligado a S y no paralelo a Oxy existe en cada instante una recta tal que los vectores velocidad respecto a T de cada uno de sus puntos son nulos o paralelos al plano.

Se considera el plano Q ligado a S y que admite como ecuación en el sistema de referencia $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$-x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi + z - h = 0$$

donde φ , elemento de $[0, \pi]$, y h son constantes dadas.

Sea M el punto de Q que tiene una velocidad nula en el instante t . Demostrar que el conjunto de las posiciones de M en T es un arco de una curva G cuyas tangentes forman un ángulo constante con el plano ΩXY .

¿Qué condición ha de cumplir φ para que la curva G sea plana?

¿En qué condición es el plano Q plano osculador a G en M ?

Comprobar que la intersección D' de los planos P y Q rueda sin deslizamiento sobre la curva G .

Calcular la curvatura y la torsión de G en M .

Demostrar que cuando la curva G , no es plana, está trazada sobre un cono de revolución de eje ΩZ y que corta a las generatrices de este cono según un ángulo constante.

Demostrar que el centro de curvatura de G en M se desplaza también sobre un cono de revolución de eje ΩZ . ¿Para qué valores de α existe uno o varios valores de φ tales que los dos conos mencionados se confunden?

Parte IV

Sea \mathcal{R} el triedro de Frenet de la curva G en el instante t . Determinar el vector rotación instantánea del movimiento de \mathcal{R} respecto a T . Estudiar el movimiento de \mathcal{R} respecto a S .

Parte V

Un sistema de referencia ortonormado Σ definido por $O_1, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ se halla en movimiento respecto a S . El punto O_1 coincide en cada instante con O y el vector rotación instantánea de Σ respecto a S , fijo respecto a S y por lo tanto también respecto a Σ , tiene por expresión

$$\vec{\omega} = \vec{i} \operatorname{sen} \alpha - \vec{j} \cos \alpha - \lambda \vec{k},$$

donde λ es una constante dada (en el instante $t = 0$ los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coinciden respectivamente con los vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Haciendo uso del teorema sobre la composición de velocidades, determinar el vector rotación instantánea del movimiento de Σ respecto a T . Determinar λ para que O_1 pertenezca al eje instantáneo de rotación y de deslizamiento δ de este movimiento.

Cuando λ tiene el valor anteriormente hallado, ¿cuál es la superficie engendrada por δ en el sistema de referencia Σ ?

(Escuela Politécnica, prueba de 1971.)

P. 4

En el espacio afín euclídeo E de dimensión 3 y orientado, se considera

- una circunferencia (A) de centro A , de radio a ($a > 0$) y situada en un plano π ;
- el eje (Δ) de (A) , perpendicular en A a π y de vector unitario k ;
- sobre (Δ) un punto S determinado por $AS = hk$, siendo h un parámetro real positivo.

El espacio E se halla referido a un sistema ortonormado $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ de eje Oz paralelo a (Δ) ; \mathcal{R} se elige de modo que las coordenadas de A sean $x = -a, y = 0, z = 0$.

I. Sea Γ_φ el conjunto, obtenido al hacer variar θ entre $-\infty$ y $+\infty$, de los puntos $M(\theta)$ de E que tienen como coordenadas en \mathcal{R} :

$$M(\theta) \begin{cases} x = a \cos \theta (1 - \cos \theta) (1 + \cos \varphi) \\ y = a \sin \theta (1 - \cos \theta) (1 + \cos \varphi) \\ z = a(1 - \cos \theta) \sin \varphi, \end{cases}$$

donde a es el radio de (A) y φ un parámetro perteneciente a $]0, \pi[$.

1. Construir las proyecciones ortogonales de $\Gamma_{\pi/2}$ sobre los tres planos de coordenadas; estudiar en qué forma se deducen geoméricamente las de Γ_φ cuando φ es cualquiera. Demostrar que la proyección ortogonal de $\Gamma_{\pi/2}$ sobre el plano xOy es el conjunto de las proyecciones ortogonales de O sobre las tangentes a (A) .

2. Determinar para un valor cualquiera de φ el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de Γ_φ en el punto de parámetro $\theta = \pi$, hallándose la curva Γ_φ orientada en el sentido de las θ crecientes.

3. Demostrar que la meridiana de la superficie de revolución R , engendrada por rotación de φ_φ alrededor de una recta D_γ de ecuaciones $x = \alpha$ e $y = 0$, se halla incluida en una curva de segundo grado, de la cual se discutirá la naturaleza según el valor de α .

Para valores fijos de φ y de α , calcular el volumen $V(\varphi, \alpha)$ interior a R , comprendido entre los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = 2a \sin \varphi$. Para un valor dado de φ , ¿cómo hay que elegir β para que $V(\varphi, \alpha)$ sea mínimo y cuál es entonces la naturaleza de la meridiana de R ?

II. Un espacio afín orientado E_1 , referido a un sistema ortonormado $\mathcal{R}_1(S, I, J, K)$ se halla animado respecto a E de un movimiento de rotación uniforme de eje (Δ) y de vector de rotación $\Omega = \omega k$; en el instante $t = 0$, los vectores I, J, K son respectivamente iguales a i, j, k .

Un tercer espacio afín E' se halla animado respecto a E_1 de un movimiento de rotación uniforme cuyo eje (Δ') , que pasa por S , está ligado a E_1 y cuyo vector rotación es

$$\Omega' = \omega'(I \sin \psi + J \cos \psi).$$

Las constantes ω, ω' y ψ satisfacen a: $\omega > 0, \omega' > 0, \psi \in]0, \pi[$.

1. ¿Cuál es el movimiento de E' respecto a E ? Determinar en el instante t el vector rotación así como el eje instantáneo Δ'' de rotación y de deslizamiento de este movimiento.

¿Cuáles son las superficies engendradas en cada uno de los espacios E y E' ?

Demostrar que el movimiento de E' respecto a E puede ser realizado haciendo rodar sin deslizamiento una superficie cónica (C') ligada a E' sobre una superficie cónica (C) ligada a E . ¿ (C') o (C) pueden ser planos?

2. Deducir que el movimiento de E' respecto a E se puede realizar también en general por rodamiento sin deslizar de una circunferencia (L') de E' sobre una circunferencia (L) del plano π de E .

¿Es posible elegir ω, ω', h y ψ de modo que se cumplan a la vez las dos condiciones siguientes

- la circunferencia (L) pasa por O ,
- la circunferencia (L') es de radio a ?

Caracterizar en este caso las posiciones en E del plano de (L') y establecer que el conjunto de las posiciones en E del punto Q de (L') , que pasa por O en el curso del movimiento, es una curva Γ_φ estudiada en la primera parte.

III. Sean $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ cuatro conos materiales llenos y distintos, todos de revolución, limi-

tados en su vértice común S y con planos de bases circulares tales que sus apotemas (segmentos de generatrices con extremos en S y sobre la circunferencia de base) tengan todas la misma longitud b :

- Σ_1 tiene por eje (Δ) y por semiángulo en el vértice φ_1 ($\varphi_1 \in]0, \pi/2[$);
- Σ_2 tiene por eje (Δ) y por semiángulo en el vértice φ_2 ($\varphi_2 \in]0, \pi/2[$), estando Σ_1 y Σ_2 una parte y otra del plano perpendicular a (Δ) en S ;
- Σ_3 tiene su eje D y su ángulo en el vértice tales que es tangente a Σ_1 y Σ_2 ;
- Σ_4 de eje D' es igualmente tangente a Σ_1 y Σ_2 y en el instante $t=0$ tiene solamente en común con Σ_3 el punto S .

Relativamente al espacio E , los conos Σ_1 y Σ_2 giran alrededor de Δ , siendo los vectores rotación constantes respectivamente $\omega_1 k$ y $\omega_2 k$.

Un espacio orientado F' , al cual se halla ligado D , está animado respecto a E de un movimiento de rotación de eje (Δ) y de vector constante $\omega_3 k$. Relativamente a F' el cono Σ_3 está animado de un movimiento de rotación alrededor de D cuyo vector rotación tiene una medida algebraica constante sobre el eje D orientado en el sentido de SH , siendo H la proyección ortogonal de S sobre el plano de base de Σ_3 .

1. Establecer las relaciones que tienen que satisfacer $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \varphi_1$ y φ_2 para que Σ_3 ruede sin deslizamiento sobre Σ_1 y Σ_2 .

2. Al rodar también Σ_4 sin deslizamiento sobre T_1 y Σ_2 , ¿cuál es el movimiento de D relativamente a F' ?

(Escuela Politécnica, prueba de 1972.)

Bibliografía

Obras que completan a la presente:

- [1] E. ARTIN, *Geometric algebra*, Interscience Publishers (New York, 1957)
(traduction française *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars).
- [2] M. BERGER, *Géométrie différentielle*, A. Colin (1972).
- [3] M. BERGER, *Mathématiques élémentaires approfondies. Géométrie*, Cours
polycopié de l'Université Paris VII.
- [4] N. BOURBAKI, *Algèbre linéaire*, Actualités Scientifiques n° 1236, Hermann.
- [5] P. BROUSSE, *Mécanique*, A. Colin (1968).
- [6] G. CHOQUET, *L'enseignement de la Géométrie*, Hermann (1964).
- [7] G. CHOQUET, *Topologie*, Masson (1964).
- [8] G. DARBOUX, *Principes de Géométrie analytique*, Gauthier-Villars (1927).
- [9] G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (4. vol.), Gauthier-
Villars.
- [10] J. DIEUDONNÉ, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann (1964).
- [11] J. FREUKEL, *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann (1973).
- [12] W. HODGE, D. PEDOE, *Methods of algebraic geometry* (3 vol.), Cambridge
university press (1947).
- [13] J. LELONG-FERRAND, *Géométrie*, Masson.
- [14] R. J. WALKER, *Algebraic curves*, Princeton university press (1950).

Índice alfabético

- A
- Abscisa curvilínea, 370
 - Aceleración, 644
 - absoluta, 716
 - angular, 658
 - arrastre, 716
 - , campo, 704
 - complementaria, 716
 - , componentes, 652
 - , — , coordenadas esféricas, 655
 - , — , — semipolares, 654
 - Coriolis, 716
 - normal, 653
 - relativa, 715
 - sistema referencial Frenet, componentes, 653
 - tangencial, 653
 - Análisis vectorial, fórmulas, 263
 - Ángulo, división, problema algebraico, 94
 - dos planos, 118, 125
 - — rectas, 87
 - — — , determinación, 110
 - — vectores, 86
 - Euler, 639
 - no orientado vectores, 86
 - orientado dos rectas, 92
 - — — vectores, 90
 - — plano euclídeo, 89
 - recta plano, 119
 - , relaciones concepto elemental, 93
 - variedades afines, 88
 - Antidesplazamiento, 127
 - Aplicación afín, puntos fijos, 26
 - Aplicación afín, sistema referencia, expresión, 61
 - Arco abierto, 299
 - , cálculo curvatura normal, 562
 - , caracterización por soporte, 311
 - , centro curvatura, 380
 - , — — normal, 557
 - cerrado, 299
 - — simple, 301
 - cicloide, 395
 - , concavidad, 387
 - , — respecto origen, 451
 - , contacto, 313
 - , — , orden exacto, 316
 - , coordenadas esféricas, 366
 - , — polares o cilíndricas, 364
 - , curvatura, 372
 - , — normal, 558
 - definido coordenadas polares, 392
 - — parametrización cartesiana, 300, 308
 - , determinación mediante ecuación intrínseca, 396
 - dirección única, parametrización, 304
 - dos orientaciones, 303
 - , ecuaciones intrínsecas, admisión, 419
 - eje fijo, ángulo tangente, 390
 - esfera, curvatura normal, caso, 570
 - espacio afín euclídeo, contacto, 368
 - — — — , curvatura, 368
 - — — — , parámetros normales, 368
 - , evoluta, 378
 - , extremo, 299
 - , función angular, 454
 - geométrico, 296

Arco geométrico clase C^k , 298
 — — , estudio afín, 295
 — , hiperplano normal principal, 372
 — , imagen, 319
 — , — aplicación diferenciable, 319
 — inmerso, 310
 — , invariancia contacto difeomorfismo, 319
 — orientado, 302
 — osculador, 318
 — paralelo, 465
 — — arco dado, 465
 — — elipse, 471
 — — , evolutas, 467
 — — , propiedades, 466
 — , parametrizaciones periódicas, 301, 371
 — pequeño-cuerda, equivalencia longitudinal, 361
 — plano, ecuaciones intrínsecas, 396
 — — , estudio local, 384
 — — , funciones angulares, 387
 — — , ramas infinitas, 339
 — — simple, estudio, 336
 — , propiedades métricas, 357
 — , puntos estacionarios, 307, 452
 — , — regulares, 307
 — , radio curvatura, 373
 — , — — algebraica, 380
 — , — — geodésica, 557
 — , — — normal, 557
 — , — torsión geodésica, 557
 — , ramas infinitas, estudio, 453
 — rectificable, 358
 — — , concepto general, 357
 — — , longitud, 357
 — regular, 305
 — — puntos inflexión, 331
 — simple, 300
 — — , ecuaciones intrínsecas, 417
 — — , estudio métrico, 412
 — sobreosculador, 318
 — , subespacios fundamentales, 320
 — subvariedad afín, caracterización, 331
 — tangente, 318
 — , tangente, 372
 — , — orientada, 323
 — , — punto regular, 321
 — , torsión geodésica, 558
 — trazado hoja geométrica, tangentes, 518
 — — — , longitud, 548
 — — sobre hoja, 503
 — , variedad hoja, contacto, 545
 Automorfismo, 11
 Axoide, 725
 — , determinación práctica, 728
 — , posición relativa, 727

B

Baricentro, 36
 — , conjunto, 58
 — , coordenadas, 42
 — , — homogéneas, 44
 Base afín, 43
 — cilindro, 180
 — ordenada espacio afín, 59
 Bernoullí, lemniscata, 366
 Binet, fórmula. 663

C

Camino, 296
 — clase C^k , 296
 — equivalente, 297
 Campo aceleraciones, 704
 — equiproyectivo, 265
 — — , espacio vectorial, 267
 — — , prolongación, 268
 — gradientes espacio euclídeo, 247
 — momentos sistema fuerzas, 283
 — rotacional, caracterización, 259
 — — nulo, 258
 — torsores, 233
 — uniforme, 271
 — vectores, 233, 243
 — — diferenciable, divergencia, 245
 — — , espacio vectorial, 244
 — — , laplaciana, 264
 — velocidades movimiento compuesto, 720
 Cardiode, 299
 — , estudio, 490
 Catalan, teorema, 801
 Catenaria, 299, 300
 Catenoide, 591
 Centro curvatura normal arco, 557
 — radical esferas, 193
 — — tres circunferencias, 166
 Cicloide, 476
 — , centro instantáneo rotación, 477
 — con centro, 479
 — conjunto finito puntos estacionarios, 488
 — , — puntos estacionarios, estudio, 487
 — , doble generación, 481
 — , evoluta, 489
 — , interpretación cinemática, 477
 — , isometrías, 487
 — particulares, estudio, 490
 — , propiedades generales, 484
 — semejantes, 486
 Cilindro, 180, 195, 206
 — , base, 180

- Cilindro elíptico, 207
 - , generatriz, 180
 - hiperbólico, 207
 - parabólico, 207, 210, 214
 - revolución, 207
- Cinemática punto, 643
 - sólido, 681
- Círculo d'Yvon Villarceau, 222
- Circunferencia Apolonio, 171
 - curvatura, 377
 - , interpretación geométrica, 386
 - ecuación normal, 157
 - , – paramétrica, 159
 - , – polar, 159
 - , evolventes, 475
 - intersección recta, 165
 - , inversa, 160
 - Meusnier, 561
 - ortogonales, 167
 - osculatriz, 377
 - pasando tres puntos, 160
 - plano euclídeo, 156
 - , tangente desde un punto, 162
 - tritangente, 492
- Comomento dos torsos, 275
- Compuesta espacio afín, 19
- Concavidad arco, 387
 - respecto origen, 451
- Cónica, 172
 - , ecuación general, 176
 - , ecuaciones cartesianas, 174
 - , – polares, 173
 - , parámetro, 173
 - sistema referencia afín cualquiera, 176
 - , superficies, 183
- Conjunto baricentros, 58
 - convexo, ejemplos, 54
 - , definición, 155
 - definido ecuaciones cartesianas, 155
 - ecuación cartesiana, 18
 - polar, 164
- Cono, 195, 207
 - , generatriz, 183
 - , plano tangente, 208
 - revolución, 208
 - segundo grado, 206
 - , semiángulo vértice, 208
 - simétrico, 183
 - , vértice, 183
- Conoide, 186, 213
 - Plücker, 764
- Convexidad espacio afín, 53
- Coordenadas, 17
 - cilíndricas, 100
 - esféricas, 101
 - – globales, 102
- Coordenadas, plückerianas, 774
 - polares, 96
 - – globales, 98
 - semipolares, 100
- Coriolis, aceleración, 716
- Cotorsor, 270
- Cuádrica con centro, 194
 - , plano tangente, 536
 - revolución, 196
 - , simétricas, 196
- Cúbica alabeada, 410
 - , estudio, 432, 436, 437
 - unicursal, estudio, 442
- Cuerpo base, 1
- Curva conchoide, 491
 - coordenadas polares, ejemplos construcción, 455
 - cúbica, 432
 - directriz hoja, 533
 - Lissajous, 439
 - motor rotativo, 498
 - ortóptica, 492
 - , parametrización, estudio global, 439
 - , – polares, 448
 - plana, construcción, 431
 - – coordenadas polares, construcción, 447
 - – definida implícitamente, 343
 - – , parametrización cartesiana, 431
 - – , puntos inflexión, 345
 - – , singularidades, 346
 - , puntos inflexión, 451
 - , – ordinario, entorno, estudio, 449
 - , unicursal, 441, 442
- Curvatura algebraica, 379
 - – coordenadas cartesianas, 382
 - – , – polares, 383
 - – , ejemplos, 352
 - – , trazado global, 355
 - , cálculo, 405
 - , determinación función, 380
 - , expresión, 391
 - geodésica, 555, 608
 - media hojas, 586
 - normal, 555
 - – arco, 558
 - – – , cálculo, 562
 - – – esfera, caso, 570
 - – – , interpretación geométrica, 560
 - principal hoja, 581
 - – – , cálculo, 585
 - , radio, 404
 - total hojas, 586
- CH
- Chasles, relación, 90, 92

D

- Darboux, fórmulas, 556
- , sistema referencia, 553, 555, 632
- , —, cambio orientación, 557
- Descomposición canónica, 126
- isometrías, 136
- traslaciones, 141
- Deslizamiento, eje instantáneo, determinación, 703
- Deslizantes concurrentes, 290
- paralelos, 291
- , suma de, 289
- Desplazamiento, 126, 127
- Determinante espacio afín, 22
- Dilatación, 5, 12
- afín, 50
- hiperplano, 51
- vectorial, 8
- Dirección asintótica, 180
- principal recta vectorial, 179
- Directriz hoja cilíndrica, 182
- Distancia angular dos rectas, 87
- vectores, 86
- Divergencia campo vectores diferenciable, 245
- producto, 263
- División vectorial, 240

E

- Ecuación cartesiana cónicas, 172
- tangente circunferencia, 163
- esfera, 188
- general cónicas, 176
- hipérbola, 175
- normal circunferencia, 157
- parábola, 174
- paramétrica circunferencia, 159
- pendientes, 112
- plano, 115
- polar circunferencia, 159
- cónicas, 172
- recta, 106
- recta, 105
- superficial revolución, 215
- Eje central torsor, 273
- radical dos circunferencias, 166
- esferas, 192
- Elipse, 201
- , arcos paralelos, 471
- , evolutas, 470
- Elipsoide, 197
- alargado, 198
- aplanado, 198
- revolución, 198
- Endomorfismo antisimétrico espacio vectorial euclídeo, 234

- Endomorfismo antisimétrico vector, 241
- ortogonal, propiedad, 130
- segunda forma fundamental hoja, 572
- Energía cinética, 644
- , integral primera, 651
- Envoltura convexa espacio afín, 57
- Epicicloide, 480
- Epitrocoide, 482
- Esfera, 188
- , cono circunscrito, 191
- , ecuaciones, 188
- , eje radial, 192
- , geodésicas, 599
- , haces, 194
- intersección plano, 189
- recta, 190
- ortogonales, 193
- oscultriz, 415
- pasando cuatro puntos, 189
- , plano radical, 192
- , puntos conjugados, 192
- , redes, 194
- sobreoscultriz, 415
- tangente plano, 189
- , —, trazado, 190
- Espacio afín, 13
- , base ordenada, 59
- , compuesta, 19
- , determinante, 22
- , dimensión, 24
- finita, 27
- , dirección, 24
- , envoltura convexa, 57
- , estructuras vectoriales, 22
- euclídeo, 80
- , hiperplano afín, 32
- , orientación, 65
- , parte lineal, 19
- , producto, 17
- , sistema referencia, 59
- , —, cambios, 60
- , transformaciones, 47
- campos rotacionales, 257
- euclídeo, 79, 80
- , campos gradientes, 247
- dimensión 3: rotacional, 254
- móvil, 688
- , campo velocidades-rotación instantánea, 695
- , isometrías, 689
- ligado sistema referencia móvil indeformable, 701
- sólido movimiento, 692
- , movimiento-derivada vector ligado, 696
- , movimientos asociados, 691

- Espacio prehilbertiano, 80
 - vectorial asociado, 13
 - – campo vectores, 244
 - – – equiproyectivos, 267
 - – director, 13
 - – euclídeo, 80
 - – – , endomorfismos antisimétricos, 234
 - – , orientación, bases, 63
 - – real, orientación, 62

- Estructura afín, 10
 - – espacio vectorial, 16
 - – natural, 16
 - isometrías, 133

Euler, ángulos, 639

Evoluta, 463

- arcos paralelos, 467
- cicloide, 489
- elipse, 470
- espiral logarítmica, 474
- -evolvente, relaciones, 469
- , propiedades, 464
- , tangente punto estacionario, 465

Evolvente, 377, 468

- circunferencia, 475
- espiral logarítmica, 474
- hélices, 428
- , propiedades, 468

F

Forma polar segunda forma cuádrica fundamental, 575

Fórmula Binet, 663

- Darboux, 556
- Frenet, 378, 379, 402
- Olinde Rodrigues, 598
- Varignon, 271

Frenet, fórmulas, 378, 379, 402

- , sistema referencia, 378, 559, 632
- , – – , componentes aceleración, 653
- , – – , – velocidad, 653

Función afín, 32

- hessiana, 346

G

Generador Dep (E_n), 142

- Is (E_n), 141

Generatriz, 201, 213

- cilindro, 180
- cono, 183
- hoja cilíndrica, 182

Geodésica, caracterización, 609

- , determinación, 608

Geodésica, ecuaciones Lagrange, 610

- , interpretación cinemática, 610
- , propiedades extremas, 614

Geometría afín, 1

Gradiente base ortonormal, expresión, 248

- producto, 263

Grupo afín, 20

- – , aplicaciones, 18
- especial afín, 22
- , generadores, 141
- homotecias, 21, 47
- traslaciones, 21, 47

H

Haz bisectrices dos rectas, 114

- circunferencias concéntricas, 168
- – tangentes, 171
- dos rectas plano afín euclídeo, 113
- esferas, 194
- líneas circunferencias, 168
- planos afines, 73
- rectas, 110
- – definido ecuación segundo grado, 110

Hélice, 424

- circular, 299, 300, 409
- , determinación mediante ecuaciones intrínsecas, 428
- , evolventes, 428
- , generación geométrica, 426
- , propiedades, 425
- , torsión, 429

Helicoide recto, 593

Helly, teorema, 748

Hermann Weyl, teorema, 750

Hessiana, función, 346

Hipérbola, 201

- , ecuación, 175

Hiperboloide dos hojas, 199

- una hoja, 200

Hiperplano afín, 25

- – , ecuación cartesiana, 33
- – espacio afín, 32
- , intersección, 34
- , proyecciones, 49
- vectorial, 2

Hipocicloide, 480

- cuatro retrocesos, 494
- tres retrocesos, 491

Hipotrocoide, 482

Hodógrafa, 646

Hoja, arista retroceso, 538, 540

- cilíndrica, 181
- – , geodésicas, 600
- – , plano tangente, 520

Hoja cónica, 185
 — — , plano tangente, 519
 — conoide, 187
 — , curva directriz, 533
 — , curvatura media, 586
 — , — total, 586
 — , — principales, 581
 — , — — , cálculo, 585
 — , geodésica, 594
 — geométrica, 502
 — — orientada, 505
 — — , parametrización cartesiana, 517
 — — , plano vectorial tangente, 514
 — — , — — — , propiedades contacto, 515
 — — , tangentes arcos trazados, 518
 — inmersa soporte, caracterización, 542
 — , intersección superficies, 523
 — , línea asintótica, 594
 — , — curvatura, 594
 — , longitud arco trazado, 548
 — , normal orientada, 554
 — orientada, 504
 — , ortogonalidad dos vectores tangentes, 551
 — parametrización cartesiana, 552
 — , — — , caso, 566
 — , plano tangente, 513
 — , — — , ecuaciones, 514
 — , posición respecto plano tangente, 524
 — , punto elíptico, 526
 — , — hiperbólico, 527
 — , — parabólico, 528
 — , — puerto, 528
 — , — silla montar, 528
 — , — umbílico, 581
 — , puntos múltiples, 506
 — , — simples, 506
 — reglada, 532
 — — desarrollable, 537
 — — . segunda forma fundamental, 571
 — regular, 509
 — revolución, 218, 589
 — silla montar, estudio, 530
 — simple, 508
 — — , orientaciones, 508
 — — regular, 510
 — — — , funciones diferenciables, 512
 — , soporte, estudio, 506
 — , subvariedad, 544
 — , tangentes asintóticas, 529
 — , vector normal, 553
 Homeomorfismo, 542
 Homomorfismo determinante, 11
 — suprayectivo, 11
 Homotecia, 5
 — espacio vectorial, 7

Homotecia, grupo, 21, 47

I

Imagen arco, 319
 — — aplicación diferenciable, 319
 Inmersión, 310, 541
 Inmovilidad, 687
 Intersección tres planos directores, 74
 Inversión, 152
 Isometría, 126
 — , descomposición canónica, 136
 — directa, 127
 — espacio afín, espacio prehilbertiano, 133
 — , estructura, 133
 — indirecta, 127
 — , prolongación, 132
 Isomorfismo espacio vectorial, 4
 — , notación, 5

J

Joachimstal, teorema, 804

K

Kakutani, lema, 747
 Kepler, leyes, 675

L

Lagrange, ecuaciones, geodésica, 610
 Laplaciana, 253
 — campo vectores, 264
 — producto, 263
 Lema Kakutani, 747
 Lemniscata, 450
 — Bernoullí, 366
 Levantamiento aplicación continua módulo 1, 388
 Ley áreas, 662
 — horaria, 645
 — Kepler, 675
 — tiempo, 645
 Lissajous, curva, 439
 Loxodrómica, 794

M

Meridiano, 215
 Meusnier, circunferencia, 561
 — , teorema, 561
 Momento torsor, 270
 — — respecto eje, 283
 — vector deslizante, 282

Morfismo biyectivo, 5
 Morley-Petersen, teorema, 773
 Motor rotativo, curvas, 498
 Movimiento aceleración central, 659
 — — —, determinación, 664, 666, 667, 669
 — acelerado, 645
 — circular, 645, 657
 — compuesto, 719
 — —, campo velocidades, 720
 — definido sistema referencial ortonormal móvil, 702
 — -derivada vector ligado espacio móvil, 696
 —, ejemplos, 705
 — elemental, 711
 — — tangente movimiento dado, 712
 — epicicloidal, 736
 — estacionario, concepto, 713
 — helicoidal uniforme, 709
 — hipocicloidal, 736
 — inverso, 720
 — oscilatorio, 650
 — periódico, 650
 — plano, 645
 — — sobre plano, 729
 — — — —, base, 734
 — — — —, centro instantáneo rotación, 730
 — — — —, — — —, determinación, 733
 — — — —, determinación, 732
 — — — —, propiedades cinemáticas, 730
 — — — —, — geométricas, 730
 — — — —, rodante, 734
 — puntual, 644
 — —, determinación, 648
 — — newtoniano, 670
 — — — circular uniforme, 673
 — — —, determinación trayectoria, 672
 — — — elíptico, 673
 — — —, estudio, 674
 — — — hiperbólico, 673
 — — —, naturaleza, 673
 — — — parabólico, 673
 — — relativo, 714
 — rectilíneo, 645, 647
 — relativo, 714
 — — espacio móvil, 719
 — retardado, 645
 — sólidos, 685
 — —, interpretación geométrica, 685
 — —, punto fijo, concepto, 687
 — traslación, 705
 — uniforme, 645

N

Nefroide, 499

Nefroide estudio, 493
 Normal geodésica, 555
 — orientada hoja, 554

O

Olinde Rodrigues, fórmula, 598
 Orientación espacio afín, 65
 — — vectorial real, 62
 — plano, efecto cambio, 91, 94
 Ortogonalidad, 83
 Osculatriz, 318

P

Parábola, ecuación, 174
 Paraboloide, 210
 — elíptico, 211, 214
 — equilátero, 213
 — hiperbólico, 212, 214, 533, 605
 — revolución, 211
 Paralelismo variedades afines, 30
 Parametrización baricéntrica plano afín, 46
 — — recta afín, 46
 — — variedades afines, 45
 — cartesiana hoja, caso, 566
 — conjunto ecuaciones cartesianas, 156
 — curvas, estudio global, 439
 — plano afín, 30
 — recta afín, 30
 — variedad afín, 29
 Plano afín, parametrización, 30
 — radical esferas, 192
 Paralelo superficie revolución, 215
 Permutación vectores base, 64
 Perpendicular común dos rectas, 121
 — subespacios vectoriales, 84
 Plano afín, haces, 73
 — —, haz rectas, 68
 — —, rectas dimensión 2, 66
 — bisectores, 126
 — definido ecuación segundo grado, 123
 —, ecuaciones, 115
 — espacio afín dimensión 2, 70
 — euclídeo, rectas, 105
 — meridiano, 215
 —, orientación, efecto cambio, 91, 94
 — osculador, coordenadas homogéneas, 329
 — —, ecuación cartesiana, 328
 — — punto regular, 323
 — paralelos, distancia entre, 118
 — tangente conjunto noción geométrica, 224
 — — cono, 208
 — — cuádricas, 536
 — — hoja cilíndrica, 520

Plano tangente hoja cónica, 519
 — — superficie reglada, 535
 — — — revolución, 521
 — vectorial, 2
 — — tangente hoja geométrica, 514
 Plücker, conoide, 764
 — , coordenadas, 774
 Polar, 164
 Potencia, interpretaciones geométricas, 158
 — punto respecto circunferencia, 157
 Potencial escalar, 250
 — vector, 259
 Problema satelización, 677
 Producto escalar, 80
 — mixto, 237
 — simétricas, 135
 — vectorial, 87, 237
 — — doble, fórmula, 239
 Prolongación isometrías, 132
 Proyección hiperplano, 49
 Proyector, 4, 5, 6
 Pseudoesfera, 592
 Punto conjugados circunferencia, interpretación geométrica, 165
 — — respecto circunferencia, 164
 — , distancia plano, 117
 — , — recta, 108, 119
 — umbílico hoja, 581

R

Radio curvatura, 404
 — — geodésica arco, 557
 — — normal arco, 557
 — torsión, 404
 — — geodésica arco, 557
 Recta afín parametrización, 30
 — — , vector director, 29
 — definida dos ecuaciones cartesianas, 118
 — , distancia punto, 108, 119
 — , ecuaciones, 105
 — , — polares, 106
 — paralelas, distancia entre, 109
 — polar, 192
 — , punto contacto tangente circunferencia, 161
 — tangente circunferencia, 161
 — vectorial, 2
 Red esferas, 194
 Relación Chasles, 90, 92
 Rodante, 478
 Rotación, eje instantáneo, determinación, 703
 Rotacional campo vectores, 255
 — nulo, 258

Rotacional producto, 263
 Ruleta móvil, 478

S

Satelización, problema, 677
 Semejanza afín, 149
 — , puntos fijos, 150
 — vectorial, 146
 Semiespacio amplio, 56
 — definido hiperplano afín, 56
 — estricto, 56
 Serret-Frenet, sistema referencia, 401
 Signatura permutación, 65
 Simediana, 752
 Simetría afín, 51
 — ortogonal, 134
 — , producto, 135
 — vectorial, 8
 Sistema cuatro planos, 74
 — deslizantes, 290
 — fuerzas, 283
 — material movimiento, campo velocidades-aceleraciones, 683
 — — — , concepto, 681
 — referencia, 17
 — — afín cualquiera, 176
 — — , aplicación afín, expresión, 61
 — — Darboux, 553, 555, 632
 — — — , cambio orientación, 557
 — — , cambio, 99
 — — definido ángulos Euler, 638
 — — espacio afín, 59
 — — — , cambios, 60
 — — Frenet, 378, 559, 632
 — — — , componentes aceleración, 653
 — — — , — velocidad, 653
 — — inicial, 178
 — — móvil, 617, 620
 — — — , adición vectores rotaciones, 640
 — — — , biyecciones afines, 622
 — — — , campo velocidades, 628
 — — — , funciones ligadas, 627
 — — — indeformable, 623
 — — — — , ejemplos, 637
 — — — — , funciones ligadas, 633
 — — — — , rotación instantánea, 630
 — — — ligado, 624
 — — — — espacio móvil, 698
 — — — — sólido, 698
 — — — — movimiento, 702
 — — — ortonormal, 623, 631
 — — — — , determinación, 634
 — — — un parámetro, 624
 — — ortonormal directo, expresión, 272

Sistema referencia ortonormal, utilización, 129
 — — Serret-Frenet, 401
 Sobreosculatriz, 318
 Sólido movimiento, 685
 Subarco, 305
 — compacto, 305
 Subespacio afín, 25
 — — , caracterización, 39
 — — , subvariedades, 24
 — , codimensión, 2
 — , dimensión, 2
 — fundamental arcos, 320
 — propio maximal, 3
 — suplementario, 4
 — — , restricciones, 5
 — vectorial engendrado, 1
 — — , perpendicularidad, 84
 — — , trasladadas, 25
 Subhoja, 503
 Subvariedad afín, imagen, 26
 — hoja, 544
 — lineal afín, 24
 Superficie cónica, 183
 — desarrollable, 537
 — , forma cuadrática fundamental, expresión, 548
 — , primera forma cuadrática fundamental, 548
 — , propiedades afines, 501
 — , — métricas, 547
 — reglada, 532
 — — desarrollable, 528
 — — , naturaleza puntos, 537
 — — , plano tangente, 535
 — revolución, 215
 — — , ecuaciones, 215
 — — , plano tangente, 521
 — , segunda forma cuádrica fundamental, 562, 564
 — segundo grado, 202

T

Tangente arco punto regular, 321
 — circunferencia desde un punto, 162
 — conjunto, noción geométrica, 224
 — geométrica conjunto, 228
 — orientada arco, 323
 Teorema Catalan, 801
 — Helly, 748
 — Hermann Weyl, 750
 — Joachimstal, 804
 — Meusnier, 561
 — Morley-Petersen, 773
 Teoría espectral, complementos, 81

Tiempo, 644
 Topología conjunto rectas vectoriales, 225
 Torbellino campo vectores, 255
 Toro, 220
 — , asintóticas, 606
 — , puntos elípticos, 607
 — , — hiperbólicos, 607
 — , — parabólicos, 607
 Torsión arco, 403
 — , cálculo, 405
 — geodésica, 555
 — — arco, 558
 — hélice, 429
 — , radio, 404
 Torsor, 270
 — , campos, 233
 — , descomposición, problema general, 289
 — , — suma dos deslizantes, 286
 — , — torsores elementales, 285
 — deslizante, 279
 — , dos, comomento, 275
 — , eje central, 273
 — , — — , ecuaciones cartesianas, 273
 — elemental, 278
 — , momento, 270
 — nulo, 279
 Tractriz, 591
 Transformación conforme, 151
 Transvección afín, 51
 — — hiperplano, 52
 — (vectorial), 5, 9
 Traslación, 705
 — , descomposición, 141
 — espacio afín, grupo, 14
 — , grupo, 21, 47
 — rectilínea, 707
 — uniforme, 707
 — vector t , 13
 Traslada subespacio vectorial, 25
 Trayectoria, 644
 Trigonometría esférica, fórmula fundamental, 103
 Trocoide, 476
 — , centro instantáneo rotación, 477
 — , estudio, 495
 — , interpretación cinemática, 477
 — puntos estacionarios, 479

U

Unicursal, curva, 441, 442

V

Variedad afín, ecuaciones, 34

- Variedad afín, engendrada, 28
 - — , paralelismo, 30
 - — , parametrizaciones, 28
 - — tangente, concepto, 230
 - — , vectores directores, 29
- Varignon, fórmula, 271
- Vector asociado espacio afín, 15
 - , campo, 233, 243
 - deslizante, 280
 - — , momento, 282
 - director recta afín, 29
 - , endomorfismo antisimétrico asociado, 241
 - ligado, 15, 280
 - normal geodésico, 555
 - — hoja, 553
- Vector propio, direcciones principales, 83
 - , representante, 15
- Velocidad absoluta, 715
 - angular, 658, 708
- Velocidad areolar, 663
 - arrastre, 715
 - , componentes, 652
 - , — , coordenadas esféricas, 655
 - , — , — semipolares, 654
 - , — , sistema referencial Frenet, 653
 - escalar, 653
 - escape, 678
 - instantánea, 644
 - numérica, 644
- Vértice cono, 183

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS



ISBN - 84 - 291 - 5065 - X

ISBN - 84 - 291 - 5068 - 4